УДК 531.3:519.879:629.76:001.891

А.С. Цыбенко, А.С. Конюхов
Национальный технический университет Украины “КПИ”, Киев, Украина

ПРОЕКЦИОННО-СЕТОЧНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ УПРУГОЙ ДИНАМИКИ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

Background. The development of efficient projection-grid method for solving initial-boundary value problems of the elastic dynamics of the aircraft.
Objective. Theoretical study of numerical methods for solving the elastic dynamics of aircraft in order to create a generalized method of numerical integration of initial-boundary value problems for discrete-continuum.
Methods. As a generalized mathematical description of the initial-boundary value problem by using the operator formulation of the first order main part. Approximate solution of initial value problems of elastic dynamics of aircraft represented as a linear form on the class of admissible functions of non-degenerate projective basis. Algebraization of the spatial variables is realized because of orthogonalization residuals of equations and boundary conditions for the system of functions defining non-degenerate weight basis. The greatest effect is achieved by computing the matching item in the projection and a weight basis in conjunction with the "weak" formulation of the Galerkin method in the form of the finite element method. The general form of the finite difference method is used for algebraization of unknown functions on a temporary argument. For solving systems of nonlinear algebraic equations on time layers, Newton's method and its modifications were applied.
Results. A general approach to solving the problems of the elastic dynamics of aircraft using the procedure of algebraization based on projection-grid schemes of the method of weighted residuals. A posteriori estimates for the accuracy, convergence and stability of numerical solutions of the elastic dynamics of aircraft were presented.
Conclusions. The developed technique of algebraization tasks in elastic dynamics of aircraft can be widely used in the simulation of the dynamics of liquid carrier rockets in different parts of the flight.

Keywords: dynamics of aircraft; initial-boundary value problem; Galerkin method; finite element method; finite-difference schemes; accuracy; convergence; stability.

Введение

Теоретическое исследование динамики летательных аппаратов (ЛА) требует проведения большого объема вычислений с использованием проблемно-ориентированного программного обеспечения на основе эффективных численных методов [1]. В этой связи совершенствование и развитие методов математического моделирования упругой динамики ЛА является актуальным.

В [2] получена “гибридная” система уравнений возмущенного движения ЛА с учетом упругой динамики деформируемости при заданном (известном) начальном состоянии. “Гибридная” система состоит из обыкновенных дифференциальных уравнений и из уравнений в частных производных. Это соответствует физической сущности движения ЛА в виде совокупности переносного движения (поступательного и вращательного) как твердого тела и относительного движения его элементов за счет упругих деформаций. В переносном движении ЛА обладает шестью степенями свободы. В относительном движении число степеней свободы бесконечно. Чтобы довести решение сформулированной начально-краевой задачи до законченного результата, необходимо разработать универсальные методы, обладающие достаточным уровнем точности, устойчивости и эффективности. Развитию вопросов данного направления посвящено настоящее исследование.

Постановка задачи

Цель работы — сформулировать универсальную эффективную методику приведения к алгебраической форме начально-краевой задачи (НКЗ), составляющей основу математической модели упругой динамики ЛА [2].

Материалы и методы

В качестве обобщенного математического описания НКЗ используем операторную формулировку с главной частью первого порядка [3].

Введем в рассмотрение множество в общем случае матричных линейных дифференциальных операторов $\tilde{L}_i^{n_i}$, положительно определенных на плотном в сепарабельном гильбертовом пространстве H линеале D_L, и множество в общем случае матричных невырожденных нелинейных дифференциальных операторов $\tilde{N}_i^{m_i}$. Сформулируем в области V с границей Ω обобщенную краевую задачу динамики деформируемых тел вида, отвечающую постановке [2], вида

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\underset{\sim}{Y}^I(\underset{\sim}{R},\tau)+\underset{\sim}{L}_0^{n_0}\circ\underset{\sim}{N}_0^{m_0}\circ\underset{\sim}{Y}^I(\underset{\sim}{R},\tau)=\underset{\sim}{P}_0(\underset{\sim}{R},\tau),\quad \underset{\sim}{R}\in V;\tag{1}$$

$$\underset{\sim}{L}_i^{n_i}\circ\underset{\sim}{N}_i^{m_i}\circ\underset{\sim}{Y}^I(\underset{\sim}{R},\tau)=\underset{\sim}{P}_i(\underset{\sim}{R},\tau),\quad \underset{\sim}{R}\in\Omega_i;\tag{2}$$

$$\underset{\sim}{Y}^I(\underset{\sim}{R},0)=\underset{\sim}{Y}^I(\underset{\sim}{R}),\ \ \underset{\sim}{R}\in V,\tag{3}$$

где $i=1,\dots,n_0+m_0;\, n_0+m_0=2k\,(k=1,2,\dots);$ $n_i+m_i<n_0+m_0\ \ (\forall i\neq 0)$, $\underset{\sim}{Y}^I(\underset{\sim}{R},\tau)$ – вектор искомого решения задачи (1), удовлетворяющий граничным условиям (2), заданным на участках Ω_i граничной поверхности $\Omega=\bigcap\Omega_i$ области V, и начальным условиям (3); $\underset{\sim}{P}_j(\underset{\sim}{R},\tau)$ $(j=0,\dots,n_0+m_0)$ – векторы, характеризующие взаимодействие системы с внешней средой; n_j,m_j – порядки старших производных соответствующих дифференциальных операторов $(n_j,m_j=0,1,2,\dots;\ n_{j+1}+m_{j+1}<n_j+m_j)$; $\circ$ – символ, обозначающий операции скалярного, векторного или тензорного (диадного) умноження [4].

Приближенное решение задачи $\bar{\underset{\sim}{Y}}^I(\underset{\sim}{R},\tau)$, определенное на классе допустимых функций $C_{n_0+m_0}$ в виде линейной формы

$$\bar{\underset{\sim}{Y}}^I(\tilde{R},\tau)=\begin{Bmatrix}\sum\limits_k \dot{\underset{\sim}{h}}{}_k^u(\tau)\circ\dot{\underset{\sim}{\varphi}}{}_k^u(\bar{R})\\ \sum\limits_k \underset{\sim}{h}_k^u(\tau)\circ\underset{\sim}{\varphi}_k^u(\bar{R})\end{Bmatrix}=\underset{\sim}{H}(\tau)\circ\underset{\sim}{\Phi}(\underset{\sim}{R}),\tag{4}$$

и удовлетворяющее начальным условиям (3), дает невязки $\underset{\sim}{\Delta}_0(\underset{\sim}{R},\tau)$ в уравнении (1) и $\underset{\sim}{\Delta}_0(\underset{\sim}{R},\tau)(i=1,\dots,n_0+m_0)$ в граничных условиях (2):

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\bar{\underset{\sim}{Y}}^I(\underset{\sim}{R},\tau)+\underset{\sim}{L}_0^{n_0}\circ\bar{\underset{\sim}{N}}_0^{m_0}\circ\bar{\underset{\sim}{Y}}^I(\underset{\sim}{R},\tau)-\tilde{P}_0(\underset{\sim}{R},\tau)=\underset{\sim}{\Delta}_0(\underset{\sim}{R},\tau)\neq 0,\qquad \underset{\sim}{R}\in V,\tag{5}$$

$$\underset{\sim}{L}_0^{n_0}\circ\bar{\underset{\sim}{N}}_0^{m_0}\circ\bar{\underset{\sim}{Y}}^I(\underset{\sim}{R},\tau)-\underset{\sim}{P}_i(\underset{\sim}{R},\tau)=\underset{\sim}{\Delta}_i(\underset{\sim}{R},\tau)\neq 0,\quad \underset{\sim}{R}\in\Omega_i.\tag{6}$$

Наиболее общий способ минимизации невязок (5), (6), обусловленный их пространственно-временной функциональной зависимостью, состоит из двух этапов. Первый этап заключается в ортогонализации невязок к некоторым наборам базисных функций $\underset{\sim}{\psi}_k^u(\tilde{R})$, $\dot{\underset{\sim}{\psi}}{}_k^u(\underset{\sim}{R})$, всегда существующих в сепарабельном гильбертовом пространстве H [4], [5], что соответствует алгебраизации задачи (1), (2) по пространственным переменным. Это приводит к справедливым для любого момента времени τ соотношениям вида

$$\langle\underset{\sim}{\Delta}_0,\underset{\sim}{\psi}_k^T\rangle_V=\sum_i^{n_0}(-1)^i\langle\underset{\sim}{\Delta}_i,(\underset{\sim}{L}_i^{n_i}\circ\underset{\sim}{\psi}_k)^T\rangle_{\Omega_i}\tag{7}$$

или с учетом (6), (7)

$$\left\langle\frac{\partial}{\partial\tau}\bar{\underset{\sim}{Y}}^I(\underset{\sim}{R},\tau)+\underset{\sim}{L}_0^{n_0}\circ\underset{\sim}{N}_0^{n_0}\bar{\underset{\sim}{Y}}^I(\underset{\sim}{R},\tau)-P_0(\underset{\sim}{R},\tau),\ \underset{\sim}{\psi}_k^T\right\rangle_V=$$

$$=\sum_i^{n_o}(-1)^i\langle\underset{\sim}{L}_i^{n_i}\circ\underset{\sim}{N}_i^{m_i}\circ\bar{\underset{\sim}{Y}}^I(\underset{\sim}{R},\tau)-\underset{\sim}{P}_i(\underset{\sim}{R},\tau),\ (\underset{\sim}{L}_i^{n_i}\circ\underset{\sim}{\psi}_k)^T\rangle_{\Omega_i},\tag{8}$$

где $\underset{\sim}{\psi}_k$ – обобщенные базисные функции (весовой базис):

$$\underset{\sim}{\psi}_k=\begin{Bmatrix}\dot{\underset{\sim}{\psi}}{}_k^u\\ \underset{\sim}{\psi}_k^u\end{Bmatrix},$$

а запись $\langle,\rangle$ обозначает скалярное произведение по области интегрирования [5].

Выражение в левой части (8) проинтегрируем по частям относительно переменной $\underset{\sim}{R}$, руководствуясь операторной формулой [5]

$$\langle\underset{\sim}{L}_0^{n_0}\circ\underset{\sim}{N}_0^{m_0}\circ\bar{\underset{\sim}{Y}}^I(\tilde{R},\tau),\ \underset{\sim}{\psi}_k^T\rangle_V=$$

$$=\langle\underset{\sim}{L}_0^{n_0-1}\circ\underset{\sim}{N}_0^{m_0}\circ\bar{\underset{\sim}{Y}}^I(\underset{\sim}{R},\tau),\ (\underset{\sim}{L}_0^1\circ\underset{\sim}{\psi}_k)^T\rangle_V+$$

$$+\langle\underset{\sim}{L}_1^{n_1}\circ\underset{\sim}{N}_1^{m_1}\circ\bar{\underset{\sim}{Y}}^I(\underset{\sim}{R},\tau),\ (\underset{\sim}{L}_{n_0+m_0}^{n_{n_0+m_0}}\circ\underset{\sim}{\psi}_k)^T\rangle_\Omega.$$

В результате интегрирования получим

$$\left\langle\frac{\partial}{\partial\tau}\bar{\underset{\sim}{Y}}^I(\underset{\sim}{R},\tau),\ \underset{\sim}{\psi}_k^T\right\rangle_V+$$

$$+\langle\underset{\sim}{L}_0^{n_0-1}\circ\underset{\sim}{N}_0^{m_0}\circ\bar{\underset{\sim}{Y}}^I\ (\underset{\sim}{R},\tau),\ \ (\underset{\sim}{L}_0^1\circ\underset{\sim}{\psi}_k)^T\rangle_V+$$

$$+\langle \underset{\sim}{L}_1^{n_1}\circ \underset{\sim}{N}_1^{m_1}\circ \overline{\underset{\sim}{Y}}^I(\underset{\sim}{R},\tau),\ (\underset{\sim}{L}{}^{n_{n_0+m_0}}_{n_0+m_0}\circ \underset{\sim}{\psi}_k)^T\rangle_\Omega -$$

$$-\langle \underset{\sim}{P}_0(\underset{\sim}{R},\tau),\ \psi_k^T\ \rangle_V =$$

$$=\sum_i^{n_0}(-1)^i\langle \underset{\sim}{L}_i^{n_i}\circ \underset{\sim}{N}_i^{m_i}\circ \overline{\underset{\sim}{Y}}^I(\underset{\sim}{R},\tau)-$$

$$-\underset{\sim}{P}_i(\underset{\sim}{R},\tau),\ (\underset{\sim}{L}_i^{n_i}\circ \underset{\sim}{\psi}_k)^T\rangle_{\Omega_i}. \qquad (9)$$

Отметим, что соотношение (9) представляет собой ослабленную формулировку (8), поскольку на функции $\overline{\underset{\sim}{Y}}^I(\underset{\sim}{R},\tau)$ здесь накладываются менее жесткие условия непрерывности $\overline{\underset{\sim}{Y}}^I(\underset{\sim}{R},\tau)\in C_{n_0+m_0-1}$.

В соответствии с методом Галеркина [7], базис $\underset{\sim}{\psi}_k(\underset{\sim}{R})$ принимается совпадающим с функциями $\underset{\sim}{\varphi}_k(\underset{\sim}{R})$ разложения (4). В этом случае соотношения (9) могут быть записаны как

$$\langle \dot{\underset{\sim}{H}}(\tau)\cdot \underset{\sim}{\Phi}(\underset{\sim}{R}),\varphi_k^T(\underset{\sim}{R})\rangle_V +$$

$$+\langle \underset{\sim}{H}(\tau)\cdot \underset{\sim}{L}_0^{n_0-1}\circ \underset{\sim}{N}_0^{m_0}\circ \underset{\sim}{\Phi}(\underset{\sim}{R}),\ (\underset{\sim}{L}_0^1\circ \varphi_k(\underset{\sim}{R}))^T\rangle_V +$$

$$+\langle \underset{\sim}{H}(\tau)\cdot \underset{\sim}{L}_0^{n_1}\circ \underset{\sim}{N}_0^{m_1}\circ \underset{\sim}{\Phi}(\underset{\sim}{R}),\ (\underset{\sim}{L}{}^{n_{n_0+m_0}}_{n_0+m_0}\circ \underset{\sim}{\varphi}_k(\underset{\sim}{R}))^T\rangle_\Omega -$$

$$-\langle \underset{\sim}{P}_0(\underset{\sim}{R},\tau),\underset{\sim}{\varphi}_k(\underset{\sim}{R})^T\rangle =$$

$$=\sum_i^{n_0}(-1)^i\langle \underset{\sim}{H}(\tau)\cdot \underset{\sim}{L}_i^{n_i}\circ \underset{\sim}{N}_i^{m_i}\circ \underset{\sim}{\Phi}(\underset{\sim}{R})-$$

$$-\underset{\sim}{P}_i(\underset{\sim}{R},\tau),(\underset{\sim}{L}_i^{n_i}\circ \underset{\sim}{\varphi}_k(\underset{\sim}{R}))^T\rangle_{\Omega_i}. \qquad (10)$$

В вычислительном отношении наиболее эффективным вариантом метода Галеркина является метод конечных элементов (МКЭ) на основе ослабленной формулировки (9), использующий кусочно-гладкие локальные базисные функции [5]. Построение базисных функций специального вида в МКЭ производится заменой исходной области совокупностью подобластей-элементов ($V=\bigcup V_i$), взаимодействующих в конечном числе узловых точек. В пределах каждого элемента искомое решение ищется в виде интерполянта по узловым значениям:

$$\{\overline{\underset{\sim}{Y}}{}_e^I(\underset{\sim}{R},\tau)\}=[N_e(\underset{\sim}{R})]\{\overline{\underset{\sim}{Y}}_{ae}(\tau)\}, \qquad (11)$$

где $\{\overline{\underset{\sim}{Y}}{}_e^I(\underset{\sim}{R},\tau)\}=\{\dot{\bar{u}}_{e^1}(\underset{\sim}{R},\tau),\ldots,\dot{\bar{u}}_{e^m}(\underset{\sim}{R},\tau),$ $\bar{u}_{e^1}(\underset{\sim}{R},\tau),\ldots,\bar{u}_{e^m}(\underset{\sim}{R},\tau)\}^T$ – вектор искомой функции внутри элемента e; $\{\overline{Y}_{ae}(\tau)\}=\{\{\dot{\bar{u}}_i(\tau)\},$ $\{\dot{\bar{u}}_j(\tau)\},\ldots,\{\dot{\bar{u}}_l(\tau)\},\{\bar{u}_i(\tau)\},\{\bar{u}_j(\tau)\},\ldots,\{\bar{u}_l(\tau)\}\}^T$ – вектор узловых значений искомой функции; i, $j,\ldots,l$ – номера узлов элемента e; $\{\bar{u}_k(\tau)\}=$ $=\{\{\bar{u}_1(\tilde{R}_k,\tau),\bar{u}_2(\tilde{R}_k,\tau),\ldots,\bar{u}_m(\tilde{R}_k,\tau)\}\}^T$, $\{\dot{\bar{u}}_k(\tau)\}=$ $=\{\dot{\bar{u}}_1(\tilde{R}_k,\tau),\dot{\bar{u}}_2(\tilde{R}_k,\tau),\ldots,\dot{\bar{u}}_m(\tilde{R}_k,\tau)\}^T$ – k-е узловое значение искомого вектора; $[N_e(\tilde{R})]$ – блочная матрица интерполяции элемента (матрица формы)

$$[N_e(\underset{\sim}{R})]=\begin{bmatrix}[N_e^{\dot{u}}(\underset{\sim}{R})] & 0\\ 0 & [N_e^u(\underset{\sim}{R})]\end{bmatrix},$$

где

$$[N_{e\,k}^u(\underset{\sim}{R})]=$$

$$=\begin{bmatrix}N^u_{e\,11k}(\underset{\sim}{R}) & N^u_{e\,12k}(\underset{\sim}{R}) & \ldots & N^u_{e\,1mk}(\underset{\sim}{R})\\ N^u_{e\,21k}(\underset{\sim}{R}) & N^u_{e\,22k}(\underset{\sim}{R}) & \ldots & N^u_{e\,2mk}(\underset{\sim}{R})\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ N^u_{e\,m1k}(\underset{\sim}{R}) & N^u_{e\,m2k}(\underset{\sim}{R}) & \ldots & N^u_{e\,mmk}(\underset{\sim}{R})\end{bmatrix}, \qquad (12)$$

а выражения для $[N_e^{\dot{u}}(\underset{\sim}{R})]$ и $[N_{e\,k}^{\dot{u}}(\underset{\sim}{R})]$ получаются заменой в (12) индекса “u” на “$\dot{u}$”.

Подстановка (11) в (10) при выборе в качестве базисных функций компонент матрицы формы элемента (12) и отождествление базисов разложения $[N_{e\,k}^u(\underset{\sim}{R})]$ с $[N_{e\,k}^{\dot{u}}(\underset{\sim}{R})]$ приводит к уравнениям МКЭ вида

$$\begin{bmatrix}[M] & 0\\ 0 & [M]\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dot{\overline{Y}}^I\end{Bmatrix}+$$

$$+\begin{bmatrix}0 & [K]\\ -[M] & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\overline{Y}^I\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\{F\}\\ 0\end{Bmatrix}. \qquad (13)$$

Здесь $[M]$ и $[K]$ – обобщенные матрицы масс и жесткости ансамбля элементов размерности $n\times n$, которые определяются суммированием по элементам соответствующих величин:

$$[M]=\sum_1^{N_e}[a^e]^T[m^e][a^e],$$

$$[K]=\sum_1^{N_e}[a^e]^T[K^e][a^e];$$

$\{F\}$ – вектор обобщенных узловых усилий:

$$\{F\} = \sum_{1}^{N_e} [a^e]^T \{f^e\};$$

n – число узловых неизвестных, равное произведению числа степеней свободы m в узле на общее число узлов N_p конечноэлементной модели; N_e – общее число элементов; $[a^e]$ – булева матрица, устанавливающая связь узловых неизвестных элемента e и всей дискретной модели; $[m^e], [K^e]$ и $[f^e]$ – матрицы масс, жесткости и вектор узловых усилий элемента e.

Для более корректного описания механических процессов в деформируемых телах в уравнение МКЭ (13) тогда, когда это существенно, следует ввести диссипативные слагаемые, пропорциональные вектору относительных скоростей системы [7]. В этом случае (13) имеет вид

$$\begin{bmatrix} [M] & 0 \\ 0 & [M] \end{bmatrix} \left\{ \overset{\bullet}{Y}{}^{I} \right\} + \begin{bmatrix} [C] & [K] \\ -[M] & 0 \end{bmatrix} \left\{ \overline{Y}{}^{I} \right\} = \begin{Bmatrix} \{F\} \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (14)$$

где $[C]$ – обобщенная матрица демпфирования:

$$[C] = \sum_{1}^{N_e} [a^e]^T [c^e][a^e] \; .$$

Применение модели демпфирования Релея [8] позволяет получить удобное в вычислительном отношении выражение матрицы демпфирования элемента e:

$$[c^e] = C_1 [K_E^e] + C_2 [m^e]. \quad (15)$$

Здесь $[K_E^e]$ и $[m^e]$ – упругая линейная матрица жесткости и матрица массы элемента e, C_1 и C_2 – константы:

$$C_1 = \frac{4\pi (T_j \theta_j - T_i \theta_i)}{(T_j^2 - T_i^2)} \; ,$$

$$C_2 = \frac{T_i T_j (T_j \theta_i - T_i \theta_j)}{(T_j^2 - T_i^2)} \; ,$$

где T_i, T_j – периоды i-й и j-й собственных недемпфированных форм колебаний $(j > i)$; θ_i, θ_j – коэффициенты критического демпфирования, которые обычно принимают равными $\theta_i = 0,02$, $\theta_j = 0,05$.

Следует отметить, что приведенная упрощенная модель учета демпфирования не изменяет собственных форм колебаний системы и требует значительно меньших вычислительных затрат по сравнению с более точными методами ее учета. Например, в методе суперпозиции мод [7, 8] требуется вычисление коэффициентов вязкого демпфирования для каждой собственной формы.

Второй этап решения задачи (1)–(3) состоит в алгебраизации уравнения (13) по временному аргументу.

Для удобства изложения матричное уравнение (93) представим в форме

$$\frac{d}{dt}\{\overline{Y}{}_a^I\} - \{D(\{\overline{Y}{}_a^I\})\} = \{0\}, \quad (16)$$

где оператор $D(\;)$ равен

$$D(\;) = \begin{bmatrix} -[M]^{-1}[C] & -[M]^{-1}[K] \\ [E] & 0 \end{bmatrix} (\;) +$$

$$+ \begin{Bmatrix} [M]^{-1}[F] \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (17)$$

Применяя конечно-разностный по времени подход [9], интегрируем (16) на временном интервале $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$:

$$\{\overline{Y}{}_a^I\}_{n+1} = \{\overline{Y}{}_a^I\} + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \{D(\{Y_a^I\})\} dt. \quad (18)$$

Отметим, что уравнения (18) определяют связь узловых векторов состояния системы $\{\overline{Y}{}_a^I\}_{n+1}$ и $\{\overline{Y}{}_a^I\}_n$, соответствующих двум соседним моментам времени (временным слоям) t_{n+1} и t_n.

Для нахождения $\{\overline{Y}{}_a^I\}_{n+1}$ воспользуемся разложением подынтегрального выражения (15) в конечный ряд Тейлора по временному аргументу t в окрестности t_n в предположении о малости Δt_n:

$$\{\overline{Y}{}_a^I\}_{n+1} = \{\overline{Y}{}_a^I\}_n +$$

$$+ \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left(\sum_{i=0}^{j-1} \left(\frac{d^i}{dt^i} \{D(\{\overline{Y}{}_a^I\})\} \right)_{t_n} \frac{(t - t_n)^i}{i!} + O(t - t_n)^j \right) dt \; . \quad (19)$$

Вычисляя интегралы в правой части (19), получим

$$\{\overline{Y}{}^I_a\}_{n+1} = \{\overline{Y}{}^I_a\}_n + \\ + \sum_{i=1}^{j} \left(\frac{d^i}{dt^i} \{D(\{\overline{Y}{}^I_a\})\} \right)_{t_n} \frac{\Delta t_n^i}{i!} + O(\Delta t_n)^j . \quad (20)$$

В зависимости от способа дискретной аппроксимации временных производных в (20) можно построить различные многослойные семейства разностных схем интегрирования (16): θ-Вильсона, Ньюмарка, Хаболта [7], обобщенную схему Эйлера [9] и др.

Ограничимся рассмотрением наиболее простой и широко используемой двухслойной аппроксимации. В этом случае вектор $\{Y_a^I(\tau)\}$ в текущий момент времени $t_n \le \tau \le t_n + \Delta t_n$ определяем линейной интерполяцией по значениям на временных слоях t_{n+1} и t_n:

$$\{D(\{\overline{Y}{}^I_a\})\} = [\alpha]\{D(\{\overline{Y}{}^I_a\})\}_{t_{n+1}} + \\ + ([E]-[\alpha])\{D(\{\overline{Y}{}^I_a\})\}_{t_n}, \quad (21)$$

где $[\alpha]$ – диагональная матрица весовых коэффициентов.

Подстановка (21) в (20) при удержании 1-го члена разложения $(i=1)$ дает

$$\{\overline{Y}{}^I_a\}_{n+1} = \{\overline{Y}{}^I_a\}_n + [\alpha]\{D(\{\overline{Y}{}^I_a\})\}_{t_{n+1}} \Delta t_n + \\ + ([E]-[\alpha])\{D(\{\overline{Y}{}^I_a\})\}_{t_n} \Delta t_n + O(\Delta t_n^2). \quad (22)$$

Отметим, что $D(\ )$ в общем случае является нелинейным оператором относительно $\{Y_a^I\}$, причем нелинейность обусловлена как физическими, так и геометрическими аспектами. Для удобства дальнейших выкладок (22) представим в форме

$$[G(\{\overline{Y}{}^I_a\}_{n+1})]\{\overline{Y}{}^I_a\}_{n+1} = \{L\}_{t_n}, \quad (23)$$

где

$$G(\ )_{n+1} = [E] - [\alpha]D(\ )_{t_{n+1}} \Delta t_n,$$

$$\{L\}_{t_n} = ([E] + ([E]-[\alpha])D(\ )_{t_n} \Delta t_n)\{\overline{Y}{}^I_a\}_{t_n}.$$

Для нахождения на каждом временном шаге решения системы нелинейных уравнений (23) могут быть использованы итерационные методы типа Ньютона, простых итераций и т.п. [10].

Согласно методу Ньютона, решение (23) определяют по схеме:

$$[J(\{\overline{Y}{}^I\}^i_{n+1})]\{\Delta\overline{Y}{}^I_a\}^i_n = \\ = -[G(\{\overline{Y}{}^I\}^i_{n+1})]\{\overline{Y}{}^I_a\}^i_{n+1} + \{L\}_{t_n}, \quad (24)$$

$$\{\overline{Y}{}^I_a\}^{i+1}_{n+1} = \{\overline{Y}{}^I_a\}^i_n + [\beta]^i\{\Delta\overline{Y}{}^I_a\}^i_n, \quad (25)$$

$$\frac{\|\{\Delta\overline{Y}{}^I_a\}^N_n\|}{\|\{\overline{Y}{}^I_a\}^{N+1}_n\|} \le \varepsilon, \quad i = 1, 2, \ldots, N, \quad (26)$$

где $[J(\{\overline{Y}{}^I\}^i_{n+1})]$ – матрица Якоби, полученная дифференцированием матричного оператора в левой части (10) по вектору узловых амплитуд:

$$[J(\{\overline{Y}{}^I\}^i_{n+1})] = \\ = [G(\{\overline{Y}{}^I\}^i_{n+1})] + \left[\frac{\partial[G(\{\overline{Y}{}^I\}^i_{n+1})]}{\partial\{\overline{Y}{}^I_a\}_{n+1}}\right]\{\overline{Y}{}^I_a\}_{n+1}; \quad (9)$$

$\{\overline{Y}{}^I_a\}^{N+1}_n$ – приближенное в рамках критерия (26) решение (22); $[\beta]^i$ – диагональная матрица релаксационных множителей, определяющих скорость сходимости итерационного процесса.

Положив в (24) $[J(\{\overline{Y}{}^I\}^i_{n+1})] = [J(\{\overline{Y}{}^I\}^1_{n+1})]$, приходим к модифицированной схеме Ньютона, которую принято называть методом Ньютона–Рафсона.

Если в (10) пренебречь вторым слагаемым, то схема (24)–(26) будет соответствовать методу простых итераций, а соотношение (24) примет вид

$$[G(\{\overline{Y}{}^I\}^i_{n+1})]\{\Delta\overline{Y}{}^I_a\}^i_n = \\ = -[G(\{\overline{Y}{}^I\}^i_{n+1})]\{\overline{Y}{}^I_a\}^i_{n+1} + [L]_{t_n}.$$

Отметим, что скорость сходимости метода Ньютона и его модификаций в значительной степени зависит от выбора начального приближения $\{\overline{Y}{}^I_a\}^1_{n+1}$. При задании $\{\overline{Y}{}^I_a\}^1_{n+1}$ $(n \ge 1)$ целесообразно применять экстраполяцию по значениям $\{\overline{Y}{}^I_a\}$ на предыдущих временных слоях. Наиболее простой вид экстраполяционных соотношений определяется явной схемой (22) при $[\alpha] \equiv [0]$.

В случае, когда в уравнении (1) вектор правой части $\underset{\sim}{P}_0(\underset{\sim}{R},\tau)=0$, $\underset{\sim}{R}\in V$, задача динамики ЛА упрощается. Согласно законам механики, при отсутствии внешних сил $(\underset{\sim}{P}_0(\underset{\sim}{R},\tau)=0)$ и заданных главных условиях краевой задачи (1)–(3) истинное состояние искомого вектора механической системы $\{\overline{Y}_a^I\}$ будет минимизировать отношение кинетической и потенциальной энергий [7]:

$$\rho(\overline{Y}_a^I)=\rho(\{\overline{Y}_a^I\}),[K],[M])=$$

$$=\frac{\{\overline{Y}_a^I\}^T\begin{bmatrix}[M] & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\{\overline{Y}_a^I\}}{\{\overline{Y}_a^I\}^T\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & [K]\end{bmatrix}\{\overline{Y}_a^I\}}. \qquad (28)$$

Следовательно, диссипативные слагаемые для коэффициентов матрицы демпфирования $[C]$ в данном случае равны нулю, а уравнение динамического равновесия (14) представим в форме

$$\begin{bmatrix}[M] & 0\\ 0 & [M]\end{bmatrix}\left\{\overset{\bullet}{\overline{Y}}{}^I\right\}+\begin{bmatrix}0 & [K]\\ -[M] & 0\end{bmatrix}\left\{\overline{Y}^I\right\}=\begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix}. \qquad (29)$$

Алгебраизация уравнения (29) по временному аргументу, соответствующая второму этапу решения задачи (1)–(3), не требует применения конечно-разностного подхода. С целью удобства изложения матричное уравнение (29) представим в форме

$$\frac{d}{dt}\{\overline{Y}_a^I\}-\{D(\{\overline{Y}_a^I\})\}=\{0\}, \qquad (30)$$

где оператор $D(\ )$ равен

$$D(\ )=\begin{bmatrix}0 & -[M]^{-1}[K]\\ [E] & 0\end{bmatrix}.$$

Для нахождения решения (30) воспользуемся тригонометрическим разложением вектора $\{\vec{Y}_a\}$ [11]:

$$\{\overline{Y}_a^I\}=A\,\{\overline{W}_a^I\}\cos\omega\, t, \qquad (31)$$

где ω – частота; $\{\overline{W}_a^I\}$ – вектор амплитудных значений перемещений; A – скалярный множитель, определяющий амплитудные значения.

Подставив (31) в дифференциальное уравнение (30), приходим к его спектральному аналогу [11]:

$$([K]-\lambda[M])\{\overline{W}_a^I\}=0, \qquad (32)$$

где искомые величины: $\lambda=\omega^2$ – собственные числа и $\{\overline{W}_a^I\}$ – собственные векторы формы, зависят от главных условий (кинематических ограничений) и не зависят от начальных условий задачи (30) и естественных условий (силовых условий взаимодействия с внешней средой) в (2).

Отметим также, что ρ в (28) принимает стационарные значения для вектора $\{\overline{W}_a^I\}$ $(\{\overline{Y}_a^I\})$ тогда и только тогда, когда выполняется условие (32) для некоторого собственного числа λ.

Решение задачи (31), (32) состоит в отыскании всех или нескольких (обычно наименьших) частот и соответствующих им форм колебаний [4].

Оценку точности, сходимости, устойчивости приближенного проекционно-сеточного решения краевой задачи (1)–(3) проводим, руководствуясь данными теоретических исследований [6, 12].

Не уменьшая общности рассуждений, предположим, что весовой базис $\underset{\sim}{\psi}_k$ определяется набором полиномиальных функций порядка j подпространства S^h пространства Соболева $W_2^{(j-1)}$. В этом случае для ошибки пространственной аппроксимации МКЭ справедливо неравенство

$$\|\underset{\sim}{Y}(t)-\overline{\underset{\sim}{Y}}(t)\|_{L_2(V)}\le ch^i\times$$

$$\times\left(\|\underset{\sim}{Y}(t)\|_{W_2^{(K)}(V)}+e^{-\lambda_1^h t}\|\underset{\sim}{Y}(t_0)\|_{W_2^{(K)}(V)}+\right.$$

$$\left.+\int_{t_0}^{t}e^{\lambda_1^h(\tau-t)}\left\|\frac{\partial\underset{\sim}{Y}(\tau)}{\partial\tau}\right\|_{W_2^{(K)}(V)}d\tau\right), \qquad (33)$$

где h – характерный размер элемента (конечного носителя); C – константа, не зависящая от h и $\underset{\sim}{Y}$; λ_1^h – наибольшее собственное значение линеаризированного оператора D (17), полученного, например, в результате разложения в ряд Тейлора с удержанием членов первого порядка [12]:

$$D_0^{\text{лин}}(\ )=-([M]^{-1}[K])^{\text{лин}}, \qquad (34)$$

запись $\|u\|_{W_2^{(K)}}$ означает

$$\|u\|_{W_2^{(K)}} = \sum_{l=0}^{k}\left(\sum_{i,j,m=0}^{l}\left\langle \frac{\partial^l u}{\partial x_1^i \partial x_2^j \partial x_3^m}\right\rangle, \left\langle \frac{\partial^l u}{\partial x_1^i \partial x_2^j \partial x_3^m}\right\rangle\right),$$

$$(i+j+m) \le l.$$

Из (33) следует, что при использовании конечных элементов с линейными функциями формы ошибка по пространственным переменным для компонент вектора $\underset{\sim}{Y}$ имеет порядок $o(h^2)$, а для величин, определяемых первыми производными компонент $\underset{\sim}{Y}$ по $\underset{\sim}{r}$ (деформации, скорости деформаций, напряжения, градиенты температур и т.д.), — $o(h)$.

Для исследования устойчивости конечно-разностных по времени схем (22) воспользуемся спектральным критерием [9].

Предположим, что в начальный момент времени t_0 узловые амплитуды вектора состояния могут быть представлены в виде разложения по собственным формам однородного оператора перехода $[G]$ (23):

$$\{\bar{Y}_a(t_0)\} = [\Phi]\{X(t)\}_{t_0},$$

где $[\Phi]$ — матрица, столбцы которой являются ортонормированными собственными векторами $[G]$; $\{X(t)\}_{t_0}$ — вектор обобщенных переменных, вычисленных в $t = t_0$.

Тогда решение линеаризованного уравнения (16) в произвольный момент времени $t > t_0$ имеет вид [8]

$$\{Y_a(\mathrm{t})\} = [\mathrm{EX}][\Phi]\{X(\mathrm{t})\}_{t_0}, \tag{35}$$

где экспоненциальные элементы $e^{(-\lambda_j^h t)}$ диагональной матрицы [EX] обеспечивают ограниченность компонент $\{Y_a(t)\}$ при $t \to \infty$ в случае $\operatorname{Re}\lambda_1^h$ определяет скорость затухания решения, т.е.

$$\|\{\bar{Y}(t)\}\|_{L_2(V)} \le e^{(-\operatorname{Re}\lambda_1^h \cdot t)}\ \|\{\bar{Y}(t_0)\}\|_{L_2(V)}\ .$$

Переходя к разностной аппроксимации (16), согласно (22) получим (с учетом линеаризации типа (34) на шаге Δt_n)

$$\{\bar{Y}_a\}_{n+1} = [T(\Delta t_n, h)]\{\bar{Y}_a\}_n, \tag{36}$$

где $[T(\Delta t_n, h)]$ — линейный матричный оператор перехода от n-го к $n+1$-му временному слою:

$$[T(\Delta t_n, h)] = ([\mathbf{E}] + [\alpha]D_0^{\text{лин}}(\ )_{t_{n+1}}\Delta t_n)^{-1} \times$$
$$\times ([\mathbf{E}] + ([\mathbf{E}] - [\alpha]D_0^{\text{лин}}(\ )_{t_n}\Delta t_n)).$$

Разностное решение (36) на n-м временном слое с учетом разложения (35) равно

$$\{\bar{Y}_a\}_{n+1} = [\mu^h]^{n+1}[\Phi]\{X\}_0,$$

где $[\mu^h]$ — диагональная матрица собственных значений оператора перехода $[T(\Delta t_n, h)]$,

$$\mu_j^h = \frac{1-(1-\alpha_j)\lambda_j^h \Delta t_n}{1+\alpha_j \lambda_j^h \Delta t_n}. \tag{37}$$

Для устойчивости метода необходимо, чтобы [9—10]

$$\max|\mu_j^h| \le 1. \tag{38}$$

Исследование (38) с учетом (37) показывает, что так как $\operatorname{Re}\lambda_j^h \ge 0$, разностные схемы в случае $\alpha_j < \frac{1}{2}$ являются условно устойчивыми. При этом временной шаг ограничен сверху величиной

$$\Delta t_{nj}^y = \frac{2}{|\lambda_j^h|(1-2\alpha_j)}, \tag{39}$$

т.е. $\Delta t_n^y < \min(\Delta t_{nj}^0)$.

Для устранения осцилляций решений (16) необходимо потребовать, чтобы $\min \mu_i^h > 0$. Тогда из (37) получаем

$$\Delta t_{nj}^y = \frac{1}{|\lambda_j^h|(1-\alpha_j)}, \tag{40}$$

$$\Delta t_n \le \min(\Delta t_{nj}^0).$$

При реализации критериев устойчивости (39) и неосцилляций (40) возникает проблема определения собственных чисел оператора $D_0^{\text{лин}}$. Поскольку решение последней задачи зачастую оказывается затруднительным, на практике используют различные приближенные оценки Δt_n, в том числе и эмпирического характера [7].

Выводы

Сформулирована обобщенная дискретно-континуальная начально-краевая задача упругой динамики ЛА.

Разработан общий подход к решению задач динамики ЛА с использованием двухэтапной (по пространственным переменным и по временному аргументу) процедуры алгебраизации на основе проекционно-сеточных схем метода взвешенных невязок.

Развиты итерационные методы Ньютона и его модификаций для решения систем нелинейных алгебраических уравнений на временных слоях.

Проведено теоретические исследования и получены оценки точности, устойчивости и эффективности дискретных схем.

Разработанная методика расчета и созданное в будущем на ее основе программное обеспечение найдут широкое применение в имитационном моделировании динамики жидкостных ракет-носителей на различных участках полета.

Предметом дальнейших исследований является разработка методик на основе предложенной выше, позволяющей упростить решение нелинейных задач динамики летательных аппаратов.

Список литературы

1. *Павловський М.А., Горбулін В.П., Клименко О.М.* Системи керування обертальним рухом космічних апаратів. – К.: Наук. думка, 1997. – 200 с.
2. *Розробка* адекватної математичної моделі дослідження динаміки стулок головного обтічника ракети-носія у процесі польоту і відділення / О.С. Цибенко, М.Г. Крищук, О.С. Конюхов та ін. // Наукові вісті НТУУ “КПІ”. – 2006. – № 6. – С. 139–148.
3. *Энгельбрехт Ю.А., Нигул У.К.* Нелинейные волны деформации. – М.: Наука, 1981. – 256 с.
4. *Цыбенко А.С., Конюхов А.С.* Имитационные динамические модели жидкостных ракет-носителей. – К.: НТУУ “КПИ”, 2008. – 230 с.
5. *Цыбенко А.С., Лавриков С.А.* Обобщенные схемы построения проекционно-сеточных методов // Проблемы прочности. – 1987. – № 11. – С. 103–108.
6. *Марчук Г.И., Агошков В.И.* Введение в проекционно-сеточные методы. – М.: Наука, 1981. – 416 с.
7. *Бате К., Вилсон Е.* Численные методы анализа и метод конечных элементов. – М.: Стройиздат, 1982. – 448 с.
8. *Пановко Я.Г.* Внутреннее трение при колебаниях упругих систем. – М.: Физматгиз, 1960. – 193 с.
9. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977. – 656 с.
10. *Цыбенко А.С., Крищук Н.Г., Конюхов А.С.* Математическое моделирование электротермомеханических процессов при индукционном нагреве проводящих тел. – К.: НТУУ “КПИ”, 2007. – 200 с.
11. *Собственные* колебания жидкостных ракет-носителей пакетной компоновки / А.С. Конюхов, В.С. Легеза, А.С. Цыбенко, Н.Г. Крищук // Проблемы прочности. – 2001. – № 3. – С. 93–99.
12. *Стренг Г., Фикс Дж.* Теория метода конечних элементов. – М.: Мир, 1977. – 350 с.

References

1. M. Pawlowski *et al.*, *Control Systems Rotary Motion of Spacecraft*. Kyiv, Ukraine: Naukova dumka, 1997, 200 p. (in Ukrainian).
2. O. Tsybenko *et al.*, “Development of adequate mathematical model study of the dynamics of the main wings fairing launch vehicle during flight and offices”, *Naukovi Visti NTUU KPI*, no. 6, 2006, pp. 139–148 (in Ukrainian).
3. J. Engelbrecht and U. Nigul, *Nonlinear Deformation Waves*. Moscow, Russia: Nauka, 1981, 256 p. (in Russian).
4. A. Tsybenko and A. Konyuhov, *Simulation of Fluid Dynamic Models of Rockets*. Kyiv, Ukraine: NTUU KPI, 2008, 230 p. (in Russian).
5. A. Tsybenko and S. Lavrikov, “Generalized scheme of constructing the projection-grid methods”, *Problemy procnosti*, no. 11, pp. 103–108, 1987 (in Russian).
6. G. Marchuk and V. Agoshkov, *Introduction to the Grid Projection Methods*. Moscow, Russia: Nauka, 1981, 416 p. (in Russian).
7. K. Bathe and E. Wilson, *Numerical Methods in Finite Element Analysis*. Moscow, Russia: Stroyizdat, 1982. 448 p. (in Russian).
8. J. Panovko, *Internal Friction Oscillations of Elastic Systems*. Moscow, Russia: Fizmatgiz, 1960, 193 p. (in Russian).
9. A. Samarskiy, *The Theory of Difference Schemes*. Moscow, Russia: Nauka, 1977, 656 p. (in Russian).
10. A. Tsybenko *et al.*, *Mathematical Modeling Electrothermomechanical Processes in Induction Heating Conductive Bodies*. Kyiv, Ukraine: NTUU KPI, 2007, 200 p. (in Russian).
11. A. Konyuhov *et al.*, “Natural oscillations of packet layout liquid launch vehicle”, *Problemy Prochnosti*, no. 3, 2001, pp. 93–99 (in Russian).
12. G. Strang and J. Fix, *The Theory of Finite Element Method*. Moscow, Russia: Mir, 1977, 350 p. (in Russian).

О.С. Цибенко, О.С. Конюхов

ПРОЕКЦІЙНО-СІТКОВІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ПРУЖНОЇ ДИНАМІКИ ЛІТАЛЬНИХ АПАРАТІВ

Проблематика. Розвиток ефективних проекційно-сіткових методів розв'язання початково-крайових задач пружної динаміки літальних апаратів.

Мета дослідження. Теоретичне дослідження числових методів розв'язання задач пружної динаміки літальних апаратів з метою створення узагальненої методики числового інтегрування початково-крайових дискретно-континуальних задач.

Методика реалізації. Як узагальнений математичний опис початково-крайових задач використано операторне формулювання з головною частиною першого порядку. Наближений розв'язок початково-крайових задач пружної динаміки літальних апаратів подано у вигляді лінійної форми на класі допустимих функцій невиродженого проекційного базису. Алгебризація по просторових змінних реалізується ортогоналізацією нев'язок рівнянь і граничних умов до системи функцій, що визначають невироджений ваговий базис. Найбільший обчислювальний ефект досягається при збігу елементів проекційного та вагового базисів у поєднанні з "ослабленим" формулюванням методу Гальоркіна у формі методу скінченних елементів. Узагальнена форма методу скінченних різниць використовується для алгебризації шуканих функцій з тимчасового аргументу. Для розв'язку систем нелінійних алгебричних рівнянь на тимчасових шарах застосовуються метод Ньютона і його модифікації.

Результати досліджень. Розроблено загальний підхід до розв'язку задач пружної динаміки літальних апаратів з використанням процедури алгебризації на основі проекційно-сіткових схем методу зважених нев'язок. Наведено апостеріорні оцінки точності, збіжності та стійкості отриманих числових розв'язків.

Висновки. Розроблено методику алгебризації завдань пружної динаміки літальних апаратів, яка може отримати широке застосування в імітаційному моделюванні динаміки рідинних ракет-носіїв на різних ділянках польоту.

Ключові слова: динаміка літальних апаратів; початково-крайова задача; метод Гальоркіна; метод скінченних елементів; схеми скінченних різниць; точність; збіжність; стійкість.

А.С. Цыбенко, А.С. Конюхов

ПРОЕКЦИОННО-СЕТОЧНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ УПРУГОЙ ДИНАМИКИ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

Проблематика. Развитие эффективных проекционно-сеточных методов решения начально-краевых задач упругой динамики летательных аппаратов.

Цель исследования. Теоретическое исследование численных методов решения задач упругой динамики летательных аппаратов с целью создания обобщенной методики численного интегрирования начально-краевых дискретно-континуальных задач.

Материалы и методы. В качестве обобщенного математического описания начально-краевых задач использована операторная формулировка с главной частью первого порядка. Приближенное решение начально-краевых задач упругой динамики летательных аппаратов представлено в виде линейной формы на классе допустимых функций невырожденного проекционного базиса. Алгебраизация по пространственным переменным реализуется в результате ортогонализации невязок уравнений и граничных условий к системе функций, определяющих невырожденный весовой базис. Наибольший вычислительный эффект достигается при совпадающих элементах проекционного и весового базисов в сочетании с "ослабленной" формулировкой метода Галеркина в форме метода конечных элементов. Обобщенная форма метода конечных разностей используется для алгебраизации искомых функций по временному аргументу. Для решения систем нелинейных алгебраических уравнений на временных слоях применяются метод Ньютона и его модификации.

Результаты исследований. Разработан общий подход к решению задач упругой динамики летательных аппаратов с использованием процедуры алгебраизации на основе проекционно-сеточных схем метода взвешенных невязок. Даны апостериорные оценки точности, сходимости и устойчивости полученных численных решений задач упругой динамики летательных аппаратов.

Выводы. Разработанная методика алгебраизации задач упругой динамики летательных аппаратов может найти широкое применение в имитационном моделировании динамики жидкостных ракет-носителей на различных участках полета.

Ключевые слова: динамика летательных аппаратов; начально-краевая задача; метод Галеркина; метод конечных элементов; конечно-разностные схемы; точность; сходимость; устойчивость.

Рекомендована Радою
приладобудівного факультету
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
28 січня 2015 року