УДК 517.98

В.М. Статкевич
Національний технічний університет України "КПІ", Київ, Україна

ЗАСТОСУВАННЯ СУТТЄВО НЕСКІНЧЕННОВИМІРНОГО ЕЛІПТИЧНОГО ОПЕРАТОРА ДО ФУНКЦІЙ $f(x,u(x))$ І $f(x,u_1(x),\ldots,u_m(x))$

Background. We consider the essentially infinite-dimensional elliptic operator (of the Laplace–Lévy type) $(Lu)(x)=\frac{1}{2}j(u''(x))$, proposed by Yu.V. Bogdansky (1977), for functions on the infinite-dimensional separable real Hilbert space H. This operator doesn't have finite-dimensional analogues. It possesses the Leibniz property and vanishes on the cylindrical functions, being the second-order differential operator. The differentiation rules of the composite function $f(u_1(x),\ldots,u_m(x))$ for the Laplace–Lévy operator and its modifications were obtained by P. Lévy, E.M. Polishchuk, G.E. Shilov, I.Ya. Dorfman and V.Ya. Sikiryavyi. The different rule was obtained by Yu.V. Bogdansky and Ya.Yu. Sanzharevsky for the Laplacian with respect to a measure in case of Gaussian measure.
Objective. The objective is to obtain the rules of application the essentially infinite-dimensional elliptic operator to composite functions $f(x,u(x))$ and $f(x,u_1(x),\ldots,u_m(x))$.
Methods. We use the semigroup theory techniques and the generalized Stone–Weierstrass theorem.
Results. We prove the rules of application the essentially infinite-dimensional elliptic operator to composite functions $f(x,u(x))$ and $f(x,u_1(x),\ldots,u_m(x))$. We also prove the similar rule for the essentially infinite-dimensional elliptic operator in bounded L-convex domains in the space H.
Conclusions. The results obtained in the paper generalize the known results for the Laplace–Lévy operator and its modifications. They are also similar to the classical differentiation of the composite function. The results can be used in further investigations of essentially infinite-dimensional equations.
Keywords: infinite-dimensional space; Laplace–Lévy operator; essentially infinite-dimensional elliptic operator; composite function.

Вступ

Класичний оператор Лапласа–Леві [1] не має скінченновимірних аналогів. Він є диференціальним оператором другого порядку, але задовольняє лейбніцівську властивість $L(uv)=$ $=Lu\cdot v+u\cdot Lv$ та набуває нульового значення на циліндричних функціях. Сучасний стан теорії оператора Лапласа–Леві викладено в [2]. В [1, с. 317–318] отримано формулу диференціювання складених функціоналів для оператора Лапласа–Леві. Нехай $u_1(x),\ldots,u_m(x)$ – функціонали на H такі, що $Lu_1,\ldots,Lu_m$ існують, а $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ – двічі диференційовна функція; тоді для функції $F(x)=f(u_1(x),\ldots,u_m(x))$ існує LF та має місце рівність

$$(LF)(x)=\sum_{i=1}^m f_i'(u_1(x),\ldots,u_m(x))\cdot(Lu_i)(x) \quad (1)$$

(у пристосуванні до позначень дійсної роботи). Аналогічний результат у різних функціональних класах для оператора Лапласа–Леві та його модифікацій отримано в [3–6]. Для лапласіана по гауссовій мірі має місце формула [7], яка відрізняється від (1). Суттєво нескінченновимірний еліптичний оператор, запропонований у [8] (див. також [9, 10]), узагальнює оператор Лапласа–Леві та наслідує його специфічні властивості.

Постановка задачі

Мета роботи – отримати правила дії суттєво нескінченновимірного еліптичного оператора на складені функції $f(x,u(x))$ та $f(x,u_1(x),\ldots,u_m(x))$.

Попередні відомості

Нехай H – нескінченновимірний сепарабельний дійсний гільбертів простір, $C^b(H)$ – банахів простір неперервних обмежених функцій на H з нормою $\sup_{x\in H}|u(x)|$, $B_R=$ $=\{x\in H\,|\,\|x\|\le R\}$ – фіксована куля радіуса $R>0$, $B_C(H)$ – банахів (відносно операторної норми) простір самоспряжених обмежених лінійних операторів на H. Нехай j — невід'ємний ненульовий лінійний функціонал на $B_C(H)$, ядру якого належать всі оператори скінченного рангу; такий функціонал згідно з [8] називаємо суттєво нескінченновимірним. Множину $D \subset B_C(H)$ називаємо майже компактною, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існують компактна множина $K \subset B_C(H)$ та числа $n \in \mathbb{N}$, $d > 0$ такі, що $K + Q_{n,d}$ є ε-сіткою для D (тут $Q_{n,d} \subset B_C(H)$ — множина операторів, ранг яких не перевищує n, а норма не перевищує d).

Z_R позначимо множину всіх дійсних функцій класу $C^2(H)$, носії яких належать кулі B_R, u'' рівномірно неперервна на H, а множина $\{u''(x) | x \in B_R\}$ є майже компактною. Z_R є дійсною комутативною алгеброю відносно поточкових операцій, а X_R — замикання Z_R у $C^b(H)$ — є банаховою алгеброю без одиниці. Суттєво нескінченновимірний еліптичний оператор $L : X_R \supset Z_R \to X_R$ задається формулою $(Lu)(x) = \frac{1}{2} j(u''(x))$ [8]. Він є лейбніцівським та допускає замикання $\bar{L}$, визначене на $D(\bar{L})$. Мають місце такі властивості, які узгоджуються з (1):

$$(f \in C^2(\mathbb{R}), f(0) = 0, u \in Z_R) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (f \circ u \in Z_R, L(f \circ u) = (f' \circ u) \cdot Lu), \qquad (2)$$

$$(f \in C^1(\mathbb{R}), f(0) = 0, u \in D(\bar{L})) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (f \circ u \in D(\bar{L}), \bar{L}(f \circ u) = (f' \circ u) \cdot \bar{L}u). \qquad (3)$$

$\bar{L}$ генерує (C_0)-півгрупу стиску $T(t)$ у X_R, нільпотентну ($\exists t_0 > 0 : T(t_0) = 0$) та мультиплікативну ($\forall u, v \in X_R : T(t)(uv) = T(t)u \cdot T(t)v$) [9]. При цьому $T(t)u \in Z_R$ для $u \in Z_R$, а для функції $f \in C(\mathbb{R})$ такої, що $f(0) = 0$, та $u \in X_R$ виконується рівність $T(t)(f \circ u) = f \circ T(t)u$, зокрема $T(t)(|u|) = |T(t)u|$. Рівняння $\bar{L}u = v$, $v \in X_R$, має і до того ж єдиний розв'язок $u(x) = -\int_0^{t_0} (T(t)v)(x)dt$. Отже, оператор $\bar{L}$ має обернений $\bar{L}^{-1} : v(x) \mapsto -\int_0^{t_0} (T(t)v)(x)dt$, норма якого $\| \bar{L}^{-1} \| \le t_0$, при цьому $\bar{L}^{-1} v \in Z_R$ для $v \in Z_R$.

Згідно з [10] вважаємо, що поверхня S в H належить класу Y, якщо її можна записати у вигляді $S = \{x \in H | g(x) = 1\}$, де $g \in Z_R$, $\inf_{x \in S} \| g'(x) \| > 0$. Згідно з [10] відкриту обмежену область $G = \{x \in H | g(x) > 1, g \in Z_R\} \subset H$ з межею S класу Y будемо називати L-опуклою, якщо $(Lg)(x) < -\alpha < 0$ для всіх $x \in S$ та деякого $\alpha > 0$. З наведених означень випливає, що $\bar{G} \subset \{x \in H | \|x\| < R\}$, тому R виберемо достатньо великим. $C^b(G)$ позначимо банахів простір неперервних обмежених функцій на G із sup-нормою.

Множину $Z(G)$ дійсних функцій класу $C^2(G)$, для яких u'' рівномірно неперервна на G, а множина $\{u''(x) | x \in G\}$ є майже компактною, замкнемо в $C^b(G)$; отримане замикання $X(G)$ є банаховою алгеброю з одиницею. Оператор $L_G : Z(G) \ni u(x) \mapsto \frac{1}{2} j(u''(x)) \in X(G)$ коректно визначений, лейбніцівський та допускає замикання $\bar{L}_G$, визначене на $D(\bar{L}_G)$ [10]. При цьому $(u \in Z_R) \Rightarrow (u|_G \in Z(G), L_G(u|_G) = (Lu)|_G)$, а також мають місце такі властивості, аналогічні властивостям (2), (3):

$$(f \in C^2(\mathbb{R}), u \in Z(G)) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (f \circ u \in Z(G), L_G(f \circ u) = (f' \circ u) \cdot L_G u), \qquad (4)$$

$$(f \in C^1(\mathbb{R}), u \in D(\bar{L}_G)) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (f \circ u \in D(\bar{L}_G), \bar{L}_G(f \circ u) = (f' \circ u) \cdot \bar{L}_G u). \qquad (5)$$

Належність функції $f(x, u(x))$ до алгебр X_R та $X(G)$ досліджена в [11], належність $f(x, u_1(x), \dots, u_m(x))$ до алгебри X_R — в [12] (належність складеної функції іншого типу див. у [9]).

Дія операторів $\bar{L}$ і $\bar{L}_G$ на функції вигляду $f(x, u(x))$

Будемо казати, що функція $g : H \times [a; b] \to \to \mathbb{R}$ така, що для довільного $p \in [a; b]$ $g(\cdot, p) \in$

$\in C^b(H)$, є неперервною за другим аргументом рівномірно на $H\times[a;b]$, якщо виконується умова $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ (|p-p_0|<\delta)\Rightarrow(\|g(\cdot,p)-g(\cdot,p_0)\|<\varepsilon)$. Доведемо аналоги класичного факту про існування та рівність других змішаних похідних.

Твердження 1. Нехай $f: H\times[a;b]\to\mathbb{R}$ має такі властивості:

а) $f(x,p)$ диференційовна по p;

б) для довільного $p\in[a;b]$ $f(\cdot,p)\in D(\bar{L})$, $f'_p(\cdot,p)\in D(\bar{L})$;

в) $\bar{L}f'_p$ неперервна за другим аргументом рівномірно на $H\times[a;b]$.

Тоді f'_p і f неперервні за другим аргументом рівномірно на $H\times[a;b]$, $\frac{\partial}{\partial p}(\bar{L}f)$ існує та має місце рівність

$$\frac{\partial}{\partial p}(\bar{L}f)(\cdot,p)=(\bar{L}f'_p)(\cdot,p). \qquad (6)$$

Доведення. З $\|\bar{L}^{-1}\|\le t_0$ та $f'_p(\cdot,p)=(\bar{L}^{-1}\bar{L}f'_p)(\cdot,p)$ випливає неперервність f'_p за другим аргументом рівномірно на $H\times[a;b]$. $\|f(\cdot,p)-f(\cdot,p_0)\|\le|p-p_0|\cdot\sup_{0\le q\le 1}\|f'_p(\cdot,qp+(1-q)p_0)\|$ за теоремою про середнє значення (див., наприклад, [13, теорема 8.5.4]), тому f також неперервна за другим аргументом рівномірно на $H\times[a;b]$. Функція f диференційовна по p: $f(x,p+\Delta p)=f(x,p)+f'_p(x,p)\Delta p+o_{x,p}(\Delta p)$, і до того ж $o_{\cdot,p}(\Delta p)=f(\cdot,p+\Delta p)-f(\cdot,p)-f'_p(\cdot,p)\Delta p\in X_R$ та має місце умова: $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:(|\Delta p|<\delta)\Rightarrow(\|o_{\cdot,p}(\Delta p)\|<\varepsilon)$. Застосування $T(t)$ до обох частин рівності доводить диференційовність $T(t)f$ по p та рівність $\frac{\partial}{\partial p}(T(t)f)(\cdot,p)=(T(t)f'_p)(\cdot,p)$.

Розглянемо вираз $W=(T(t)f)(\cdot,p+\Delta p)-(T(t)f)(\cdot,p)-f(\cdot,p+\Delta p)+f(\cdot,p)$, де $p+\Delta p\in[a;b]$. Для функції $q\mapsto(T(t)f)(\cdot,p+q\Delta p)-f(\cdot,p+q\Delta p)-(\bar{L}f'_p)(\cdot,p)tq\Delta p$ на [0;1] використаємо теорему про середнє значення:

$$\|W-(\bar{L}f'_p)(\cdot,p)t\Delta p\|\le$$
$$\le|\Delta p|\sup_{0\le q\le 1}\|(T(t)f'_p)(\cdot,p+q\Delta p)-$$
$$-f'_p(\cdot,p+q\Delta p)-(\bar{L}f'_p)(\cdot,p)t\|\le|\Delta p|\times$$
$$\times\sup_{0\le q\le 1}\|\int_0^t((T(s)\bar{L}f'_p)(\cdot,p+q\Delta p)-$$
$$-(\bar{L}f'_p)(\cdot,p))ds\|\le t|\Delta p|\sup_{0\le q\le 1}\|(\bar{L}f'_p)(\cdot,$$
$$p+q\Delta p)-(\bar{L}f'_p)(\cdot,p)\|+$$
$$+t|\Delta p|\sup_{0\le\xi\le t,\,0\le q\le 1}\|(T(\xi)\bar{L}f'_p)(\cdot,p+q\Delta p)-$$
$$-(T(0)\bar{L}f'_p)(\cdot,p+q\Delta p)\|.$$

З умови (в), оскільки $T(t)$ є (C_0)-півгрупою, маємо $A=\lim_{t\to0,\,\Delta p\to0}\frac{W}{t\Delta p}=(\bar{L}f'_p)(\cdot,p)$. Також існує границя $A_1=\lim_{t\to0}\frac{W}{t\Delta p}=\frac{1}{\Delta p}(\bar{L}f)(\cdot,p+\Delta p)-\frac{1}{\Delta p}(\bar{L}f)(\cdot,p)$. За теоремою 8.6.2 [13], оскільки $T(t)$ є півгрупою стиску, маємо

$$\|W-((T(t)f'_p)(\cdot,p)-f'_p(\cdot,p))\Delta p\|\le\|(T(t)f)(\cdot,$$
$$p+\Delta p)-(T(t)f)(\cdot,p)-(T(t)f'_p)(\cdot,p)\Delta p\|+$$
$$+\|f(\cdot,p+\Delta p)-f(\cdot,p)-f'_p(\cdot,p)\Delta p\|\le$$
$$\le 2|\Delta p|\sup_{0\le q\le 1}\|f'_p(\cdot,p+q\Delta p)-f'_p(\cdot,p)\|,$$

тому існує границя

$$A_2=\lim_{\Delta p\to0}\frac{W}{t\Delta p}=\frac{(T(t)f'_p)(\cdot,p)-f'_p(\cdot,p)}{t}.$$

З існування границь A, A_1 і A_2 випливає існування границі $\lim_{\Delta p\to0}\lim_{t\to0}\frac{W}{t\Delta p}=\frac{\partial}{\partial p}(\bar{L}f)(\cdot,p)$ та рівність (6).

Твердження 2. Нехай $f: H\times[a;b]\to\mathbb{R}$ має такі властивості:

а) для довільного $p\in[a;b]$ $f(\cdot,p)\in D(\bar{L})$, $\bar{L}f$ диференційовна по p та $\frac{\partial}{\partial p}(\bar{L}f)(\cdot,p)\in X_R$;

б) $\frac{\partial}{\partial p}(\bar{L}f)$ неперервна за другим аргументом рівномірно на $H\times[a;b]$.

Тоді $f(x,p)$ диференційовна по p, для довільного $p\in[a;b]$ $f'_p(\cdot,p)\in D(\bar{L})$, f'_p і f неперервні за другим аргументом рівномірно на $H\times[a;b]$ та має місце рівність (6).

Д о в е д е н н я. Функція $\bar{L}f$ диференційовна по p, тому, як і в твердженні 1, рівність $((T(t)\bar{L}f)(\cdot,p+\Delta p))(x)=((T(t)\bar{L}f)(\cdot,p))(x)+$ $+T(t)\left(\frac{\partial}{\partial p}((\bar{L}f)(\cdot,p))(x)\right)\Delta p+T(t)(o_{x,p}(\Delta p))$ доводить диференційовність $T(t)\bar{L}f$ по p та рівність $\frac{\partial}{\partial p}(T(t)\bar{L}f)=T(t)\left(\frac{\partial}{\partial p}(\bar{L}f)\right)$. Подальше інтегрування на $[0;t_0]$ та спрощення приводить до диференційовності f по p, факту $f'_p(\cdot,p)=$ $=\bar{L}^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial p}(\bar{L}f)(\cdot,p)\right)\in X_R$ та оцінки $\|f'_p(\cdot,p)-$ $-f'_p(\cdot,p_0)\|\le t_0\left\|\frac{\partial}{\partial p}(\bar{L}f)(\cdot,p)-\frac{\partial}{\partial p}(\bar{L}f)(\cdot,p_0)\right\|$, з якої випливає неперервність f'_p за другим аргументом рівномірно на $H\times[a;b]$. Неперервність f за другим аргументом рівномірно на $H\times[a;b]$ доводиться так само, як у твердженні 1. Для $W=(T(t)f)(\cdot,p+\Delta p)-(T(t)f)(\cdot,p)-f(\cdot,p+$ $+\Delta p)+f(\cdot,p)$, де $p+\Delta p\in[a;b]$, послідовне застосування теореми про середнє значення до функції $t\mapsto(T(t)f)(\cdot,p+\Delta p)-(T(t)f)(\cdot,p)-$ $-\frac{\partial}{\partial p}(\bar{L}f)(\cdot,p)t\Delta p$ на відрізку $[0;t]$ і теореми 8.6.2 [13] приводить до оцінки

$$\left\|W-\frac{\partial}{\partial p}(\bar{L}f)(\cdot,p)t\Delta p\right\|\le$$

$$\le t|\Delta p|\sup_{0\le\xi\le t,0\le q\le 1}\left\|T(\xi)\left(\frac{\partial}{\partial p}(\bar{L}f)(\cdot,p+q\Delta p)\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial}{\partial p}(\bar{L}f)(\cdot,p)\right\|\le t|\Delta p|\times$$

$$\times\sup_{0\le\xi\le t,\,0\le q\le 1}\left\|T(\xi)\left(\frac{\partial}{\partial p}(\bar{L}f)(\cdot,p+q\Delta p)\right)-\right.$$

$$\left.-T(0)\left(\frac{\partial}{\partial p}(\bar{L}f)(\cdot,p+q\Delta p)\right)\right\|+t|\Delta p|\times$$

$$\times\sup_{0\le q\le 1}\left\|\frac{\partial}{\partial p}(\bar{L}f)(\cdot,p+q\Delta p)-\frac{\partial}{\partial p}(\bar{L}f)(\cdot,p)\right\|.$$

Звідси існує $\lim\limits_{t\to 0,\,\Delta p\to 0}\frac{W}{t\Delta p}=\frac{\partial}{\partial p}(\bar{L}f)(\cdot,p)$. Також існують границі A_1 та A_2 твердження 1. З існування вказаних границь випливає існування границі $\lim\limits_{t\to 0}\lim\limits_{\Delta p\to 0}\frac{W}{t\Delta p}=(\bar{L}f'_p)(\cdot,p)$ та рівність (6).

***Зауваження* 1.** За умов тверджень 1 та 2 на G має місце рівність $\frac{\partial}{\partial p}(\bar{L}_G f)(\cdot,p)=$ $=(\bar{L}_G f'_p)(\cdot,p)$, яка аналогічна рівності (6).

Теорема 1. Нехай $u\in D(\bar{L})$, $[a;b]=$ $=[\inf_H u;\sup_H u]$, функція $f:H\times[a;b]\to\mathbb{R}$ задовольняє або умови твердження 1, або умови твердження 2. Тоді $F(x)=f(x,u(x))\in D(\bar{L})$ та $(\bar{L}F)(x)=((\bar{L}f)(\cdot,p))(x)|_{p=u(x)}+f'_p(x,u(x))\cdot(\bar{L}u)(x)$.

Д о в е д е н н я. *Крок* 1. Функції алгебри X_R мають обмежений носій, тому $0\in[a;b]$. Приєднаємо до X_R одиницю, тобто будемо розглядати алгебру функцій $X_R\dotplus\{1\}=\{c\cdot 1+u|c\in\mathbb{R},$ $u\in X_R\}$. За умов теореми виконується рівність (6) та функція $p\mapsto(\bar{L}f'_p)(\cdot,p)$ належить до $C([a;b];X_R\dotplus\{1\})$. Сформулюємо таку лему (див. [11]).

Лема 1 (узагальнена теорема Стоуна–Вейєрштрасса). Нехай $\mathcal{F}(Q)$ – банахова алгебра всіх обмежених дійсних функцій на довільній множині Q відносно поточкових операцій з sup-нормою; $Y\subset\mathcal{F}(Q)$ – замкнена підалгебра, $1\in Y$; T – хаусдорфів компакт; $C(T;Y)$ – алгебра всіх неперервних функцій на T зі значеннями в Y; $W\subset C(T;Y)$ – підалгебра, що містить тотожно одиничну функцію та поділяє точки: для будь-яких $t_1,t_2\in T$ існує $g\in W$ така, для якої $g(t_1)-g(t_2)$ – оборотний елемент в Y. Тоді W щільна в $C(T;Y)$.

Продовжимо доведення теореми. Виберемо $\varepsilon>0$. За лемою 1 наблизимо функцію $p\mapsto$ $\mapsto(\bar{L}f'_p)(\cdot,p)$ многочленом $\sup_{x\in H}\left|((\bar{L}f'_p)(\cdot,p))(x)-\right.$ $\left.-\sum_{k=0}^{n}\hat{\hat{h}}_k(x)p^k\right|\le\varepsilon$, де $\hat{\hat{h}}_k=c_k\cdot 1+\hat{h}_k\in X_R\dotplus\{1\}$, $c_k\in\mathbb{R}$, $\hat{h}_k\in X_R$. Підстановкою $p=0$ отримуємо $\sup\limits_{x\in H}|((\bar{L}f'_p)(\cdot,0))(x)-\hat{\hat{h}}_0(x)|\le\varepsilon$, $\sup\limits_{x\in H}|((\bar{L}f'_p)(\cdot,p))(x)-$ $-((\bar{L}f'_p)(\cdot,0))(x)-\sum_{k=1}^{n}\hat{\hat{h}}_k(x)p^k|\le 2\varepsilon$. Підстановкою $x\notin B_R$ у наведену оцінку отримуємо $|\sum_{k=1}^{n}c_k p^k|\le 2\varepsilon$. За умов теореми $f'_p(\cdot,0)\in$ $\in D(\bar{L})$, тому існує послідовність $\{y_m\}\subset Z_R$

така, що $y_m \to f'_p(\cdot,0)$, $Ly_m \to (\bar{L}f'_p)(\cdot,0)$ при $m \to \infty$. Виберемо m таке, що $\|y_m - f'_p(\cdot,0)\| < \varepsilon$, $\|Ly_m - (\bar{L}f'_p)(\cdot,0)\| < \varepsilon$, позначимо $h_0 = Ly_m \in X_R$, $g_2^0 = y_m \in Z_R$. Тому $g_2^0 = \bar{L}^{-1}h_0$. Для кожної з функцій $\hat{h}_k \in X_R$, $k \ge 1$ виберемо функцію $h_k \in Z_R$ таку, що $\|\hat{h}_k - h_k\| < \dfrac{\varepsilon}{n\max(|a|^k,|b|^k)}$; знаменник не перетворюється на нуль, оскільки випадок $u \equiv 0$ тривіальний. Тоді функцію $p \mapsto (\bar{L}f'_p)(\cdot,p)$ наближуємо многочленом $g_1(x,p) = \sum_{k=0}^n h_k(x)p^k$: $\sup_{x\in H}|((\bar{L}f'_p)(\cdot,p))(x) - g_1(x,p)| < 6\varepsilon$. X_R є алгеброю, тому $g_1(\cdot,v(\cdot)) \in X_R$ для $v \in X_R$.

Крок 2. Функцію $p \mapsto f'_p(\cdot,p)$ наближуємо многочленом $g_2(x,p) = ((\bar{L}^{-1}g_1)(\cdot,p))(x) = \sum_{k=0}^n (\bar{L}^{-1}h_k)(x)p^k$. Дійсно, враховуючи крок 1, з рівності $f'_p(\cdot,p) = (\bar{L}^{-1}\bar{L}f'_p)(\cdot,p)$ та оцінки $\|\bar{L}^{-1}\| \le t_0$ маємо $\sup_{x\in H}|f'_p(x,p) - g_2(x,p)| \le t_0 \sup_{x\in H}|((\bar{L}f'_p)(\cdot,p))(x) - g_1(x,p)| < 6t_0\varepsilon$. Окрім того, $g_2(\cdot,v(\cdot)) \in Z_R$ для $v \in Z_R$, оскільки $g_2^0 \in Z_R$ (див. крок 1), з $h_k \in Z_R$, $k \ge 1$ випливає $\bar{L}^{-1}h_k \in Z_R$, а Z_R є алгеброю.

Крок 3. Функцію $p \mapsto (\bar{L}f)(\cdot,p)$ наближуємо многочленом $g_3(x,p) = g_3^0(x) + \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1}h_k(x)p^{k+1}$, який отримано інтегруванням многочлена $g_1(x,p)$ по p. Функцію $g_3^0(x)$ вибираємо таким чином. За умовою теореми $f(\cdot,0) \in D(\bar{L})$, тому існує послідовність $\{y_m\} \subset Z_R$ така, що $y_m \to f(\cdot,0)$, $Ly_m \to (\bar{L}f)(\cdot,0)$ при $m \to \infty$. Виберемо m таке, що $\|y_m - f(\cdot,0)\| < \varepsilon$, $\|Ly_m - (\bar{L}f)(\cdot,0)\| < \varepsilon$, позначимо $g_3^0 = Ly_m \in X_R$, $g_4^0 = y_m \in Z_R$. Тому $g_4^0 = \bar{L}^{-1}g_3^0$. Використаємо теорему про середнє значення, рівність (6) та результат кроку 1:

$$\sup_{x\in H}|((\bar{L}f)(\cdot,p))(x) - g_3(x,p)| = \sup_{x\in H}|((\bar{L}f)(\cdot,p))(x) - g_3^0(x) - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1}h_k(x)p^{k+1}| \le$$

$$\le \sup_{x\in H}\left|\left(((\bar{L}f)(\cdot,p))(x) - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1}h_k(x)p^{k+1}\right) - \left(((\bar{L}f)(\cdot,0))(x) - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1}h_k(x)\cdot 0^{k+1}\right)\right| +$$

$$+ \sup_{x\in H}|((\bar{L}f)(\cdot,0))(x) - g_3^0(x)| <$$

$$< |p-0| \sup_{x\in H,\,0\le q\le 1}\left|\frac{\partial}{\partial p}((\bar{L}f)(\cdot,qp))(x) - \sum_{k=0}^n h_k(x)(qp)^k\right| + \varepsilon < (6\max(|a|,|b|)+1)\varepsilon.$$

Аналогічним чином отримуємо оцінку $\|(\bar{L}f)(\cdot,p) - (\bar{L}f)(\cdot,p_0)\| \le |p-p_0| \sup_{0\le q\le 1}\|(\bar{L}f'_p)(\cdot,qp+(1-q)p_0)\|$, яка за умов теореми доводить неперервність $\bar{L}f$ за другим аргументом рівномірно на $H\times[a;b]$. Окрім того, $g_3(\cdot,v(\cdot)) \in X_R$ для $v \in X_R$. Дійсно, $h_0 \in X_R$ (див. крок 1), $g_3^0 \in X_R$, а X_R є банаховою алгеброю.

Крок 4. Функцію $p \mapsto f(\cdot,p)$ наближуємо многочленом

$$g_4(x,p) = g_4^0(x) + \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1}(\bar{L}^{-1}h_k)(x)p^{k+1} =$$

$$= (\bar{L}^{-1}g_3^0)(x) + \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1}(\bar{L}^{-1}h_k)(x)p^{k+1},$$

який є результатом застосування оператора $\bar{L}^{-1}$ до многочлена $g_3(x,p)$, а функцію g_4^0 було вибрано на кроці 3. Дійсно, з рівності $f(\cdot,p) = (\bar{L}^{-1}\bar{L}f)(\cdot,p)$, оцінки $\|\bar{L}^{-1}\| \le t_0$ та результату кроку 3 маємо

$$\sup_{x\in H}|f(x,p) - g_4(x,p)| =$$

$$= \sup_{x\in H}\left|((\bar{L}^{-1}\bar{L}f)(\cdot,p))(x) - (\bar{L}^{-1}g_3^0)(x) - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1}(\bar{L}^{-1}h_k)(x)p^{k+1}\right| <$$

$$< t_0(6\max(|a|,|b|)+1)\varepsilon.$$

Аналогічним чином отримуємо оцінку $\|f(\cdot,p) - f(\cdot,p_0)\| \le t_0\|(\bar{L}f)(\cdot,p) - (\bar{L}f)(\cdot,p_0)\|$, яка разом із неперервністю $\bar{L}f$ за другим аргументом рівномірно на $H\times[a;b]$ (див. крок 3) доводить неперервність f за другим аргументом рівномірно на $H\times[a;b]$. Окрім того, $g_4(\cdot,v(\cdot))\in \in Z_R$ для $v\in Z_R$. Дійсно, $g_4^0\in Z_R$ (див. крок 3), $g_2^0\in Z_R$ (див. крок 1), з $h_k\in Z_R$, $k\ge 1$ випливає $\bar{L}^{-1}h_k\in Z_R$, а Z_R є алгеброю.

Крок 5. Для $u\in D(\bar{L})$ виберемо послідовність $\{u_m\}\subset Z_R$ таку, що $u_m\to u$, $Lu_m\to \bar{L}u$ при $m\to\infty$; починаючи з деякого m $[a;b]\supset \supset[\inf_H u_m;\sup_H u_m]$. З урахуванням кроку 4 та неперервності f за другим аргументом рівномірно на $H\times[a;b]$ маємо

$$g_4(x,u_m(x))=(g_4(x,u_m(x))-f(x,u_m(x)))+ \\ +f(x,u_m(x))\rightrightarrows f(x,u(x)) \quad (7)$$

при $\varepsilon\to 0$. Згідно з кроком 4, $g_4(\cdot,u_m(\cdot))\in Z_R$, тому $(Lg_4)(\cdot,u_m(\cdot))$ існує. З лейбніцівської властивості оператора L та рівності $L(u_m^{k+1})= =(k+1)u_m^k\cdot Lu_m$ (див. (2)) маємо

$$((Lg_4)(\cdot,u_m(\cdot)))(x)=$$
$$=L\left(g_4^0(x)+\sum_{k=0}^n\frac{1}{k+1}(\bar{L}^{-1}h_k)(x)u_m^{k+1}(x)\right)=$$
$$=g_3^0(x)+\sum_{k=0}^n\frac{1}{k+1}h_k(x)u_m^{k+1}(x)+$$
$$+(\sum_{k=0}^n(\bar{L}^{-1}h_k)(x)u_m^k(x))(Lu_m)(x)=$$
$$=g_3(x,u_m(x))+g_2(x,u_m(x))\cdot(Lu_m)(x)=$$
$$=(g_3(x,u_m(x))-((\bar{L}f)(\cdot,p))(x)|_{p=u_m(x)})+$$
$$+((\bar{L}f)(\cdot,p))(x)|_{p=u_m(x)}+$$
$$+(g_2(x,u_m(x))-f_p'(x,u_m(x)))\cdot(Lu_m)(x)+$$
$$+f_p'(x,u_m(x))\cdot(Lu_m)(x)\rightrightarrows$$
$$\rightrightarrows((\bar{L}f)(\cdot,p))(x)|_{p=u(x)}+f_p'(x,u(x))\cdot(\bar{L}u)(x) \quad (8)$$

при $\varepsilon\to 0$. Збіжності (7), (8) та замкненість оператора $\bar{L}$ доводять теорему.

***Зауваження* 2.** Пояснимо, чому на кроці 1 доведення теореми 1 процедура наближення функції $p\mapsto(\bar{L}f_p')(\cdot,p)$ многочленом $g_1(x,p)$ ускладнена порівняно з процедурою наближення функції многочленом у наслідку 1 [11]. По-перше, многочлени $g_2(x,p)$ та $g_4(x,p)$ потребують використання півгрупи $T(t)$, а півгрупа діє в X_R, тому застосувати її до функцій $\hat{\hat{h}}_k\in X_R\dotplus\{1\}$, $k\ge 0$, не можна; оцінка $|\sum_{k=1}^n c_k p^k|\le 2\varepsilon$ дала змогу перейти до $\hat{h}_k\in X_R$. По-друге, вибір функцій h_k, $k\ge 0$ дав можливість на кроці 5 отримати належність $g_4(\cdot,u_m(\cdot))\in Z_R=D(L)$.

***Наслідок* 1.** Нехай поверхня S належить класу Y, $u\in D(\bar{L}_G)$, $[a;b]=[\inf_G u;\sup_G u]$, функція $f\colon H\times[a;b]\to\mathbb{R}$ задовольняє умови теореми 1. Тоді $F(x)=f(x,u(x))|_G\in D(\bar{L}_G)$ та

$$(\bar{L}_GF)(x)=((\bar{L}_Gf)(\cdot,p))(x)|_{p=u(x)}+$$
$$+f_p'(x,u(x))\cdot(\bar{L}_Gu)(x),$$
$$x\in G.$$

Доведення. Кроки 1–4 повторюють кроки 1–4 доведення теореми 1; наведемо відмінності у кроці 5. Для $u\in D(\bar{L}_G)$ виберемо послідовність $\{u_m\}\subset Z(G)$ таку, що $u_m\to u$, $L_Gu_m\to\bar{L}_Gu$ при $m\to\infty$, починаючи з деякого m $[a;b]\supset[\inf_G u_m;\sup_G u_m]$. Збіжність (7) при $\varepsilon\to 0$ має місце тільки на G, а не на всьому H. З належності $u_m\in Z(G)$ маємо $g_4(\cdot,u_m(\cdot))|_G\in \in Z(G)$. Для обчислення $(L_Gg_4)(\cdot,u_m(\cdot))$ використовуються властивість (4) та рівність

$$L_G\left(g_4^0(x)+\sum_{k=0}^n\frac{1}{k+1}(\bar{L}^{-1}h_k)(x)u_m^{k+1}(x)\right)=$$
$$=(L_G(g_4^0|_G))(x)+$$
$$+\sum_{k=0}^n\frac{1}{k+1}(L_G((\bar{L}^{-1}h_k)|_G))(x)\cdot u_m^{k+1}(x)+$$
$$+(\sum_{k=0}^n(\bar{L}^{-1}h_k)(x)u_m^k(x))\cdot(L_Gu_m)(x),$$
$$x\in G,$$

із подальшим використанням рівностей $L_G(g_4^0|_G)=(Lg_4^0)|_G=g_3^0|_G$, $L_G((\bar{L}^{-1}h_k)|_G)= =(L\bar{L}^{-1}h_k)|_G=h_k|_G$, $k\ge 0$.

Вкажемо на два з можливих прикладів застосування наслідка 1. У [11, 14, 15] обчислювались функції $\bar{L}_GF_1$ та $\bar{L}_GF_2$ для

$$F_1(x)=\left(-\int_0^{\theta(x)}(T(t)\bar{f})(x)dt\right)\Bigg|_G,$$

$$F_2(x)=\left(-\int_0^{\theta(x)}\exp\left(\int_0^t (T(s)\bar{a})(x)\,ds\right)(T(t)\bar{f})(x)\,dt\right)\Bigg|_G,$$

де $\bar{f},\bar{a}\in D(\bar{L})$, θ — фундаментальна функція області G, запропонована в [10] (детальніше див. [11, 14, 15]). Наслідок 1 дає змогу обчислити $\bar{L}_G F_1$ та $\bar{L}_G F_2$, якщо для F_1 вибрати як p верхню межу інтеграла, а для F_2 — верхню межу зовнішнього інтеграла (перевірити виконання умови наслідка 1 нескладно).

Дія оператора $\bar{L}$ на функції вигляду $f(x,u_1(x),\ldots,u_m(x))$

У $\mathbb{R}^m$ виберемо норму $\|\mathbf{p}\|=|p^1|+\ldots+|p^m|$, інші норми еквівалентні цій. Нехай $T\subset\mathbb{R}^n$ — компакт. Будемо казати, що функція $g:H\times T\to\mathbb{R}$ така, що для довільного $\mathbf{p}\in T$ $g(\cdot,\mathbf{p})\in C^b(H)$, є неперервною за другим аргументом рівномірно на $H\times T$, якщо виконується умова $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ (\|\mathbf{p}-\mathbf{p}_0\|<\delta)\Rightarrow(\|g(\cdot,\mathbf{p})-g(\cdot,\mathbf{p}_0)\|<\varepsilon)$.

Теорема 2. Нехай $u_1,\ldots,u_m\in D(\bar{L})$, $[a_i;b_i]=[\inf_H u_i;\sup_H u_i]$ для $i=1,\ldots,m$, $T=[a_1;b_1]\times\ldots\times[a_m;b_m]$. Нехай функція $f:H\times T\to\mathbb{R}$ має такі властивості:

а) $f(x,\mathbf{p})$ двічі диференційовна по $\mathbf{p}$;

б) для довільного $\mathbf{p}\in T$ $f(\cdot,\mathbf{p})\in D(\bar{L})$, для довільних $i,j=1,\ldots,m$ $f'_{p^i}(\cdot,\mathbf{p})\in D(\bar{L})$, $f''_{p^ip^j}(\cdot,\mathbf{p})\in X_R$;

в) для довільних $i,j=1,\ldots,m$ функції $\bar{L}f'_{p^i}$, $f''_{p^ip^j}$ неперервні за другим аргументом рівномірно на $H\times T$.

Тоді $F(x)=f(x,(u_1(x),\ldots,u_m(x)))\in D(\bar{L})$ та

$$(\bar{L}F)(x)=((\bar{L}f)(\cdot,\mathbf{p}))(x)\big|_{p^1=u_1(x),\ldots,p^m=u_m(x)}+\sum_{i=1}^m f'_{p^i}(x,(u_1(x),\ldots,u_m(x)))\cdot(\bar{L}u_i)(x).$$

Доведення. Теорема доводиться індукцією по m. Базу $m=1$ доводить теорема 1. На кроці $m=k+1$ для функції $\hat{F}(x,q)=f(x,(u_1(x),\ldots,u_k(x),q))$ перевіряються умови твердження 2 (перевірка громіздка, але ідейно проста). Для цього використовується оцінка

$$\left|\frac{\partial}{\partial q}((\bar{L}\hat{F})(\cdot,q))(x)-\frac{\partial}{\partial q}((\bar{L}\hat{F})(\cdot,q_0))(x)\right|\le$$
$$\le\sum_{i=1}^k|f''_{p^ip^{k+1}}(x,(u_1(x),\ldots,u_k(x),q))-$$
$$-f''_{p^ip^{k+1}}(x,(u_1(x),\ldots,u_k(x),q_0))|\times$$
$$\times|(\bar{L}u_i)(x)|+$$
$$+|((\bar{L}f'_{p^{k+1}})(\cdot,\mathbf{s}))(x)|_{s^1=u_1(x),\ldots,s^k=u_k(x),s^{k+1}=q}-$$
$$-((\bar{L}f'_{p^{k+1}})(\cdot,\mathbf{s}_0))(x)|_{s_0^1=u_1(x),\ldots,s_0^k=u_k(x),s_0^{k+1}=q_0}|$$

та наведений нижче факт, доведений під час доведення теореми 2 [12].

Лема 2. Нехай $T_1\subset\mathbb{R}^s$ — компакт, а функція $f:H\times T_1\to\mathbb{R}$ така, що для довільного $\mathbf{p}\in\mathbb{R}^s$ $f(\cdot,\mathbf{p})\in X_R$ та f неперервна за другим аргументом рівномірно на $H\times T_1$. Тоді $f(\cdot,(v_1(\cdot),\ldots,v_n(\cdot)))\in X_R$ для $v_1\in X_R,\ldots,v_n\in X_R$.

За теоремою 1 $\hat{F}(x,u_{k+1}(x))\in D(\bar{L})$,

$$((\bar{L}\hat{F})(\cdot,u_{k+1}(\cdot)))(x)=((\bar{L}\hat{F})(\cdot,q))(x)|_{q=u_{k+1}(x)}+\hat{F}'_q(x,u_{k+1}(x))\cdot(\bar{L}u_{k+1})(x);$$

посилання на припущення індукції доводить теорему.

***Наслідок* 2.** Теорема 2 має місце, якщо умови (б) і (в) замінити на такі:

б′) для довільного $\mathbf{p}\in T$ $f(\cdot,\mathbf{p})\in D(\bar{L})$, для довільних $i,j=1,\ldots,m$ $\bar{L}f$ диференційовна по p^i, $\frac{\partial}{\partial p^i}(\bar{L}f)(\cdot,\mathbf{p})\in X_R$, $f''_{p^ip^j}(\cdot,\mathbf{p})\in X_R$;

в′) для довільних $i,j=1,\ldots,m$ функції $\frac{\partial}{\partial p^i}(\bar{L}f)$, $f''_{p^ip^j}$ неперервні за другим аргументом рівномірно на $H\times T$.

Висновки

У роботі доведені правила дії суттєво нескінченновимірного еліптичного оператора на складені функції $f(x,u(x))$ та $f(x,u_1(x),\ldots,u_m(x))$. Отримані результати узагальнюють уже відомі результати (1), (3), (5), а також аналогічні класичному правилу диференціювання складеної функції. Вони можуть бути використані у подальших дослідженнях суттєво нескінченновимірних рівнянь.

Список літератури

1. *Леви П.* Конкретные проблемы функционального анализа. – М.: Наука, 1967. – 512 с.
2. *Feller M.N.* The Lévy Laplacian. – Cambridge: Cambridge University Press, 2005. – 153 p. (http://dx.doi.org/10.1017/CBO9780511543029).
3. *Полищук Е.М.* Линейные уравнения в функциональных лапласианах // Успехи мат. наук. – 1964. – **19**, вып. 2 (116). – С. 163–170.
4. *Шилов Г.Е.* О некоторых вопросах анализа в гильбертовом пространстве. I // Функц. анализ и его прил. – 1967. – **1**, вып. 2. – С. 81–90.
5. *Дорфман И.Я.* О средних и лапласиане функций на гильбертовом пространстве // Мат. сб. – 1970. – **81**, № 2. – С. 192–208.
6. *Сикирявый В.Я.* Оператор квазидифференцирования и связанные с ним краевые задачи // Труды Москов. мат. общества. – 1972. – **27**. – С. 195–246.
7. *Богданский Ю.В., Санжаревский Я.Ю.* Лапласиан по гауссовской мере и эргодическая теорема // Укр. мат. журн. – 2015. – **67**, № 10.
8. *Богданский Ю.В.* Задача Коши для параболических уравнений с существенно бесконечномерными эллиптическими операторами // Укр. мат. журн. – 1977. – **29**, № 6. – С. 781–784.
9. *Богданский Ю.В.* Задача Коши для уравнения теплопроводности с нерегулярным эллиптическим оператором // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 5. – С. 584–590.
10. *Богданский Ю.В.* Задача Дирихле для уравнения Пуассона с существенно бесконечномерным эллиптическим оператором // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 7. – С. 803–808.
11. *Богданський Ю.В., Статкевич В.М.* Нелінійні рівняння з суттєво нескінченновимірними диференціальними операторами // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, № 11. – С. 1571–1576.
12. *Статкевич В.М.* Системи суттєво нескінченновимірних диференціальних рівнянь // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 9. – С. 1257–1262.
13. *Дьедонне Ж.* Основы современного анализа. – М.: Мир, 1964. – 430 с.
14. *Статкевич В.М.* Об одной краевой задаче с существенно бесконечномерным оператором // Spectral and Evolution Problems. – Simferopol, 2010. – Vol. 20. – P. 189–192.
15. *Статкевич В.М.* Дослідження розв'язків крайових задач з суттєво нескінченновимірним еліптичним оператором // Укр. мат. журн. – 2012. – **64**, № 2. – С. 229–236.

References

1. P. Lévy, *Concrete Problems of Functional Analysis.* Moscow, USSR: Nauka, 1967, 512 p. (in Russian).
2. M.N. Feller, *The Lévy Laplacian.* Cambridge: Cambridge University Press, 2005 (http://dx.doi.org/10.1017/CBO9780511543029).
3. E.M. Polishchuk, "Linear equations in functional Laplacians", *Uspehi Matematicheskih Nauk.*, vol. 19, no. 2(116), pp. 163–170, 1964 (in Russian).
4. G.E. Shilov, "On some problems in analysis on a Hilbert space. I", *Funkcional'nyj Analiz i Ego Prilozhenija*, vol. 1, no. 2, pp. 81–90, 1967 (in Russian).
5. I.Ya. Dorfman, "On means and Laplacian of functions on a Hilbert space", *Matematicheskij Sbornik*, vol. 81, no. 2, pp. 192–208, 1970 (in Russian).
6. V.Ya. Sikiryavyi, "Operator of quasi-differentiation and connected with it boundary-value problems", *Trudy Moskovskogo Mat. Obshhestva.*, vol. 27, pp. 195–246, 1972 (in Russian).
7. Yu.V. Bogdansky and Ya.Yu. Sanzharevsky, "Laplacian with respect to a Gaussian measure and ergodic theorem", *Ukr. Mat. Zhurnal*, vol. 67, no. 10, 2015 (in Russian).
8. Yu.V. Bogdansky, "Cauchy problem for parabolic equations with essentially infinite-dimensional elliptic operators", *Ukr. Mat. Zhurnal*, vol. 29, no. 6, pp. 781–784, 1977 (in Russian).
9. Yu.V. Bogdansky, "Cauchy problem for heat equation with non-regular elliptic operator", *Ukr. Mat. Zhurnal*, vol. 41, no. 5, pp. 584–590, 1989 (in Russian).
10. Yu.V. Bogdansky, "Dirichlet problem for Poisson equation with essentially infinite-dimensional elliptic operator", *Ukr. Mat. Zhurnal*, vol. 46, no. 7, pp. 803–808, 1994 (in Russian).
11. Yu.V. Bogdansky and V.M. Statkevych, "Nonlinear equations with essentially infinite-dimensional differential operators", *Ukr. Mat. Zhurnal*, vol. 62, no. 11, pp. 1571–1576, 2010 (in Ukrainian).
12. V.M. Statkevych, "Systems of essentially infinite-dimensional differential equations", *Ukr. Mat. Zhurnal*, vol. 63, no. 9, pp. 1257–1262, 2011 (in Ukrainian).

13. J. Dieudonné, *Foundations of Modern Analysis*. Moscow, USSR: Mir, 1964, 430 p. (in Russian).
14. V.M. Statkevych, "On one boundary-value problem with essentially-infinite dimensional operator", *Spectral and Evolution Problems*, vol. 20, pp. 189–192, 2010 (in Russian).
15. V.M. Statkevych, "Investigation of solutions of boundary-value problems with essentially infinite-dimensional elliptic operator", *Ukr. Mat. Zhurnal*, vol. 64, no. 2, pp. 229–236, 2012 (in Ukrainian).

В.М. Статкевич

ЗАСТОСУВАННЯ СУТТЄВО НЕСКІНЧЕННОВИМІРНОГО ЕЛІПТИЧНОГО ОПЕРАТОРА ДО ФУНКЦІЙ $f(x,u(x))$ І $f(x,u_1(x),\dots,u_m(x))$

Проблематика. Для функцій на нескінченновимірному сепарабельному дійсному гільбертовому просторі H розглядається суттєво нескінченновимірний еліптичний оператор (типу Лапласа–Леві) $(Lu)(x)=\frac{1}{2}j(u''(x))$, запропонований Ю.В. Богданським (1977 р.). Такий оператор не має скінченновимірних аналогів. Він є диференціальним оператором другого порядку, але задовольняє лейбніцівську властивість та набуває нульового значення на циліндричних функціях. У роботах П. Леві, Є.М. Поліщука, Г.Є. Шилова, І.Я. Дорфман та В.Я. Сикирявого для оператора Лапласа–Леві та його модифікацій отримано формули диференціювання складених функціоналів $f(u_1(x),\dots,u_m(x))$. Для лапласіана по мірі у випадку гауссової міри Ю.В. Богданським та Я.Ю. Санжаревським отримано формулу, яка відрізняється від вказаних.

Мета дослідження. Мета роботи – отримати правила дії суттєво нескінченновимірного еліптичного оператора на складені функції $f(x,u(x))$ та $f(x,u_1(x),\dots,u_m(x))$.

Методика реалізації. У роботі використано методи теорії півгруп та узагальнену теорему Стоуна–Вейєрштрасса.

Результати дослідження. У роботі доведені правила дії суттєво нескінченновимірного еліптичного оператора на складені функції $f(x,u(x))$ та $f(x,u_1(x),\dots,u_m(x))$. Аналогічне правило доведено також для суттєво нескінченновимірного еліптичного оператора в обмежених L-опуклих областях простору H.

Висновки. Отримані результати узагальнюють відомі результати для оператора Лапласа–Леві та його модифікацій, а також аналогічні класичному правилу диференціювання складеної функції. Результати можуть бути використані у подальших дослідженнях суттєво нескінченновимірних рівнянь.

Ключові слова: нескінченновимірний простір; оператор Лапласа–Леві; суттєво нескінченновимірний еліптичний оператор; складена функція.

В.М. Статкевич

ПРИМЕНЕНИЕ СУЩЕСТВЕННО БЕСКОНЕЧНОМЕРНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА К ФУНКЦЯМ $f(x,u(x))$ И $f(x,u_1(x),\dots,u_m(x))$

Проблематика. Для функций на бесконечномерном сепарабельном вещественном гильбертовом пространстве H рассматривается существенно бесконечномерный эллиптический оператор (типа Лапласа–Леви) $(Lu)(x)=\frac{1}{2}j(u''(x))$, предложенный Ю.В. Богданским (1977 г.). Такой оператор не имеет конечномерных аналогов. Это дифференциальный оператор второго порядка, но он обладает лейбницевским свойством и обращается в нуль на цилиндрических функциях. В работах П. Леви, Е.М. Полищука, Г.Е. Шилова, И.Я. Дорфман и В.Я. Сикирявого для оператора Лапласа–Леви и его модификаций получены формулы дифференцирования сложных функционалов $f(u_1(x),\dots,u_m(x))$. Для лапласиана по мере в случае гауссовой меры Ю.В. Богданским и Я.Ю. Санжаревским получена формула, отличная от указанных.

Цель исследования. Цель исследования – получить правила действия существенно бесконечномерного эллиптического оператора на сложные функции $f(x,u(x))$ и $f(x,u_1(x),\dots,u_m(x))$.

Методика реализации. В работе использованы методы теории полугрупп и обобщенная теорема Стоуна–Вейерштрасса.

Результаты исследования. В работе доказаны правила действия существенно бесконечномерного эллиптического оператора на сложные функции $f(x,u(x))$ и $f(x,u_1(x),\dots,u_m(x))$. Аналогичное правило доказано также для существенно бесконечномерного эллиптического оператора в ограниченных L-выпуклых областях пространства H.

Выводы. Полученные результаты обобщают известные результаты для оператора Лапласа–Леви и его модификаций, а также аналогичны классическому правилу дифференцирования сложной функции. Результаты могут быть использованы в дальнейших исследованиях существенно бесконечномерных уравнений.

Ключевые слова: бесконечномерное пространство; оператор Лапласа–Леви; существенно бесконечномерный эллиптический оператор; сложная функция.

Рекомендована Радою
Навчально-наукового комплексу
"Інститут прикладного системного
аналізу" НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
26 вересня 2014 року