УДК 519.21
DOI: 10.20535/1810-0546.2016.4.72068

Ю.Є. Приходько
Національний технічний університет України "КПІ", Київ, Україна

МАЛІ ЗБУРЕННЯ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗІ СТЕПЕНЕВИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Background. Random perturbations of ordinary differential equations were considered by Bafico (1980), Bafico, Baldi (1982), Delarue, Flandoli (2014), Delarue, Flandoli, Vincenzi (2014), Krykun, Makhno (2013), Pilipenko, Proske (2015). Bafico, Baldi (1982) considered random perturbation of the differential equation that describes the Peano phenomenon. The coefficients of the initial differential equation are not Lipschitz continuous, so there may be no uniqueness of the solution. Then stochastic differential equation is considered instead of ordinary differential equation and the weak convergence of its solutions is proved.
Objective. The aim of this paper is to generalize the result of Bafico, Baldi (1982) to the case of stochastic differential equation $dX(t) = a(X(t))\,dt + \sigma(X(t))\,dW(t)$ with power coefficients.
Methods. Small random perturbations of the initial equation $dX(t) = a(X(t))\,dt + (\varepsilon + \sigma(X(t)))\,dW(t)$ are considered and the limit behaviour of its solutions is studied.
The methods used to prove the weak convergence of the solutions are based on the methods developed in Pilipenko, Prykhodko (2015 and 2016).
Results. The limit behaviour of the solutions of stochastic differential equations with perturbations is considered and the weak convergence of such solutions is proved.
Conclusions. The result of Bafico, Baldi (1982) is thus generalized to the case of stochastic differential equation with power coefficients.

Keywords: stochastic differential equations; stochastic differential equations with power coefficients; stochastic differential equations with perturbations; asymptotic behavior; Peano phenomena.

Вступ

Розглянемо стохастичне диференціальне рівняння

$$dX(t) = a(X(t))\,dt + \sigma(X(t))\,dW(t),\ t \ge 0, \qquad X(0) = 0, \tag{1}$$

де $W(\cdot)$ — вінерів процес,

$$a(x) = a_{\pm}\,|x|^{\alpha}\,\operatorname{sign} x = a_{+}\,|x|^{\alpha}\,1_{x\ge 0} - a_{-}\,|x|^{\alpha}\,1_{x<0},$$

$$\sigma(x) = b_{\pm}\,|x|^{\beta} = b_{+}\,|x|^{\beta}\,1_{x\ge 0} + b_{-}\,|x|^{\beta}\,1_{x<0}, \tag{2}$$

де $a_{\pm} > 0, b_{\pm} \ge 0,\ \alpha, \beta > 0.$

Розглянемо випадок, коли

$$\alpha < 1 \ \text{ та } \ \alpha - 2\beta + 1 < 0. \tag{3}$$

Тоді коефіцієнт переносу не задовольняє умову Ліпшиця в точці 0.

Відомо, що у випадку (3) існують (слабкі) розв'язки рівняння (1), але не виконується умова єдиності розв'язку; при цьому точка 0 є право- та лівосторонньою точкою виходу, але не входу (див. [1], § 5.1). Тобто якщо $X(t_0) \ne 0$ для деякого розв'язку X та деякого t_0, то $X(t) \ne 0$ при $t \ge t_0$ м.н. Крім того, існують єдині розв'язки X_+ та X_- рівняння (1) такі, що $X_{\pm}(0) = 0$ та

$$X_{+}(t) > 0 \ \text{ при } \ t > 0 \ \text{ м.н.}, \qquad X_{-}(t) < 0 \ \text{ при } \ t > 0 \ \text{ м.н.} \tag{4}$$

У роботі [2] розглядався частковий випадок рівняння (1) при $b_{\pm} = 0$. Для цього випадку був запропонований такий спосіб селекції розв'язку.

Розглянемо рівняння

$$dX(t) = a(X(t))\,dt,\ t \ge 0, \qquad X(0) = 0,$$

де функцію a задано в (2). Відзначимо, що якщо $\alpha < 1$, то a не задовольняє умову Ліпшиця, а процеси $X_{\pm}$ з (4) набувають вигляду

$$X_{\pm}(t) = \pm((1-\alpha)\,a_{\pm}t)^{1/(1-\alpha)},\ t \ge 0. \tag{5}$$

Нехай $\varepsilon > 0$. Розглянемо випадкове збурення цього рівняння малим шумом:

$$dX_{\varepsilon}(t) = a(X_{\varepsilon}(t))\,dt + \varepsilon\,dW(t),\ t \ge 0, \qquad X_{\varepsilon}(0) = 0. \tag{6}$$

Рівняння (6) має єдиний розв'язок (див. [3]). Метою роботи [2] було знаходження границі $\{X_\varepsilon\}$ при $\varepsilon \to 0$. Було встановлено (див. [2], приклад 4.5), що послідовність $\{X_\varepsilon\}$ слабко збігається до граничного процесу з розподілом

$$p\,\mathbb{P}_{X_+} + (1-p)\,\mathbb{P}_{X_-},$$

де

$$p = \frac{(a_+)^{1/(\alpha+1)}}{(a_+)^{1/(\alpha+1)} + (a_-)^{1/(\alpha+1)}},$$

а $\mathbb{P}_{X_+}$ та $\mathbb{P}_{X_-}$ – розподіли процесів X_+ і X_-, заданих у (5).

Цей результат узагальнювався на звичайні диференціальні рівняння з неліпшицевими коефіцієнтами в роботах [4–8].

У дійсній роботі результат [2] узагальнено на випадок стохастичного диференціального рівняння (1).

Постановка задачі

Нехай $\varepsilon > 0$. Розглянемо таке збурення рівняння (1):

$$dX_\varepsilon(t) = a(X_\varepsilon(t))\,dt + (\varepsilon + \sigma(X_\varepsilon(t)))\,dW(t),\ t \ge 0, \qquad X_\varepsilon(0) = 0, \tag{7}$$

де $a(\cdot)$ та $\sigma(\cdot)$ задані в (2), $a_\pm > 0, b_\pm \ge 0, \alpha, \beta > 0$.

Оскільки $\sigma_\varepsilon(x) = \varepsilon + \sigma(x)$ відокремлене від нуля, то існує єдиний розв'язок рівняння (7) (див. [3]).

Метою нашої роботи є дослідження граничної поведінки послідовності процесів $X_\varepsilon(\cdot)$ при $\varepsilon \to 0$.

Основний результат

Нехай для $\varepsilon > 0$ процес $X_\varepsilon(\cdot)$ є розв'язком рівняння (7).

Теорема 1. Нехай виконується умова (3).

Тоді $\{X_\varepsilon\}$ слабко збігається в $C([0,T])$ при $\varepsilon \to 0$ до граничного процесу X_∞ з розподілом

$$p\,\mathbb{P}_{X_+} + (1-p)\,\mathbb{P}_{X_-},$$

де $p = \dfrac{(a_+)^{1/(\alpha+1)}}{(a_+)^{1/(\alpha+1)} + (a_-)^{1/(\alpha+1)}}$, $\mathbb{P}_{X_+}$ та $\mathbb{P}_{X_-}$ – розподіли розв'язків X_+ і X_-, що задовольняють (4).

Доведення спирається на міркування, аналогічні доведенню п. 3 теореми 1 з роботи [9] або теореми 2 з [10]. З указаних робіт випливає, що для доведення теореми 1 достатньо довести, що для довільного $\delta > 0$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} p_0^{(\varepsilon)} = p, \tag{8}$$

де $p_0^{(\varepsilon)} = p_0^{(\varepsilon)}(\delta, -\delta)$ – це імовірність для процесу X_ε з точки 0 потрапити в точку $\delta > 0$ раніше, ніж у точку $-\delta$.

Відомо (див. [11]), що

$$p_0^{(\varepsilon)} = \frac{\varphi_\varepsilon(0) - \varphi_\varepsilon(-\delta)}{\varphi_\varepsilon(\delta) - \varphi_\varepsilon(-\delta)},$$

де φ_ε – це функція шкали:

$$\varphi_\varepsilon(x) = \int_0^x \exp\left\{-2\int_0^y \frac{a(z)}{\sigma^2(z)}\,dz\right\} dy = \int_0^x \exp\left\{-2\int_0^y \frac{a_\pm\,|z|^\alpha\ \ sign\ z\,dz}{(\varepsilon + b_\pm\,|z|^\beta)^2}\right\} dy. \tag{9}$$

Таким чином,

$$p_0^{(\varepsilon)} = \frac{0 - \varphi_\varepsilon(-\delta)}{\varphi_\varepsilon(\delta) - \varphi_\varepsilon(-\delta)} = \frac{1}{1 - \varphi_\varepsilon(\delta)/\varphi_\varepsilon(-\delta)}.$$

Для знаходження асимптотики відношення $\varphi_\varepsilon(\delta)/\varphi_\varepsilon(-\delta)$ при $\varepsilon \to 0$ перетворимо вираз (9) таким чином.

Нехай $x > 0$. Покладемо $\tilde{z} = \varepsilon^{-1/\beta} z$, тоді

$$\varphi_\varepsilon(x) = \int_0^x \exp\left\{-2\int_0^{\varepsilon^{-1/\beta} y} \frac{a_+ \tilde{z}^\alpha \varepsilon^{\alpha/\beta} \varepsilon^{1/\beta}\,d\tilde{z}}{(\varepsilon + \varepsilon b_+ \tilde{z}^\beta)^2}\right\} dy = \int_0^x \exp\left\{-2\varepsilon^{\frac{\alpha+1-2\beta}{\beta}} \int_0^{\varepsilon^{-1/\beta} y} \frac{a_+ \tilde{z}^\alpha\,d\tilde{z}}{(1 + b_+ \tilde{z}^\beta)^2}\right\} dy.$$

Покладемо $\tilde{y} = \varepsilon^{-1/\beta} y$, тоді

$$\varphi_\varepsilon(x) = \int_0^{\varepsilon^{-1/\beta} x} \exp\left\{-2\varepsilon^{\frac{\alpha+1-2\beta}{\beta}} \int_0^{\tilde{y}} \frac{a_+ \tilde{z}^\alpha\,d\tilde{z}}{(1 + b_+ \tilde{z}^\beta)^2}\right\} \varepsilon^{1/\beta}\,d\tilde{y}.$$

Аналогічно розглянувши випадок $x < 0$, одержимо, що в загальному випадку

$$\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{1/\beta} \mathrm{sign}\, x \int_0^{\varepsilon^{-1/\beta}|x|} \exp\left\{-2\varepsilon^{\frac{\alpha+1-2\beta}{\beta}} \int_0^y \frac{a_\pm z^\alpha\,dz}{(1 + b_\pm z^\beta)^2}\right\} dy.$$

Перевіримо, що

$$\int_0^y \frac{z^{\alpha}\,dz}{(1+b_{\pm}z^{\beta})^2} \sim \frac{y^{\alpha+1}}{\alpha+1},\ y\to 0.$$

Дійсно, за правилом Лопіталя,

$$\lim_{y\to 0}\frac{\int_0^y z^{\alpha}(1+b_{\pm}z^{\beta})^{-2}\,dz}{y^{\alpha+1}(\alpha+1)^{-1}} = \lim_{y\to 0}\frac{y^{\alpha}(1+b_{\pm}y^{\beta})^{-2}}{y^{\alpha}} = 1.$$

Тоді за лемою 1.3 гл. 2 з [12, с. 33] для довільного $A>0$

$$\int_0^A \exp\left\{-2\varepsilon^{\frac{\alpha+1-2\beta}{\beta}}\int_0^y \frac{a_{\pm}z^{\alpha}\,dz}{(1+b_{\pm}z^{\beta})^2}\right\}dy =$$

$$= \frac{1}{\alpha+1}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha+1}\right)(1+o(1))\left(\frac{2a_{\pm}}{\alpha+1}\varepsilon^{\frac{\alpha+1-2\beta}{\beta}}\right)^{-1/(\alpha+1)} =$$

$$= C_1(1+o(1))\left(a_{\pm}\varepsilon^{\frac{\alpha+1-2\beta}{\beta}}\right)^{-1/(\alpha+1)} \tag{10}$$

при $\varepsilon\to 0$, де

$$C_1 = \frac{1}{\alpha+1}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha+1}\right)\left(\frac{2}{\alpha+1}\right)^{-1/(\alpha+1)}.$$

Оцінимо

$$\int_A^{\varepsilon^{-1/\beta}\delta} \exp\left\{-2\varepsilon^{\frac{\alpha+1-2\beta}{\beta}}\int_0^y \frac{a_{\pm}z^{\alpha}\,dz}{(1+b_{\pm}z^{\beta})^2}\right\}dy \le$$

$$\le \varepsilon^{-1/\beta}\delta\max_{y\ge A}\left(\exp\left\{-2\varepsilon^{\frac{\alpha+1-2\beta}{\beta}}\int_0^y \frac{a_{\pm}z^{\alpha}\,dz}{(1+b_{\pm}z^{\beta})^2}\right\}\right) =$$

$$= \varepsilon^{-1/\beta}\delta\cdot\exp\left\{-C_2 a_{\pm}\varepsilon^{\frac{\alpha+1-2\beta}{\beta}}\right\}, \tag{11}$$

де

$$C_2 = 2\int_0^A \frac{z^{\alpha}\,dz}{(1+b_{\pm}z^{\beta})^2} > 0.$$

Оскільки $\alpha+1-2\beta<0$ та $\beta>0$, то з (10) та (11) маємо, що

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varphi_{\varepsilon}(\delta)}{\varphi_{\varepsilon}(-\delta)} = -\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\left(a_{+}\varepsilon^{\frac{\alpha+1-2\beta}{\beta}}\right)^{-1/(\alpha+1)}}{\left(a_{-}\varepsilon^{\frac{\alpha+1-2\beta}{\beta}}\right)^{-1/(\alpha+1)}} =$$

$$= -(a_{+}/a_{-})^{-1/(\alpha+1)}.$$

Звідси випливає (8), що доводить теорему 1.

Висновки

Випадковим збуренням звичайних диференціальних рівнянь присвячені праці [2, 4–8], у яких розглядаються випадки, коли розв’язки рівнянь не є “регулярними”. Наприклад, якщо коефіцієнти рівнянь не є ліпшицевими функціями, то можуть не виконуватись умови єдиності розв’язку.

У [2] розглядалось диференціальне рівняння

$$dX(t) = a(X(t))\,dt,$$

коефіцієнт переносу якого не задовольняє умову Ліпшиця в точці 0. Було запропоновано розглянути малі випадкові збурення цього рівняння, тобто розглянути стохастичне диференціальне рівняння

$$dX_{\varepsilon}(t) = a(X_{\varepsilon}(t))\,dt + \varepsilon\,dW(t),$$

для якого відомі існування та єдиність розв’язків, та досліджено граничну поведінку розв’язків X_{ε} при $\varepsilon\to 0$.

У нашій роботі результат [2] узагальнено на випадок стохастичного диференціального рівняння

$$dX(t) = a(X(t))\,dt + \sigma(X(t))\,dW(t)$$

зі степеневими коефіцієнтами, які задано у (2). Встановлено слабку збіжність послідовності $\{X_{\varepsilon}(\cdot)\}$ при $\varepsilon\to 0$ у просторі неперервних функцій.

Для доведення цього результату використано методику доведення граничних теорем для випадкових процесів, запропоновану в [9,10].

Зауважимо, що за вказаною методикою основним етапом доведення для випадку степеневих коефіцієнтів є встановлення співвідношення (8). Так, наприклад, аналогічним чином можна було б довести відповідний результат для випадку

$$\sigma_{\varepsilon}(x) = \max(\varepsilon, \sigma(x)).$$

Список літератури

1. *Cherny A.S., Engelbert H.-J.* Singular stochastic differential equations. Ser. no. 1858. – Springer Science & Business Media, 2005. – P. 5–25.
2. *Bafico R., Baldi P.* Small random perturbations of Peano phenomena // Stochastics. – 1982. – **6**, № 3-4. – P. 279–292.
3. *Ikeda N., Watanabe S.* Stochastic differential equations and diffusion processes. – Tokyo: Kodansha LTD, North-Holland Publishing Company, 1981.
4. *Bafico R.* On the convergence of the weak solutions of stochastic differential equations when the noise intensity goes to zero // Boll. Unione Mat. Ital. Sez. B. – 1980. – **17**. – P. 308–324.
5. *Delarue F., Flandoli F.* The transition point in the zero noise limit for a 1D Peano example // Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series A. – 2014. – **34**. – P. 4071–4084.
6. *Delarue F., Flandoli F., Vincenzi D.* Noise prevents collapse of Vlasov-Poisson point charges // Communications on Pure and Applied Mathematics. – 2014. – **67**, № 10. – P. 1700–1736.
7. *Krykun I.G., Makhno S.Y.* The Peano phenomenon for Itó equations // J. Math. Sci. – 2013. – **92**, № 4. – P. 441–458.
8. *Pilipenko A., Proske F.N.* On a selection problem for small noise perturbation in multidimensional case // arXiv:1510.00966. – 2015.
9. *Pilipenko A.Y., Prykhodko Y.E.* A limit theorem for singular stochastic differential equations // arXiv:1609.01185. – 2016.
10. *Пилипенко А.Ю., Приходько Ю.Е.* О предельном поведении возмущений в окрестности сингулярной точки последовательности марковских процессов // Укр. мат. журн. – 2015. – **67**, № 4. – С. 499–516.
11. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Стохастические дифференциальные уравнения. – К.: Наукова думка, 1968.
12. *Федорюк М.В.* Метод перевала. – М.: Наука, 1977.

References

1. A.S. Cherny and H.-J. Engelbert, *Singular Stochastic Differential Equations*, Ser. no. 1858. Springer Science & Business Media, 2005.
2. R. Bafico and P. Baldi, “Small random perturbations of Peano phenomena”, *Stochastics*, vol. 6, no. 3-4, pp. 279–292, 1982.
3. N. Ikeda and S. Watanabe, *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes.* Tokyo, Japan: Kodansha LTD, North-Holland Publishing Company, 1981.
4. R. Bafico, “On the convergence of the weak solutions of stochastic differential equations when the noise intensity goes to zero,” *Boll. Unione Mat. Ital. Sez. B*, vol. 17, pp. 308–324, 1980.
5. F. Delarue and F. Flandoli, “The transition point in the zero noise limit for a 1D Peano example”, *Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series A*, vol. 34, pp. 4071–4084, 2014.
6. F. Delarue *et al.*, “Noise prevents collapse of Vlasov-Poisson point charges”, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol. 67, no. 10, pp. 1700–1736, 2014.
7. I.G. Krykun and S.Y. Makhno, “The Peano phenomenon for Itó equations”, *J. Math. Sci.*, vol. 192, no. 4, pp. 441–458, 2013.
8. A. Pilipenko and F. N. Proske, “On a selection problem for small noise perturbation in multidimensional case”, arXiv:1510.00966, 2015.
9. A.Y. Pilipenko and Y.E. Prykhodko, “A limit theorem for singular stochastic differential equations”, arXiv:1609.01185, 2016.
10. A.Y. Pilipenko and Y.E. Prykhodko, “On the limit behavior of a sequence of Markov processes perturbed in a neighborhood of the singular point”, *Ukrayins'kyy Matematychnyy Zhurnal*, vol. 67, no. 4, pp. 564–583, 2015 (in Russian).
11. I.I. Gikhman and A.V. Skorokhod, *Stochastic Differential Equations.* Kyiv, USSR: Naukova Dumka, 1979 (in Russian).
12. M. Fedoryuk, *The Saddle-Point Method.* Moscow, USSR: Nauka 1977 (in Russian).

Ю.Є. Приходько

МАЛІ ЗБУРЕННЯ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗІ СТЕПЕНЕВИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Проблематика. Випадкові збурення звичайних диференціальних рівнянь розглядались у роботах Бафіко (1980), Бафіко, Балді (1982), Делару, Фландолі (2014), Делару, Фландолі, Вінченці (2014), Крикун, Махно (2013), Пилипенко, Проске (2015). Так, у роботі Бафіко, Балді (1982) розглядалось випадкове збурення диференціального рівняння, що описує феномен Пеано. Для коефіцієнтів вихідного диференціального рівняння не виконується умова Ліпшиця, тому може не бути єдиності розв’язку такого рівняння. Тоді замість звичайного диференціального рівняння розглядається стохастичне диференціальне рівняння та доводиться слабка збіжність розв’язків таких рівнянь.

Мета дослідження. Метою роботи є узагальнення результату Бафіко, Балді (1982) на випадок стохастичного диференціального рівняння $dX(t) = a(X(t))\,dt + \sigma(X(t))\,dW(t)$ зі степеневими коефіцієнтами.

Методика реалізації. Розглядаються малі випадкові збурення вихідного рівняння $dX(t) = a(X(t))\,dt + (\varepsilon + \sigma(X(t)))\,dW(t)$ та досліджується гранична поведінка відповідних розв'язків. Для доведення слабкої збіжності розв'язків використовується методика доведення, запропонована в роботах А.Ю. Пилипенка та Ю.Є. Приходька (2015, 2016).

Результати дослідження. Досліджено граничну поведінку розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь зі збуренням та встановлено слабку збіжність послідовності таких розв'язків у просторі неперервних функцій.

Висновки. Отримано узагальнення результату роботи Бафіко, Балді (1982) на випадок стохастичного диференціального рівняння зі степеневими коефіцієнтами.

Ключові слова: стохастичні диференціальні рівняння; стохастичні диференціальні рівняння зі степеневими коефіцієнтами; стохастичні диференціальні рівняння зі збуренням; асимптотична поведінка; феномен Пеано.

Ю.Е. Приходько

МАЛЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СО СТЕПЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНАМИ

Проблематика. Случайные возмущения обыкновенных дифференциальных уравнений рассматривались в работах Бафико (1980), Бафико, Балди (1982), Дэлару, Фландоли (2014), Дэлару, Фландоли, Винченци (2014), Крыкун, Махно (2013), Пилипенко, Проске (2015). Так, в робоне Бафико, Балди (1982) рассматривалось случайное возмущение дифференциального уравнения, описывающего феномен Пеано. Для коэффициентов исходного дифференциального уравнения не выполняется условие Липшица, поэтому может не быть единственности решения такого уравнения. Тогда вместо обычного дифференциального уравнения рассматривается стохастическое дифференциальное уравнение и доказывается слабая сходимость решений таких уравнений.

Цель исследования. Целью работы является обобщение результата Бафико, Балди (1982) на случай стохастического дифференциального уравнения $dX(t) = a(X(t))\,dt + \sigma(X(t))\,dW(t)$ со степенными коэффициентами.

Методика реализации. Рассматриваются малые случайные возмущения исходного уравнения $dX(t) = a(X(t))\,dt + (\varepsilon + \sigma(X(t)))\,dW(t)$ и исследуется предельное поведение соответствующих решений. Для доказательства слабой сходимости решений используется методика доказательства, предложенная в работах А.Ю. Пилипенко и Ю.Е. Приходько (2015 и 2016).

Результаты исследования. Исследовано предельное поведение решений стохастических дифференциальных уравнений с возмущением, и установлена слабая сходимость последовательности таких решений в пространстве непрерывных функций.

Выводы. Получено обобщение результата работы Бафико, Балди (1982) на случай стохастического дифференциального уравнения со степенными коэффициентами.

Ключевые слова: стохастические дифференциальные уравнения; стохастические дифференциальные уравнения со степенными коэффициентами; стохастические дифференциальные уравнения с возмущением; асимптотическое поведение; феномен Пеано.

Рекомендована Радою фізико-математичного факультету НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції 8 червня 2016 року