ТЕОРЕТИЧНІ ТА ПРИКЛАДНІ ПРОБЛЕМИ МАТЕМАТИКИ

УДК 517.9
DOI: 10.20535/1810-0546.2016.4.72752

І.В. Бецко
Національний технічний університет України "КПІ", Київ, Україна

ПОБУДОВА НЕПЕРЕРВНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ ФУНКЦІОНАЛЬНО-РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ

Background. We study the structure of the set of solutions of functional-difference equations systems

$$x(t+1) = Ax(t) + F(t, x(qt)) \tag{1}$$

under certain assumptions about the matrix A and number q.

Objective. The aim is to build continuous limited solutions for $t \in \mathbb{R}^+(\mathbb{R}^-)$ and study the structure of their set.

Methods. We use the classical methods of the theory of ordinary differential and difference equations.

Results. The existence of the family of continuous limited solutions for $t \geq 0$ which depends on arbitrary one-periodic function dimension k is proved. A similar result was obtained for case $t \leq 0$ (the theorem 2).

Conclusions. New sufficient conditions for the existence of continuous solutions of functional-difference equations systems (1) are established, we developed the method of constructing these solutions and investigated the structure of their set.

Keywords: functional-difference equations; continuous limited solutions.

Вступ

Робота присвячена дослідженню структури розв'язків системи функціонально-різницевих рівнянь вигляду

$$x(t+1) = Ax(t) + F(t, x(qt)), \tag{1}$$

де $t \in \mathbb{R}$, A — дійсна ($n \times n$)-матриця, $F(t,x)$ — деяка дійсна неперервна при $t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$ вектор-функція, $F(t,0) \equiv 0$, q — деяка дійсна стала. Вперше основи теорії окремих класів таких рівнянь розробили Г. Біркгоф, В. Тржитзінський і їх учні. Зокрема, в роботах [1, 2] побудовано основи теорії систем рівнянь вигляду

$$x(t+1) = A(t)x(t),$$
$$x(qt) = A(t)x(t)$$

у випадку, коли елементи матриці $A(t)$ є голоморфними функціями в околі точки $t = \infty$. Більше того, побудовано зображення загального розв'язку таких систем рівнянь і досліджено його структуру.

Нині за різних припущень відносно матриці A і вектор-функції $F(t,x)$ низку питань теорії для систем вигляду (1) досить детально вивчено. Зокрема, в роботах [3, 4] досліджено структуру множини неперервних розв'язків системи у випадку, коли вектор-функція $F(t,x)$ є лінійною відносно x, отримано достатні умови існування неперервних періодичних розв'язків і досліджено їх властивості. У зв'язку з цим природно виникли питання про існування неперервних обмежених розв'язків, а також вивчення їх властивостей у загальному випадку. Саме ці питання є основним об'єктом дослідження у роботах [5, 6]. У цій роботі продовжуються дослідження поставлених там задач для більш широких класів рівнянь вигляду (1).

Постановка задачі

Метою роботи є вивчення питань існування неперервних обмежених при $t \in \mathbb{R}^+(\mathbb{R}^-)$ розв'язків, дослідження структури їх множини, а також розробка методу їх побудови.

Основні результати

Відносно матриці A будемо припускати, що її власні значення λ_i, $i = 1, \dots, n$, задовольняють умову

$$|\lambda_i| \neq 0, 1, i = 1, \dots, n.$$

Тоді за допомогою деякої неособливої заміни змінних систему рівнянь (1) можна звести до вигляду

$$y(t+1) = Jy(t) + \tilde{F}(t, y(qt)), \tag{2}$$

де $\tilde{F}(t,0) \equiv 0, J = \operatorname{diag}(J_1(\lambda_1), \dots, J_m(\lambda_m))$,

$$J_i(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & \varepsilon & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & \varepsilon & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_i & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda_i \end{pmatrix},$$

$$i = 1,\dots,m, m \le n.$$

Ввівши позначення

$$J_1 = \mathrm{diag}(J_1(\lambda_1),\dots,J_k(\lambda_k)),$$
$$J_2 = \mathrm{diag}(J_{k+1}(\lambda_{k+1}),\dots,J_m(\lambda_m)), m \le n,$$
$$y(t) = (y^1(t), y^2(t)), y^1(t) =$$
$$= (y_1(t),\dots,y_k(t)), y^2(t) = (y_{k+1}(t),\dots,y_m(t)),$$
$$\tilde F(t,y) = (\tilde F^1(t,y), \tilde F^2(t,y)),$$

перепишемо систему рівнянь (2) у вигляді

$$\begin{aligned} y^1(t+1) &= J_1 y^1(t) + \tilde F^1(t, y^1(qt), y^2(qt)),\\ y^2(t+1) &= J_2 y^2(t) + \tilde F^2(t, y^1(qt), y^2(qt)). \end{aligned} \tag{3}$$

Для системи (3) доведена така теорема.

Теорема 1. Нехай виконуються умови:

1) $0 < \lambda_i < 1 < \lambda_j, i = 1,\dots,k, j = k+1,\dots,m, q > 1$;

2) $\lambda^* < \tilde\lambda < 1, \tilde\lambda^q < \lambda_*, \theta = \max\left\{2L\dfrac{\lambda_*^{-1}+\delta_1}{1-(\lambda_*^{-1}+\delta_1)\tilde\lambda^q},\right.$ $\left. 2L\dfrac{\lambda_{**}^{-1}+\delta_2}{1-(\lambda_{**}^{-1}+\delta_2)\tilde\lambda^q}\right\} < 1, \lambda_* = \min\{\lambda_i, i = 1,\dots,k\}, \lambda^* =$ $= \max\{\lambda_i, i = 1,\dots,k\}, \lambda_{**} = \min\{\lambda_j, j = k+1,\dots,m\}$.

3) $|\tilde F^i(t,x',y') - \tilde F^i(t,x'',y'')| \le L(|x'-x''| +$ $+|y'-y''|)$, $i = 1,2$ де $t \ge 0$, $x', x'', y', y'' \in \mathbb{R}^n$, L — деяка додатна стала, $\tilde F^i(t,0,0) \equiv 0$.

Тоді система рівнянь (3) має сім'ю неперервних і обмежених при $t \ge 0$ розв'язків, що залежить від довільної 1-періодичної вектор-функції $\omega_1(t)$ розмірності k.

Доведення. Розв'язок системи (3) шукатимемо у вигляді функціональних рядів

$$\begin{aligned} y^1(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} y_i^1(t),\\ y^2(t) &= \sum_{i=0}^{\infty} y_i^2(t), \end{aligned} \tag{4}$$

де $y_i^1(t), y_i^2(t), i = 0,1,\dots,$ — деякі неперервні й обмежені при $t \ge 0$ вектор-функції.

Оскільки ряди (що буде доведено пізніше)

$$\tilde F^1(t, y_0^1(qt), y_0^2(qt)) +$$
$$+\sum_{i=2}^{\infty}\left(\tilde F^1\left(t, \sum_{j=0}^{i-1} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-1} y_j^2(qt)\right) - \right.$$
$$\left. -\tilde F^1\left(t, \sum_{j=0}^{i-2} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-2} y_j^2(qt)\right)\right),$$
$$\tilde F^2(t, y_0^1(qt), y_0^2(qt)) +$$
$$+\sum_{i=2}^{\infty}\left(\tilde F^2\left(t, \sum_{j=0}^{i-1} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-1} y_j^2(qt)\right) - \right.$$
$$\left. -\tilde F^2\left(t, \sum_{j=0}^{i-2} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-2} y_j^2(qt)\right)\right)$$

рівномірно збігаються при $t \in \mathbb{R}^+$ і їх суми дорівнюють $\tilde F^1\left(t, \sum_{j=0}^{\infty} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{\infty} y_j^2(qt)\right)$ і $\tilde F^2\left(t, \sum_{j=0}^{\infty} y_j^1(qt),\right.$ $\left.\sum_{j=0}^{\infty} y_j^2(qt)\right)$ відповідно, то підставивши (4) в (3), отримаємо

$$\sum_{i=0}^{\infty} y_i^1(t+1) = J_1 \sum_{i=0}^{\infty} y_i^1(t) + \tilde F^1(t, y_0^1(qt), y_0^2(qt)) +$$
$$+\sum_{i=2}^{\infty}\left(\tilde F^1\left(t, \sum_{j=0}^{i-1} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-1} y_j^2(qt)\right) - \right.$$
$$\left. -\tilde F^1\left(t, \sum_{j=0}^{i-2} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-2} y_j^2(qt)\right)\right),$$
$$\sum_{i=0}^{\infty} y_i^2(t+1) = J_2 \sum_{i=0}^{\infty} y_i^2(t) + \tilde F^2(t, y_0^1(qt), y_0^2(qt)) +$$
$$+\sum_{i=2}^{\infty}\left(\tilde F^2\left(t, \sum_{j=0}^{i-1} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-1} y_j^2(qt)\right) - \right.$$
$$\left. -\tilde F^2\left(t, \sum_{j=0}^{i-2} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-2} y_j^2(qt)\right)\right).$$

Звідси безпосередньо випливає, що якщо вектор-функції $y_i^1(t), y_i^2(t), i = 0,1,\dots,$ є розв'язками послідовності систем рівнянь

$$\begin{aligned} y_0^1(t+1) &= J_1 y_0^1(t),\\ y_0^2(t+1) &= J_2 y_0^2(t), \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} y_1^1(t+1) &= J_1 y_1^1(t) + \tilde F^1(t, y_0^1(qt), y_0^2(qt)),\\ y_1^2(t+1) &= J_2 y_1^2(t) + \tilde F^2(t, y_0^1(qt), y_0^2(qt)), \end{aligned} \tag{6}$$

$$y_i^1(t+1) = J_1 y_i^1(t) + \tilde F^1\left(t, \sum_{j=0}^{i-1} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-1} y_j^2(qt)\right) -$$

$$-\tilde F^1\left(t,\sum_{j=0}^{i-2}y_j^1(qt),\sum_{j=0}^{i-2}y_j^2(qt)\right),$$
$$y_i^2(t+1)=J_2y_i^2(t)+\tilde F^2\left(t,\sum_{j=0}^{i-1}y_j^1(qt),\sum_{j=0}^{i-1}y_j^2(qt)\right)-\tag{7}$$
$$-\tilde F^2\left(t,\sum_{j=0}^{i-2}y_j^1(qt),\sum_{j=0}^{i-2}y_j^2(qt)\right),$$
$$i=2,3,\ldots,$$

то ряди (4) є формальним розв'язком системи рівнянь (3).

Беручи до уваги умови теореми і представлення загального розв'язку системи (5), можна переконатися, що існує сім'я розв'язків, яка задовольняє систему рівнянь (5), і виконуються оцінки

$$|y_0^1(t)|\le M^1\tilde\lambda^t,\qquad |y_0^2(t)|=0,\tag{8}$$

де $M^1=\max|\omega_1(t)|$.

Далі, з огляду на (6) та (8), отримаємо

$$|y_1^1(t)|\le$$
$$\le\sum_{j=0}^{\infty}|J_1^{-1}|^{j+1}|\tilde F^1(t+j,y_0^1(q(t+j)),y_0^2(q(t+j)))|\le$$
$$\le\sum_{j=0}^{\infty}(\lambda_*^{-1}+\delta_1)^{j+1}L(|y_0^1(q(t+j))|+|y_0^2(q(t+j))|)\le$$
$$\le\sum_{j=0}^{\infty}(\lambda_*^{-1}+\delta_1)^{j+1}L|y_0^1(q(t+j))|\le$$
$$\le\sum_{j=0}^{\infty}(\lambda_*^{-1}+\delta_1)^{j+1}LM^1\tilde\lambda^{q(t+j)}\le$$
$$\le LM^1\frac{\lambda_*^{-1}+\delta_1}{1-(\lambda_*^{-1}+\delta_1)\tilde\lambda^q}\tilde\lambda^{qt}\le M^1\theta\tilde\lambda^{qt},\tag{9}$$
$$|y_1^2(t)|\le$$
$$\le\sum_{j=0}^{\infty}|J_2^{-1}|^{j+1}|\tilde F^2(t+j,y_0^1(q(t+j)),y_0^2(q(t+j)))|\le$$
$$\le\sum_{j=0}^{\infty}(\lambda_{**}^{-1}+\delta_2)^{j+1}L(|y_0^1(q(t+j))|+|y_0^2(q(t+j))|)\le$$
$$\le\sum_{j=0}^{\infty}(\lambda_{**}^{-1}+\delta_2)^{j+1}L|y_0^1(q(t+j))|\le$$
$$\le\sum_{j=0}^{\infty}(\lambda_{**}^{-1}+\delta_2)^{j+1}LM^1\tilde\lambda^{q(t+j)}\le$$
$$\le LM^1\frac{\lambda_{**}^{-1}+\delta_2}{1-(\lambda_{**}^{-1}+\delta_2)\tilde\lambda^q}\tilde\lambda^{qt}\le M^1\theta\tilde\lambda^{qt},$$

де

$$\theta=\max\left\{2L\frac{\lambda_*^{-1}+\delta_1}{1-(\lambda_*^{-1}+\delta_1)\tilde\lambda^q},2L\frac{\lambda_{**}^{-1}+\delta_2}{1-(\lambda_{**}^{-1}+\delta_2)\tilde\lambda^q}\right\}<1.$$

Розглядаючи послідовно системи рівнянь (7) при $i=2,3,\ldots,$ легко показати, що ряди

$$y_i^1(t)=$$
$$=-\sum_{j=0}^{\infty}J_1^{-(j+1)}\left[\tilde F^1\left(t+j,\sum_{j=0}^{i-1}y_j^1(q(t+j)),\sum_{j=0}^{i-1}y_j^2(q(t+j))\right)-\right.$$
$$\left.-\tilde F^1\left(t+j,\sum_{j=0}^{i-2}y_j^1(q(t+j)),\sum_{j=0}^{i-2}y_j^2(q(t+j))\right)\right],$$
$$y_i^2(t)=\tag{10}$$
$$=-\sum_{j=0}^{\infty}J_2^{-(j+1)}\left[\tilde F^2\left(t+j,\sum_{j=0}^{i-1}y_j^1(q(t+j)),\sum_{j=0}^{i-1}y_j^2(q(t+j))\right)-\right.$$
$$\left.-\tilde F^2\left(t+j,\sum_{j=0}^{i-2}y_j^1(q(t+j)),\sum_{j=0}^{i-2}y_j^2(q(t+j))\right)\right],$$
$$i=2,3,\ldots,$$

рівномірно збігаються при $t\ge0$, задовольняють систему рівнянь (7) при $i=2,3,\ldots,$ і виконуються оцінки

$$|y_i^1(\mathrm{t})|\le M^1\theta^i\tilde\lambda^{qt},\qquad |y_i^2(\mathrm{t})|\le M^1\theta^i\tilde\lambda^{qt},\qquad i=2,3,\ldots.\tag{11}$$

Звідси випливає, що ряди (4) рівномірно збігаються при $t\ge0$ до деяких неперервних вектор-функцій $y(t)=(y^1(t),y^2(t))$, які є розв'язками системи рівнянь (3) і задовольняють умову

$$|y^1(\mathrm{t})|\le\frac{M^1}{1-\theta}\tilde\lambda^t,|y^2(\mathrm{t})|\le\frac{M^1}{1-\theta}\tilde\lambda^t.$$

Доведемо тепер, що

$$\tilde F^1(t,y_0^1(qt),y_0^2(qt))+\sum_{i=2}^{\infty}\left(\tilde F^1\left(t,\sum_{j=0}^{i-1}y_j^1(qt),\sum_{j=0}^{i-1}y_j^2(qt)\right)-\right.$$
$$\left.-\tilde F^1\left(t,\sum_{j=0}^{i-2}y_j^1(qt),\sum_{j=0}^{i-2}y_j^2(qt)\right)\right)=$$
$$=\tilde F^1\left(t,\sum_{j=0}^{\infty}y_j^1(qt),\sum_{j=0}^{\infty}y_j^2(qt)\right),$$

$$\tilde F^2(t, y_0^1(qt), y_0^2(qt)) + \sum_{i=2}^{\infty}\left(\tilde F^2\left(t, \sum_{j=0}^{i-1} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-1} y_j^2(qt)\right) - \right.$$

$$\left. -\tilde F^2\left(t, \sum_{j=0}^{i-2} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-2} y_j^2(qt)\right)\right) =$$

$$= \tilde F^2\left(t, \sum_{j=0}^{\infty} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{\infty} y_j^2(qt)\right).$$

Дійсно, оскільки при всіх $m \ge 1$ виконуються співвідношення

$$\tilde F^1(t, y_0^1(qt), y_0^2(qt)) + \sum_{i=2}^{m+1}\left(\tilde F^1\left(t, \sum_{j=0}^{i-1} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-1} y_j^2(qt)\right) - \right.$$

$$\left. -\tilde F^1\left(t, \sum_{j=0}^{i-2} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-2} y_j^2(qt)\right)\right) =$$

$$= \tilde F^1\left(t, \sum_{j=0}^{m} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{m} y_j^2(qt)\right),$$

$$\tilde F^2(t, y_0^1(qt), y_0^2(qt)) + \sum_{i=2}^{m+1}\left(\tilde F^2\left(t, \sum_{j=0}^{i-1} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-1} y_j^2(qt)\right) - \right.$$

$$\left. -\tilde F^2\left(t, \sum_{j=0}^{i-2} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-2} y_j^2(qt)\right)\right) =$$

$$= \tilde F^2\left(t, \sum_{j=0}^{m} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{m} y_j^2(qt)\right),$$

то внаслідок умови 2 теореми отримуємо

$$\left|\tilde F^1\left(t, \sum_{j=0}^{\infty} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{\infty} y_j^2(qt)\right) - \tilde F^1\left(t, \sum_{j=0}^{m} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{m} y_j^2(qt)\right)\right| \le$$

$$\le L\left(\left|\sum_{j=0}^{\infty} y_j^1(qt) - \sum_{j=0}^{m} y_j^1(qt)\right| + \left|\sum_{j=0}^{\infty} y_j^2(qt) - \sum_{j=0}^{m} y_j^2(qt)\right|\right) \le$$

$$\le L\left(\left|\sum_{j=m+1}^{\infty} y_j^1(qt)\right| + \left|\sum_{j=m+1}^{\infty} y_j^2(qt)\right|\right) \le$$

$$\le L\sum_{j=m+1}^{\infty} 2M^1\theta^i\tilde\lambda^{qt} \le 2LM^1\frac{\theta^{m+1}}{1-\theta}\tilde\lambda^{qt},$$

$$\left|\tilde F^2\left(t, \sum_{j=0}^{\infty} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{\infty} y_j^2(qt)\right) - \tilde F^2\left(t, \sum_{j=0}^{m} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{m} y_j^2(qt)\right)\right| \le$$

$$\le L\left(\left|\sum_{j=0}^{\infty} y_j^1(qt) - \sum_{j=0}^{m} y_j^1(qt)\right| + \left|\sum_{j=0}^{\infty} y_j^2(qt) - \sum_{j=0}^{m} y_j^2(qt)\right|\right) \le$$

$$\le L\left(\left|\sum_{j=m+1}^{\infty} y_j^1(qt)\right| + \left|\sum_{j=m+1}^{\infty} y_j^2(qt)\right|\right) \le$$

$$\le L\sum_{j=m+1}^{\infty} 2M^1\theta^i\tilde\lambda^{qt} \le 2LM^1\frac{\theta^{m+1}}{1-\theta}\tilde\lambda^{qt}.$$

Отже, в силу умови 3 знайдеться таке натуральне число N, що при всіх $m \ge N$ і довільному, як завгодно малому, $\varepsilon > 0$ має місце нерівність

$$2LM^1\frac{\theta^{m+1}}{1-\theta}\tilde\lambda^{qt} \le \varepsilon.$$

Таким чином, для всіх $m \ge N$, $t \in \mathbb{R}$ виконуються нерівності

$$\left|\tilde F^1\left(t, \sum_{j=0}^{\infty} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{\infty} y_j^2(qt)\right) - \tilde F^1\left(t, \sum_{j=0}^{m} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{m} y_j^2(qt)\right)\right| \le \varepsilon,$$

$$\left|\tilde F^2\left(t, \sum_{j=0}^{\infty} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{\infty} y_j^2(qt)\right) - \tilde F^2\left(t, \sum_{j=0}^{m} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{m} y_j^2(qt)\right)\right| \le \varepsilon,$$

і, отже, мають місце співвідношення

$$\lim_{m\to\infty}\tilde F^1\left(t, \sum_{j=0}^{m} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{m} y_j^2(qt)\right) = \tilde F^1\left(t, \sum_{j=0}^{\infty} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{\infty} y_j^2(qt)\right),$$

$$\lim_{m\to\infty}\tilde F^2\left(t, \sum_{j=0}^{m} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{m} y_j^2(qt)\right) = \tilde F^2\left(t, \sum_{j=0}^{\infty} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{\infty} y_j^2(qt)\right).$$

Цим самим доведено, що ряди

$$\tilde F^1(t, y_0^1(qt), y_0^2(qt)) + \sum_{i=2}^{\infty}\left(\tilde F^1\left(t, \sum_{j=0}^{i-1} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-1} y_j^2(qt)\right) - \right.$$

$$\left. -\tilde F^1\left(t, \sum_{j=0}^{i-2} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-2} y_j^2(qt)\right)\right),$$

$$\tilde F^2(t, y_0^1(qt), y_0^2(qt)) + \sum_{i=2}^{\infty}\left(\tilde F^2\left(t, \sum_{j=0}^{i-1} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-1} y_j^2(qt)\right) - \right.$$

$$\left. -\tilde F^2\left(t, \sum_{j=0}^{i-2} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-2} y_j^2(qt)\right)\right)$$

рівномірно збігаються при $t \in \mathbb{R}^+$ і їх суми дорівнюють

$$\tilde{F}^1\left(t, \sum_{j=0}^{\infty} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{\infty} y_j^2(qt)\right),\ \tilde{F}^2\left(t, \sum_{j=0}^{\infty} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{\infty} y_j^2(qt)\right).$$

Теорему 1 доведено.

Аналогічну теорему можна довести у випадку, коли $t \le 0$.

Теорема 2. Нехай виконуються умови:

1) $0 < \lambda_i < 1 < \lambda_j, i = 1,...,k, j = k+1,...,m, q > 1$;

2) $1 < \overline{\lambda} < \lambda_{**}, \overline{\lambda}^q > \lambda^{**}, \theta = \max\left\{\dfrac{L}{\overline{\lambda}^q - (\lambda^* + \delta_3)},\right.$ $\left.\dfrac{L}{\overline{\lambda}^q - (\lambda^{**} + \delta_4)}\right\} < 1,\ \lambda^* = \max\{\lambda_i, i = 1,...,k\}, \lambda^{**} =$ $= \max\{\lambda_j, j = k+1,...,m\}, \lambda_{**} = \min\{\lambda_j, j = k+1,...,m\}$.

3) $|\tilde{F}^i(t,x',y') - \tilde{F}^i(t,x'',y'')| \le L(|x'-x''| + |y'-y''|)$, $i = 1,2$, де $t \le 0$, $x', x'', y', y'' \in \mathbb{R}^n$, L — деяка додатна стала, $\tilde{F}^i(t,0,0) \equiv 0$.

Тоді система рівнянь (3) має сім'ю неперервних і обмежених при $t \le 0$ розв'язків, що залежить від довільної 1-періодичної вектор-функції $\omega_2(t)$ розмірності $m-k$.

Д о в е д е н н я. Розв'язок системи (3) шукатимемо у вигляді функціональних рядів

$$y^1(t) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i^1(t),\quad y^2(t) = \sum_{i=0}^{\infty} y_i^2(t), \tag{12}$$

де $y_i^1(t), y_i^2(t), i = 0,1,...,$ — деякі неперервні й обмежені при $t \le 0$ вектор-функції.

Оскільки ряди (доведення аналогічне тому, яке було проведено у теоремі 1)

$$\tilde{F}^1(t, y_0^1(qt), y_0^2(qt)) + \sum_{i=2}^{\infty}\left(\tilde{F}^1\left(t, \sum_{j=0}^{i-1} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-1} y_j^2(qt)\right) - \tilde{F}^1\left(t, \sum_{j=0}^{i-2} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-2} y_j^2(qt)\right)\right),$$

$$\tilde{F}^2(t, y_0^1(qt), y_0^2(qt)) + \sum_{i=2}^{\infty}\left(\tilde{F}^2\left(t, \sum_{j=0}^{i-1} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-1} y_j^2(qt)\right) - \tilde{F}^2\left(t, \sum_{j=0}^{i-2} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-2} y_j^2(qt)\right)\right)$$

рівномірно збігаються при $t \in \mathbb{R}^-$ і їх суми дорівнюють

$$\tilde{F}^1\left(t, \sum_{j=0}^{\infty} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{\infty} y_j^2(qt)\right) \text{ і } \tilde{F}^2\left(t, \sum_{j=0}^{\infty} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{\infty} y_j^2(qt)\right)$$

відповідно, то підставивши (12) в (3), отримаємо

$$\sum_{i=0}^{\infty} y_i^1(t+1) = J_1 \sum_{i=0}^{\infty} y_i^1(t) + \tilde{F}^1(t, y_0^1(qt), y_0^2(qt)) + \sum_{i=2}^{\infty}\left(\tilde{F}^1\left(t, \sum_{j=0}^{i-1} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-1} y_j^2(qt)\right) - \tilde{F}^1\left(t, \sum_{j=0}^{i-2} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-2} y_j^2(qt)\right)\right),$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} y_i^2(t+1) = J_2 \sum_{i=0}^{\infty} y_i^2(t) + \tilde{F}^2(t, y_0^1(qt), y_0^2(qt)) + \sum_{i=2}^{\infty}\left(\tilde{F}^2\left(t, \sum_{j=0}^{i-1} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-1} y_j^2(qt)\right) - \tilde{F}^2\left(t, \sum_{j=0}^{i-2} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-2} y_j^2(qt)\right)\right).$$

Звідси безпосередньо випливає, що якщо вектор-функції $y_i^1(t), y_i^2(t), i = 0,1,...,$ є розв'язками послідовності систем рівнянь

$$y_0^1(t+1) = J_1 y_0^1(t),\quad y_0^2(t+1) = J_2 y_0^2(t), \tag{13}$$

$$y_1^1(t+1) = J_1 y_1^1(t) + \tilde{F}^1(t, y_0^1(qt), y_0^2(qt)),\quad y_1^2(t+1) = J_2 y_1^2(t) + \tilde{F}^2(t, y_0^1(qt), y_0^2(qt)), \tag{14}$$

$$\begin{gathered} y_i^1(t+1) = J_1 y_i^1(t) + \tilde{F}^1\left(t, \sum_{j=0}^{i-1} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-1} y_j^2(qt)\right) - \tilde{F}^1\left(t, \sum_{j=0}^{i-2} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-2} y_j^2(qt)\right), \\ y_i^2(t+1) = J_2 y_i^2(t) + \tilde{F}^2\left(t, \sum_{j=0}^{i-1} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-1} y_j^2(qt)\right) - \tilde{F}^2\left(t, \sum_{j=0}^{i-2} y_j^1(qt), \sum_{j=0}^{i-2} y_j^2(qt)\right), \\ i = 2,3,..., \end{gathered} \tag{15}$$

то ряди (12) є формальним розв'язком системи рівнянь (3).

Беручи до уваги умови теореми, можна переконатися, що існують розв'язки, які задовольняють систему рівнянь (13), і виконуються оцінки

$$
\begin{aligned}
&|y_0^1(t)| = 0, \\
&|y_0^2(t)| \le M^2\bar{\lambda}^t,
\end{aligned}
\tag{16}
$$

де $M^2 = \max|\omega_2(t)|$.

Далі, з огляду на (14) та (16), отримаємо

$$
|y_1^1(t)| \le \sum_{j=1}^{\infty}|J_1^{j-1}||\tilde{F}^1(t-j, y_0^1(q(t-j)), y_0^2(q(t-j)))| \le
$$

$$
\le \sum_{j=1}^{\infty}(\lambda^* + \delta_3)^{j-1} L\,|y_0^2(q(t-j))| \le
$$

$$
\le \sum_{j=1}^{\infty}(\lambda^* + \delta_3)^{j-1} LM^2\bar{\lambda}^{q(t-j)} \le LM^2\frac{1}{\lambda^* + \delta_3}\times
$$

$$
\times\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda^* + \delta_3}{\bar{\lambda}^q}\right)^j \bar{\lambda}^{qt} \le M^2\frac{L}{\bar{\lambda}^q - (\lambda^* + \delta_3)}\cdot\bar{\lambda}^{qt} \le M^2\theta\bar{\lambda}^{qt},
$$

$$
|y_1^2(t)| \le \sum_{j=1}^{\infty}|J_2^{j-1}||\tilde{F}^2(t-j, y_0^1(q(t-j)), y_0^2(q(t-j)))| \le
$$

$$
\le \sum_{j=1}^{\infty}(\lambda^{**} + \delta_4)^{j-1} L\,|y_0^2(q(t-j))| \le
$$

$$
\le \sum_{j=1}^{\infty}(\lambda^{**} + \delta_4)^{j-1} LM^2\bar{\lambda}^{q(t-j)} \le LM^2\frac{1}{\lambda^{**} + \delta_4}\times
$$

$$
\times\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda^{**} + \delta_4}{\bar{\lambda}^q}\right)^j \bar{\lambda}^{qt} \le M^2\frac{L}{\bar{\lambda}^q - (\lambda^{**} + \delta_4)}\cdot\bar{\lambda}^{qt} \le M^2\theta\bar{\lambda}^{qt},
$$

де $\theta = \max\left\{\dfrac{L}{\bar{\lambda}^q - (\lambda^* + \delta_3)}, \dfrac{L}{\bar{\lambda}^q - (\lambda^{**} + \delta_4)}\right\}$.

Розглядаючи послідовно системи рівнянь (15) при $i = 2, 3, \ldots,$ легко показати, що ряди

$$
y_i^1(t) =
$$

$$
= \sum_{j=1}^{\infty}J_1^{j-1}\left[\tilde{F}^1\left(t-j, \sum_{j=0}^{i-1}y_j^1(q(t-j)), \sum_{j=0}^{i-1}y_j^2(q(t-j))\right) - \right.
$$

$$
\left. -\tilde{F}^1\left(t-j, \sum_{j=0}^{i-2}y_j^1(q(t-j)), \sum_{j=0}^{i-2}y_j^2(q(t-j))\right)\right],
$$

$$
y_i^2(t) =
$$

$$
= \sum_{j=1}^{\infty}J_2^{j-1}\left[\tilde{F}^2\left(t-j, \sum_{j=0}^{i-1}y_j^1(q(t-j)), \sum_{j=0}^{i-1}y_j^2(q(t-j))\right) - \right.
$$

$$
\left. -\tilde{F}^2\left(t-j, \sum_{j=0}^{i-2}y_j^1(q(t-j)), \sum_{j=0}^{i-2}y_j^2(q(t-j))\right)\right]
$$

$$
i = 2, 3, \ldots,
$$

рівномірно збігаються при $t \le 0$, задовольняють системи рівнянь (15) при $i = 2, 3, \ldots,$ і виконуються оцінки

$$
\begin{aligned}
&|y_i^1(t)| \le M^2\theta^i\bar{\lambda}^{qt}, \\
&|y_i^2(t)| \le M^2\theta^i\bar{\lambda}^{qt}, \\
&i = 2, 3, \ldots.
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Звідси випливає, що ряди (12) рівномірно збігаються при $t \le 0$ до деяких неперервних вектор-функцій $y(t) = (y^1(t), y^2(t))$, які є розв'язками системи рівнянь (3) і задовольняють умову

$$
|y^1(t)| \le \frac{M^2}{1-\theta}\bar{\lambda}^t, |y^2(t)| \le \frac{M^2}{1-\theta}\bar{\lambda}^t.
$$

Теорему 2 доведено.

Висновки

У статті встановлено нові умови існування неперервних розв'язків систем нелінійних функціонально-різницевих рівнянь, запропоновано метод побудови таких розв'язків та досліджено структуру їх множини. Основним результатом є теорема 1, в якій доведено існування сім'ї неперервних обмежених при $t \in R^+$ розв'язків, яка залежить від довільної 1-періодичної вектор-функції розмірності k.

Отримані результати доповнюють уже існуючі праці інших математиків і сприятимуть подальшому вивченню неперервних розв'язків більш широких класів таких рівнянь. До того ж цей матеріал у майбутньому буде використано при дослідженні функціонально-різницевих рівнянь вказаного вигляду, коли $A = A(t)$.

Список літератури

1. *Birkhoff G.D.* General theory of linear difference equations // Trans. Amer. Math. Soc. – 1911. – **12**. – P. 243–284.
2. *Trjitzinsky W.J.* Analytic theory of linear q-difference equations // Trans. Amer. Math. Soc. – 1933. – **61**. – P. 1–38.
3. *Пелюх Г.П., Сівак О.А.* Дослідження структури множини неперервних розв'язків систем лінійних функціонально-різницевих рівнянь // Нелінійні коливання. – 2009. – **12**, № 3. – С. 307–335.

4. *Сівак О.А.* Структура множини неперервних розв'язків систем лінійних функціонально-різницевих рівнянь // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2011. – № 4. – С. 81–87.
5. *Бецко І.В.* Дослідження структури множини неперервних розв'язків систем різницевих рівнянь // Наукові вісті НТУУ «КПІ». – 2015. – № 4. – С. 7–13.
6. *Бецко І.В.* Про існування неперервних розв'язків систем різницевих рівнянь // Нелінійні коливання. – 2016. – **19**, № 1. – С. 3–10.

References

1. G.D. Birkhoff, "General theory of linear difference equations", *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 12, pp. 243–284, 1911.
2. W.J. Trjitzinsky, "Analytic theory of linear q-difference equations", *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 61, pp. 1–38, 1933.
3. G.P. Pelyukh and O.A. Sivak, "A study of the structure of the set of continuous solutions to systems of linear functional-difference equations", *Neliniyni Kolyvannya*, vol. 12, no. 3, pp. 307–335, 2009 (in Ukrainian).
4. O.A. Sivak, "The structure of a set of continuous solutions of systems of linear functional difference equations", *Naukovi Visti NTUU KPI*, no. 4, pp. 81–87, 2011 (in Ukrainian).
5. I.V. Betsko, "Investigation of the structure of a set of continuous solutions of difference equations systems", *Naukovi Visti NTUU KPI*, no. 4, pp. 7–13, 2015 (in Ukrainian).
6. I.V. Betsko, "The existence of continuous solutions to systems of difference equations", *Neliniyni Kolyvannya*, vol. 19, no. 1, pp. 3–10, 2016 (in Ukrainian).

І.В. Бецко

ПОБУДОВА НЕПЕРЕРВНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ ФУНКЦІОНАЛЬНО-РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ

Проблематика. Досліджується структура множини розв'язків системи функціонально-різницевих рівнянь вигляду

$$x(t+1) = Ax(t) + F(t, x(qt)) \tag{1}$$

за деяких припущень відносно матриці A і числа q.

Мета дослідження. Побудова неперервних обмежених при $t \in \mathbb{R}^+(\mathbb{R}^-)$ розв'язків і дослідження структури їх множини.

Методика реалізації. Використовуються класичні методи теорії звичайних диференціальних і різницевих рівнянь.

Результати. Доведено існування сім'ї неперервних обмежених при $t \geq 0$ розв'язків, яка залежить від довільної 1-періодичної функції розмірності k. Аналогічний результат одержано також у випадку $t \leq 0$ (теорема 2).

Висновки. Встановлено нові достатні умови існування неперервних розв'язків систем функціонально-різницевих рівнянь вигляду (1), розроблено метод побудови таких розв'язків та досліджено структуру їх множини.

Ключові слова: функціонально-різницеві рівняння; неперервні обмежені розв'язки.

И.В. Бецко

ПОСТРОЕНИЕ НЕПРЕРЫВНЫХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Проблематика. Исследуется структура множества решений системы функционально-разностных уравнений вида

$$x(t+1) = Ax(t) + F(t, x(qt)) \tag{1}$$

при некоторых предположениях относительно матрицы A и числа q.

Цель исследования. Построение непрерывных ограниченных при $t \in \mathbb{R}^+(\mathbb{R}^-)$ решений и исследование структуры их множества.

Методика реализации. Используются классические методы теории обычных дифференциальных и разностных уравнений.

Результаты. Доказано существование семьи непрерывных ограниченных при $t \geq 0$ решений, которая зависит от произвольной 1-периодической функции размерности k. Аналогический результат получен также для случая $t \leq 0$ (теорема 2).

Выводы. Установлены новые достаточные условия существования непрерывных решений систем функционально-разностных уравнений вида (1), разработан метод построения таких решений, и исследована структура их множества.

Ключевые слова: функционально-разностные уравнения; непрерывные ограниченные решения.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
24 травня 2016 року