УДК 517.9
DOI: 10.20535/1810-0546.2016.4.58939

Т.І. Вдовенко
Національний технічний університет України “КПІ”, Київ, Україна

ЗАДАЧА ДВОХ ТІЛ ПРИ СИНГУЛЯРНОМУ РАНГУ ОДИН НЕСИМЕТРИЧНОМУ ЗБУРЕННІ

Background. We consider nonself-adjoint singular perturbation of rank one of a self-adjoint operator by nonsymmetrical potential, i.e., the formal expression $\tilde{A} = A + \alpha\langle\cdot,\omega_1\rangle\omega_2$, where A is semibounded self-adjoint operator in the separable Hilbert space $\mathcal{H}$, $\alpha \in \mathbb{C}$. In compare with many previous studies of self-adjoint perturbation, the vectors $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{H}_{-2}$, are different, i.e., $\omega_1 \neq \omega_2$, that is some general problem about nonlocal interactions. The additional difficulties are that the Hilbert space H has a form of tensor product of spaces $H = \mathcal{K} \otimes \mathcal{H}$, and the operator has a form $\mathcal{A} = B \otimes I_{\mathcal{H}} + I_{\mathcal{K}} \otimes A$, which together illustrate the problem of two bodies.

Objective. The purpose of research in our work is the description of singular perturbation of operator of the form $\mathcal{A} = B \otimes I_{\mathcal{H}} + I_{\mathcal{K}} \otimes A$, where $\tilde{A}$ is a self-adjoint operator that is singularly perturbed by nonsymmetric potential of rank one.

Methods. We use the assertion of about the presentation in the resolvent form of a rank one singular perturbation of a self-adjoint operator by symmetric potential, which corresponds to the problem of two bodies, and the definition of the operator singularly rank one perturbed by nonsymmetric potential $\tilde{A}$.

Results. The representation of the operator $\tilde{A}$, given by formal expression in the form of resolvent is our main result.

Conclusions. We present the resolvent form for singularly perturbed self-adjoint rank one operator, which perturbed by nonsymmetric potential, appropriate the problem of two bodies. By representation we take into account the case when the perturbed operator requires additional parameterization. We look for the application of the general results to describe the problem with the use of two bodies Laplace operator perturbed by nonsymmetric potentials composed of δ-functions Dirac in $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$.

Keywords: singular perturbations; nonsymmetrical perturbations; nonlocal interaction; problem of two bodies.

Вступ

У монографії [1] наведені широкі дослідження з різних питань, які стосуються сингулярних збурень самоспряжених операторів загального вигляду:

$$\tilde{A} = A + \sum_{i,j=1}^{n\leq\infty} \alpha_{i,j}\langle\cdot,\omega_i\rangle\omega_j,\ \omega_i \in \mathcal{H}_{-2}\backslash\mathcal{H}, \quad \alpha_{i,j} \in (\mathbb{R}\cap\infty), \tag{1}$$

де $A = A^*$ — самоспряжений оператор у гільбертовому просторі $\mathcal{H}$, $\{\alpha_{i,j}\}$ — симетрична матриця з дійсними коефіцієнтами, серед яких є ненульові; $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — дуальний для $\mathcal{H}_{+2}$ і $\mathcal{H}_{-2}$ скалярний добуток, $\mathcal{H}_{+2}$ і $\mathcal{H}_{-2}$ — простори з A-шкали просторів. У [2] наведені не менш широкі дослідження з різних питань, які стосуються сингулярних збурень самоспряжених операторів спеціального вигляду:

$$-\tilde{\Delta} := -\Delta + \sum_{i,j=1}^{n\leq\infty} \alpha_i\langle\cdot,\delta(x-x_i)\rangle\,\delta(x-x_i), \tag{2}$$

$$\alpha_i \in (\mathbb{R}\cap\infty\setminus\{0\}),$$

де $\delta(x-x_i)$ — δ-функції Дірака, зосереджені в точках x_i; $\delta(x-x_i) \in \mathcal{H}_{-2} := W_2^{-2}(\mathbb{R}^1)$ — негативний соболівський простір, відповідний $W_2^{-2}(\mathbb{R}^1)$, і $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — дуальний для W_2^2 і W_2^{-2} скалярний добуток.

У цій статті продовжується розгляд узагальнення (1) на випадок

$$\tilde{A} = A + \alpha\langle\cdot,\omega_1\rangle\,\omega_2,\ \omega_1,\omega_2 \in \mathcal{H}_{-2}\backslash\mathcal{H}, \tag{3}$$

де $A = A^*$ самоспряжений оператор у гільбертовому просторі $\mathcal{H}$, але комплексна константа зв’язку $\alpha \in \mathbb{C}\cup\infty$ і $\omega_1 \neq \omega_2$.

Нагадаємо, що якщо в (3) покласти $\omega_1 = \omega_2$ і $\alpha \in \mathbb{R}\cup\infty$, то отримуємо результати звичайної теорії самоспряжених сингулярних збурень [1, 3, 4].

Спектральні властивості наведеного в (3) оператора $\tilde{A}$ та відповідного оператора $-\tilde{\Delta}$ в (2) при $n = 1$ обговорені в [5, 6].

Ідейно найбільш близькими до задачі нашої роботи є дослідження з нелокальними (але симетричними) взаємодіями [7, 8].

Постановка задачі

Завданням роботи є розв'язання задачі двох тіл для сингулярних рангу один несиметричних збурень заданого самоспряженого оператора у загальній постановці. Під розв'язанням розуміється запис резольвенти відповідного збуреного оператора.

Для реалізації цього завдання використовуються результати попередніх робіт [5, 6], а саме означення та вигляд резольвенти оператора $A^{\omega_1,\omega_2} = (\mathbf{A} f + \alpha\langle\cdot,\omega_1\rangle\omega_2)\restriction_{\mathcal{H}}$.

Попередні відомості

Нехай $\mathcal{H}$ — сепарабельний гільбертів простір зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$ і нормою $\|\cdot\| = \sqrt{(\cdot,\cdot)}$. Розглянемо самоспряжений напівобмежений оператор $A = A^*$, визначений на $\mathfrak{D}(A)$ в $\mathcal{H}$. Множини $\sigma(\cdot)$, $\rho(\cdot)$ позначають відповідно спектр і регулярні точки цього оператора.

Оператор A асоційований з A-шкалою гільбертових просторів [1, 9]. Розглянемо лише частину A-шкали, а саме:

$$\mathcal{H}_{-2} \supset \mathcal{H}_{-1} \supset \mathcal{H} \equiv \mathcal{H}_0 \supset \mathcal{H}_{+1} \supset \mathcal{H}_{+2}, \tag{4}$$

де $\mathcal{H}_{+1} := \mathfrak{D}(|A|^{1/2})$ і $\mathcal{H}_{+2} := \mathfrak{D}(A)$ з нормами $\|\varphi\|_k = \|(|A|+I)^{k/2}\varphi\|$, $k = 1,2$, $\varphi \in \mathcal{H}_k(A)$ відповідно (I — одиничний оператор); $\mathcal{H}_{-k} := \mathcal{H}_{-k}(A)$ — негативний (дуальний) простір, тобто доповнення $\mathcal{H}$ відносно норми $\|f\|_{-k} = \|(|A|+I)^{-k/2} f\|$, $k = 1,2$, $f \in \mathcal{H}$. Нехай $\langle\cdot,\cdot\rangle$ позначає дуальний скалярний добуток для просторів $\mathcal{H}_k$ і $\mathcal{H}_{-k}$. Скалярний добуток у $\mathcal{H}_k$ і $\mathcal{H}_{-k}$ позначається $(\cdot,\cdot)_{\pm k}$, $k = 1,2$.

Оператор A має продовження за неперервністю на $\mathcal{H}$ $(\mathcal{H}_{+1})$ і є обмеженим оператором з $\mathcal{H}$ $(\mathcal{H}_{+1})$ у $\mathcal{H}_{-2}$ $(\mathcal{H}_{-1})$. Позначимо таке продовження через $\mathbf{A}$ і $\mathbf{R}_z = (\mathbf{A} - z)^{-1}$, де $z \in \rho(A)$ — відповідна резольвента.

Розглянемо оператор $V = \alpha\langle\cdot,\omega_1\rangle\omega_2$ в A-шкалі, $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{H}_{-2}$. Очевидно $\mathfrak{D}(V) \subseteq \mathcal{H}_{+k}$ і $\Re(V) \subseteq \mathcal{H}_{-k}$, $k = 1,2$. Оскільки оператор $\mathbf{A}$ обмежений і діє з $\mathcal{H}_0$ у весь $\mathcal{H}_{-k}$, $k = 1,2$, то $\mathbf{A} + V$ — обмежений лінійний оператор з $\mathcal{H}_{+k}$ у $\mathcal{H}_{-k}$. Зауважимо, що, згідно з [3], спряжений оператор $(\mathbf{A} + V)^*$ визначений і діє також з $\mathcal{H}_{+k}$ у $\mathcal{H}_{-k}$, $k = 1,2$.

Тепер досліджуваний формальний вираз $A + \alpha\langle\cdot,\omega_1\rangle\omega_2$ є оператором $\mathbf{A} + \langle\cdot,\omega_1\rangle\omega_2$ (з $\alpha = 1$), визначеним на $\mathcal{H}_{+k}$, що діє з $\mathcal{H}_{+k}$ в $\mathcal{H}_{-k}$, $k = 1,2$, і обмеженим на $\mathcal{H}$, тобто:

$$A^{\omega_1,\omega_2} = (\mathbf{A} f + \alpha\langle\cdot,\omega_1\rangle\omega_2)\restriction_{\mathcal{H}}. \tag{5}$$

Не втрачаючи загальності, в подальшому тексті пишемо A замість $\mathbf{A}$ і, відповідно, R_z замість $\mathbf{R}_z$. Вважатимемо також, що оператор A строго додатний: $A > 0$. Дамо конструктивне означення оператора A^{ω_1,ω_2}.

Означення. Нехай A — додатний самоспряжений оператор у сепарабельному гільбертовому просторі $\mathcal{H}$. Розглянемо A^{ω_1,ω_2}, записаний у (5), з $\omega_i \in \mathcal{H}_{-2} \backslash \mathcal{H}$, $\omega_1 \neq \omega_2$. Покладемо $\eta_i = \mathbf{A}^{-1}\omega_i$, $k = 1,2$.

Оператор A^{ω_1,ω_2} називається несиметричним сингулярно рангу один збуреним, що вимагає додаткової параметризації відносно оператора A, якщо $|A^{1/2}\eta_2, A^{1/2}\eta_1| = \infty$. При цьому

$$\mathfrak{D}(A^{\omega_1,\omega_2}) = \Bigg\{ \psi = \varphi + b\eta_2 \mid \varphi \in \mathfrak{D}(A), \quad b = b(\varphi) = = \frac{(A\varphi, \eta_1)}{1 + \tau + (A^{1/2}(A^2+1)^{-1/2}\eta_2, A^{1/2}(A^2+1)^{-1/2}\eta_1)} \Bigg\} \tag{6}$$

у випадку $(A^{1/2}(A^2+1)^{-1/2}\eta_2,\ A^{1/2}(A^2+1)^{-1/2}\eta_1) \neq \neq -\tau - 1$, де $\tau \in \mathbb{C}$ — параметр, і

$$\mathfrak{D}(A^{\omega_1,\omega_2}) = \mathfrak{D}_{\mathcal{H}_1} \dotplus \{c\,\eta_2\}, \quad \mathfrak{D}_{\mathcal{H}_1} = \{\varphi \in \mathfrak{D}(A) \mid (A\varphi, \eta_1) = 0\} \tag{7}$$

у випадку $(A^{1/2}(A^2+1)^{-1/2}\eta_2, A^{1/2}(A^2+1)^{-1/2}\eta_1) = = -\tau - 1$.

Збурений оператор діє за правилом

$$A^{\omega_1,\omega_2}\psi = A\varphi$$

у кожному з випадків. Такий оператор позначаємо $A^{\omega_1,\omega_2} \in P_\tau(A)$.

Якщо $|A^{1/2}\eta_2, A^{1/2}\eta_1| < \infty$ в означенні, то, поклавши

$$\tau = (A^{1/2}(A^2+1)^{-1/2}\eta_2, A^{1/2}(A^2+1)^{-1/2}\eta_1),$$

отримаємо означення, яке розглядалося в [5], а саме випадок, у якому збурений оператор не вимагає додаткової параметризації і визначається однозначно за константою зв'язку α (і векторами ω_1, ω_2). Множина так збурених операторів позначається $P(A)$.

Якщо $|A^{1/2}\eta_2, A^{1/2}\eta_1| = \infty$, то знаменник у (6) не дорівнює нулю, оскільки

$$|(A^{1/2}(A^2+1)^{-1/2}\eta_2, A^{1/2}(A^2+1)^{-1/2}\eta_1)| < \infty,$$
$$\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{H}_{-2}.$$

Для початку коротко зауважимо, що якщо $\tilde{A} \in P_\tau(A)$, то для спряженого оператора також $\tilde{A}^* \in P_\tau(A)$, згідно з дослідженнями [3].

Також використаємо той факт [5, 6], що для резольвент $R_z = (A-z)^{-1}$ і $\tilde{R}_z = (\tilde{A}-z)^{-1}$ операторів $A = A^*$ і $\tilde{A} \in P_\tau(A)$ у сепарабельному гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ можна записати формулу типу М. Крейна $z, \xi, \zeta \in \rho(A) \cap \rho(\tilde{A})$:

$$\tilde{R}_z = R_z + b_z(\cdot, n_{\bar{z}})m_z \tag{8}$$

з дефектними векторами

$$n_z = (A-\xi)(A-z)^{-1}n_\xi,$$
$$m_z = (A-\zeta)(A-z)^{-1}m_\zeta, \tag{9}$$

де $n_z, m_z \in \mathcal{H} \setminus \mathcal{H}_{+2}$, і скалярнозначною функцією

$$b_z^{-1} - b_\xi^{-1} = (\xi - z)(m_\xi, n_{\bar{z}}). \tag{10}$$

Вектори n_z, m_z і число b_z пов'язані з ω_1, ω_2 таким чином:

$$n_z = R_z\omega_1, m_z = R_z\omega_2,$$
$$-b_z^{-1} = \alpha^{-1} + \tau + \tag{11}$$
$$+\langle (A^2+1)^{-1}\omega_2, (1+\bar{z}A)^{-1/2}R_{\bar{z}}\omega_1\rangle,$$

де $\alpha \in \mathbb{C}$.

Випадок $\alpha = 0$ включений до розгляду, оскільки при $\alpha = 0$ вважається $b_z \equiv 0$ і $\tilde{R}_z \equiv R_z$, тобто збурення відсутнє.

Вираз (8) із (9)–(11) може виступати як означення оператора $\tilde{A}$.

Задача двох тіл при сингулярному несиметричному збуренні

Нехай задано сепарабельний гільбертів простір H, розкладений у тензорний добуток двох гільбертових просторів:

$$H = \mathcal{K} \otimes \mathcal{H}. \tag{12}$$

Розглянемо необмежений самоспряжений оператор

$$\mathcal{A} = B \otimes I_{\mathcal{H}} + I_{\mathcal{K}} \otimes A, \tag{13}$$

заданий на просторі (12), де $\mathfrak{D}(B)$ щільна в $\mathcal{K}$, а $\mathfrak{D}(A)$ щільна в $\mathcal{H}$. Надалі припускаємо технічну умову, що оператор $B \otimes A$ є додатним.

Також розглянемо сингулярне збурення рангу один оператора $\mathcal{A}$ несиметричним потенціалом

$$\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} + \alpha\langle\cdot, \omega_1\rangle\omega_2,$$

де $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{H}_{-2}$, $\omega_1 \neq \omega_2$, $\alpha \in \mathbb{C}$, тобто оператор заданий формальним виразом

$$\tilde{\mathcal{A}} = B \otimes I_{\mathcal{H}} + I_{\mathcal{K}} \otimes (A + \alpha\langle\cdot, \omega_1\rangle_{\mathcal{H}}\omega_2).$$

Для визначення $\tilde{\mathcal{A}}$ необхідно визначити $\tilde{A} = A + \alpha\langle\cdot, \omega_1\rangle_{\mathcal{H}}\omega_2$. Згідно з наведеним у попередніх відомостях, для регулярних $z \in \rho(A) \cap \cap \rho(\tilde{A})$ маємо

$$(\tilde{A} - z)^{-1} := (A-z)^{-1} + b_z(\cdot, n_{\bar{z}})m_z,$$

де n_z, m_z та b_z визначені у (9)–(11).

Теорема. Нехай у просторі H, визначеному в (12), задано оператор $\mathcal{A} = B \otimes I_{\mathcal{H}} + I_{\mathcal{K}} \otimes A$, який задовольняє умову, що оператор $B \otimes A$ – додатний.

Тоді резольвента збуреного оператора $\tilde{\mathcal{A}} = B \otimes I_{\mathcal{H}} + I_{\mathcal{K}} \otimes \tilde{A} \in P_\tau(\mathcal{A})$ для $z \in \rho(A) \cap \rho(\tilde{A})$, де $\tilde{A} \in P_\tau(A)$ визначено за допомогою (8) із (9)–(11), має вигляд

$$(\tilde{\mathcal{A}}-z)^{-1}=(\mathcal{A}-z)^{-1}+(\mathcal{A}-z)^{-1}\times$$
$$\times\left\{\frac{1}{\begin{array}{l}1/\alpha+\tau+\langle\omega_2,(\mathcal{A}-\lambda)^{-1}\times\\ \times(I+(z-B)\otimes A)(A^2+1)^{-1}\omega_1\rangle\end{array}}\times\right.$$
$$\left.\times\langle\cdot,(\mathcal{A}-\bar{z})^{-1}\omega_1\rangle\otimes\omega_2\right\}.$$

Доведення. За браком місця наведемо лише основну змістовну частину доведення. Нехай F_B — оператор, який переводить оператор B у множення на незалежну змінну x у відповідному просторі L_2 із мірою. Зауважимо, що в [6, 10] було обґрунтовано, що $\tilde{A}$ є оператором спектрального та скалярного типу. Отже F_B — існує.

Покладемо $(\tilde{\mathcal{A}}-z)^{-1}f=\psi$ для $\forall f\in\mathcal{K}\otimes I+ +I\otimes\mathcal{H}$. Тоді для $f=(\tilde{\mathcal{A}}-z)\psi$ маємо

$$F_Bf=(x+\tilde{A}-z)F_B\psi.$$

А отже,

$$F_B\psi=(\tilde{A}-(z-x))^{-1}F_Bf=(A-(z-x))^{-1}F_Bf+$$
$$+b_z\langle F_Bf,(A-(\bar{z}-x))^{-1}\omega_1\rangle\otimes(A-(z-x))^{-1}\omega_2,$$

де $b_z^{-1}=1/\alpha+\tau+\langle\omega_2,(\mathcal{A}-\lambda)^{-1}(I+(z-B)\otimes A)\times\times(A^2+1)^{-1}\omega_1\rangle$.

Таким чином,

$$\psi=(\mathcal{A}-z)^{-1}+(\mathcal{A}-z)^{-1}\times$$
$$\times\left\{\frac{1}{\begin{array}{l}1/\alpha+\tau+\langle\omega_2,(\mathcal{A}-\lambda)^{-1}(I+(z-B)\otimes A)\times\\ \times(A^2+1)^{-1}\omega_1\rangle\end{array}}\times\right.$$
$$\left.\times\langle\cdot,(\mathcal{A}-\bar{z})^{-1}\omega_1\rangle\otimes\omega_2\right\}.$$

Насамкінець зауважимо ряд на перший погляд очевидних (насправді не простих) імплікацій.

Якщо $\tilde{A}\in P_\tau(A)$, тобто $|\langle\omega_2,(A-\bar{z})^{-1}\omega_1\rangle_{\mathcal{H}}|=\infty$, то тоді $|\langle\omega_2,(\mathcal{A}-\bar{z})^{-1}\omega_1\rangle_H|=\infty$, тому і $\tilde{\mathcal{A}}\in \in P_\tau(\mathcal{A})$. Також, оскільки

$$|\langle\omega_2,(\mathcal{A}-\lambda)^{-1}(I+(z-B)\otimes A)(A^2+1)^{-1}\omega_1\rangle_{\mathcal{H}}|<\infty,$$

то і

$$|\langle(A^2+1)^{-1}\omega_2,(1+\bar{z}A)^{-1}(A-z)^{-1}\omega_1\rangle_{\mathcal{H}}|<\infty.$$

Якщо $\tilde{A}\in P_\tau(A)$, тобто $|\langle\omega_2,(A-\bar{z})^{-1}\omega_1\rangle_{\mathcal{H}}|<\infty$, то тоді $|\langle\omega_2,(\mathcal{A}-\bar{z})^{-1}\omega_1\rangle_H|<\infty$, тому і $\tilde{\mathcal{A}}\in P(\mathcal{A})$.

Для збурення, яке не вимагає додаткової параметризації, попередня теорема має дещо спрощений вигляд. Наведемо такий варіант твердження у вигляді наслідку. У наших подальших дослідженнях наслідок матиме більше застосувань.

Наслідок. Нехай у просторі H, визначеному в (12), задано оператор $\mathcal{A}=B\otimes I_{\mathcal{H}}+ +I_{\mathcal{K}}\otimes A$, який задовольняє умову, що оператор $B\otimes A$ — додатний.

Тоді резольвента збуреного оператора $\tilde{\mathcal{A}}=B\otimes I_{\mathcal{H}}+I_{\mathcal{K}}\otimes\tilde{A}\in P(\mathcal{A})$ для $z\in\rho(A)\cap\rho(\tilde{A})$, де $\tilde{A}\in P(A)$ визначено за допомогою (8) із (9)–(11), але $-b_z^{-1}=\alpha^{-1}+\tau+\langle\omega_2,(\mathcal{A}-\bar{z})^{-1}\omega_1\rangle$, має вигляд

$$(\tilde{\mathcal{A}}-z)^{-1}=(\mathcal{A}-z)^{-1}+(\mathcal{A}-z)^{-1}\times$$
$$\times\left\{\frac{1}{1/\alpha-\langle\omega_2,(\mathcal{A}-\lambda)^{-1}\omega_1\rangle}\langle\cdot,(\mathcal{A}-\bar{z})^{-1}\omega_1\rangle\otimes\omega_2\right\}.$$

Приклад

Розглянемо простір $L_2([1,\infty]\times[1,\infty],dxdy)\equiv \equiv L_2([1,\infty],dx)\times L_2([1,\infty],dy)$ і оператор множення вигляду $\mathcal{A}f(x,y)=(x+y)f(x,y)$. Очевидно, $\mathcal{A}=B\otimes I+I\otimes A$ із $Bf(x,y)=xf(x,y)$ і $Af(x,y)=yf(x,y)$. Розглянемо також збурений оператор $\tilde{A}=x+\alpha\langle\cdot,y^{1/4}\rangle y^{3/4}$ і

$$\tilde{\mathcal{A}}=B\otimes I+I\otimes\tilde{A}=x+y+\alpha\langle\cdot,y^{1/4}\rangle y^{3/4},$$

де $\langle\cdot,\cdot\rangle:=\langle\cdot,\cdot\rangle_{L_2([1,\infty],dy)}$. Оскільки $0\in\rho(A)$ і $0\in\rho(\mathcal{A})$, то, використовуючи наслідок із теореми, запишемо резольвенту оператора $\mathcal{A}$ у цій точці, тобто по суті обернений оператор:

$$\tilde{\mathcal{A}}^{-1}=\frac{1}{x+y}-\frac{1}{1/\alpha+\left\langle\frac{1}{y^{1/4}},\frac{1}{(x+y)y^{3/4}}\right\rangle}\times$$

$$\times\left\langle \cdot, \frac{1}{(x+y)y^{1/4}} \right\rangle \frac{1}{(x+y)y^{3/4}},$$

або точніше

$$\tilde{A}^{-1}h(x,y) =$$

$$= \frac{h(x,y)}{x+y} - \frac{1}{1/\alpha + \frac{1}{x}\ln(1+x)} \frac{1}{y^{3/4}(x+y)} \times$$

$$\times \int_1^\infty \frac{h(x,y)}{(x+y)} \frac{dy}{y^{1/4}}$$

для всіх $h(x,y) \in L_2([1,\infty]\times[1,\infty], dxdy)$. Зауважимо, що у випадку прикладу $\tilde{A} \in P(\mathcal{A})$.

Висновки

Наведена резольвентна форма для сингулярно збуреного рангу один самоспряженого оператора при збурені несиметричним потенціалом, який відповідає задачі двох тіл. При записі враховано випадок збурення, який вимагає додаткової параметризації.

Планується застосування отриманих загальних результатів для опису задачі двох тіл із використанням оператора Лапласа, збуреного несиметричними потенціалами, що складені з δ-функцій Дірака в $\mathbb{R}^n$, $n = 2,3$.

Наслідуючи наведену методику, можна розглядати задачу багатьох тіл у теорії сингулярно збурених операторів і збурень рангу більше за один.

Список літератури

1. *Albeverio S., Kurasov P.* Singular perturbations of differential operators. Solvable Schrödinger type operators // London Math. Soc. Lecture Note. Ser. 271. – Cambridge: Cambridge University Press, 2000. – 444 p.
2. *Solvable* models in quantum mechanics / S. Albeverio, F. Gesztesy, R. Hшegh-Krohn, H. Holden; with an appendix by Pavel Exner. – 2nd ed. – Providence, RI: AMS Chelsea Publishing, 2005. – 488 p.
3. *Berezansky Y., Brasche J.* Generalized selfadjoint operators and their singular perturbations // Methods Funct. Anal. Topology. – 2001. – **7**, № 3. – P. 54–66.
4. *Koshmanenko V.* Singular quadratic forms in perturbation theory // Mathematics and its Applications. – 1999. – **474**. – pp. viii + 308.
5. *Вдовенко Т.І., Дудкін М.Є.* Сингулярні рангу один несиметричні збурення самоспряженого оператора // Спектральна теорія операторів та наборів операторів // Зб. пр. ін-ту матем. НАН України. – 2015. – **12**, № 1. – С. 57–73.
6. *Вдовенко Т.І., Дудкін М.Є.* Хвильові оператори для сингулярного несиметричного збурення самоспряженого оператора // Буковинський мат. журн. – 2015. – **3**, № 1. – С. 25–29.
7. *Nizhnik L.* Inverse nonlocal Sturm-Liouville problem // Inverse Problems. – 2010. – **26**. – P. 5235–35.
8. *Nizhnik L.* Inverse spectral nonlocal problem for the first order ordinary differential equation // Tamkang J. Math. – 2011. – **42**, № 3. – P. 385–394.
9. *Кошманенко В.Д., Дудкін М.Є.* Методи оснащених просторів у теорії сингулярних збурень самоспряжених операторів. – К.: Інститут математики, 2013. – **96**. – 320 с. – (Праці Ін-ту математики НАН України).
10. *Вдовенко Т.І.* Хвильові оператори сингулярного збурення рангу один несиметричним потенціалом // Наукові вісті НТУУ “КПІ”. – 2015. – № 4. – С. 13–17.

References

1. S. Albeverio and P. Kurasov, “Singular perturbations of differential operators. Solvable Schrödinger type operators”, in *London Math. Soc. Lecture Note, Ser. 271.* Cambridge, GB: Cambridge University Press, 2000.
2. S. Albeverio *et al., Solvable Models in Quantum Mechanics*, 2nd ed., appendix by P. Exner. Providence, RI: AMS Chelsea Publishing, 2005, 488 p.
3. Y. Berezansky and J. Brasche, “Generalized selfadjoint operators and their singular perturbations”, *Methods Funct. Anal. Topology*, vol. 7, no. 3, pp. 54–66, 2001.
4. V. Koshmanenko, “Singular quadratic forms in perturbation theory”, *Mathematics and its Applications*, vol. 474, pp. viii + 308, 1999.
5. T.I. Vdovenko and M.E. Dudkin, “Singular nonsymmetric rank one perturbation of selfadjoint operator. Spectral theory of operators and sets of operators”, *Zbirnyk Prats Instytutu Matematyky NAN Ukrainy*, vol. 12, no. 1, pp. 57–73, 2015 (in Ukrainian).
6. T.I. Vdovenko and M.E. Dudkin, “Wave operators for singular nonsymmetric perturbation of selfadjoint operator”, *Bukovyns'kyy Matematychnyy Zhurnal*, vol. 3 , no. 1, pp. 25–29, 2015 (in Ukrainian).
7. L. Nizhnik, “Inverse nonlocal Sturm-Liouville problem”, *Inverse Problems*, vol. 26, pp. 523–535, 2010.

8. L. Nizhnik, "Inverse spectral nonlocal problem for the first order ordinary differential equation", *Tamkang J. Math.*, vol. 42, no. 3, pp. 385–394, 2011.
9. M.E. Dudkin and V.D. Koshmanenko, Methods of Equipped Space in the Theory of Singular Perturbations of Selfadjoint Operator. Kyiv, Ukraine: Institute of Mathematics of NASU, 2013, vol. 96 (Ser. Proc. Inst. Math. NASU) (in Ukrainian).
10. T.I. Vdovenko, "Wave operators of a rank one singular perturbation by nonsymmetric potential", *Naukovi Visti NTUU KPI*, no. 4, pp. 13–17, 2015 (in Ukrainian).

Т.І. Вдовенко

ЗАДАЧА ДВОХ ТІЛ ПРИ СИНГУЛЯРНОМУ РАНГУ ОДИН НЕСИМЕТРИЧНОМУ ЗБУРЕННІ

Проблематика. Розглядаються несамоспряжені сингулярні збурення рангу один самоспряженого оператора несиметричним потенціалом, тобто формальні вирази вигляду $\tilde{A} = A + \alpha\langle\cdot,\omega_1\rangle\omega_2$, де A – самоспряжений напівобмежений оператор у сепарабельному гільбертовому просторі $\mathcal{H}$, $\alpha \in \mathbb{C}$. На відміну від численних попередніх досліджень самоспряжених збурень, вектори $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{H}_{-2}$ різні, тобто $\omega_1 \neq \omega_2$, що є деякою загальною постановкою про задачу із нелокальними сингулярними взаємодіями. Додаткове ускладнення полягає в тому, що гільбертів простір H має зображення у вигляді тензорного добутку просторів $H = \mathcal{K} \otimes \mathcal{H}$, а оператор має зображення $\mathcal{A} = B \otimes I_{\mathcal{H}} + I_{\mathcal{K}} \otimes A$, що в сукупності моделює задачу двох тіл.

Мета дослідження. Опис сингулярно збуреного оператора вигляду $\tilde{\mathcal{A}} = B \otimes I_{\mathcal{H}} + I_{\mathcal{K}} \otimes \tilde{A}$, де $\tilde{A}$ – сингулярно збурений несиметричним потенціалом рангу один самоспряжений оператор.

Методика реалізації. Використано твердження про зображення у формі резольвенти сингулярного рангу один збурення самоспряженого оператора симетричним потенціалом, що відповідає задачі двох тіл, та означення оператора сингулярно збуреного рангу один несиметричним потенціалом $\tilde{A}$.

Результати дослідження. Результатом роботи є зображення оператора $\tilde{\mathcal{A}}$, поданого формальним виразом, у формі резольвенти.

Висновки. Наведено резольвентну форму для сингулярно збуреного рангу один самоспряженого оператора при збуренні несиметричним потенціалом, який відповідає задачі двох тіл. При записі враховано випадок збурення, який вимагає додаткової параметризації. Планується застосування отриманих загальних результатів для опису задачі двох тіл із використанням оператора Лапласа, збуреного несиметричними потенціалами, що складені з δ-функцій Дірака в $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$.

Ключові слова: сингулярні збурення; несиметричні збурення; нелокальна взаємодія; задача двох тіл.

Т.И. Вдовенко

ЗАДАЧА ДВУХ ТЕЛ ДЛЯ СИНГУЛЯРНОГО РАНГА ОДИН НЕСИММЕТРИЧНОГО ВОЗМУЩЕНИЯ

Проблематика. Рассматриваются несамосопряженные сингулярные возмущения ранга один самосопряженного оператора несимметричным потенциалом, то есть формальное выражение вида $\tilde{A} = A + \alpha\langle\cdot,\omega_1\rangle\omega_2$, где A – самосопряженный полуограниченный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, $\alpha \in \mathbb{C}$. В отличии от многочисленных предыдущих исследований самосопряженных возмущений, векторы $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{H}_{-2}$ являются разными, то есть $\omega_1 \neq \omega_2$, что является некоторой постановкой общей задачи о нелокальных сингулярных взаимодействиях. Дополнительное усложнение заключается в том, что гильбертово пространство H имеет вид тензорного произведения пространств $H = \mathcal{K} \otimes \mathcal{H}$, а оператор имеет вид $\mathcal{A} = B \otimes I_{\mathcal{H}} + I_{\mathcal{K}} \otimes A$, что в совокупности моделирует задачу двух тел.

Цель исследования. Описание сингулярного возмущения оператора вида $\tilde{\mathcal{A}} = B \otimes I_{\mathcal{H}} + I_{\mathcal{K}} \otimes \tilde{A}$, где $\tilde{A}$ – сингулярно возмущенный несимметричным потенциалом ранга один самосопряженный оператор.

Методика реализации. Использованы утверждения о представлении в форме резольвент сингулярного ранга один возмущенного самосопряженного оператора симметричным потенциалом, что соответствует задаче двух тел, и определения оператора сингулярно возмущенного ранга один несимметричным потенциалом $\tilde{A}$.

Результаты исследований. Результатом работы является представление оператора $\tilde{\mathcal{A}}$, данного формальным выражением, в форме резольвенты.

Выводы. Приведена резольвента сингулярно возмущенного ранга один самосопряженного оператора при возмущении несимметричным потенциалом, соответствующим задаче двух тел. При записи учтен случай возмущения, который требует дополнительной параметризации. Планируется использование полученных общих результатов для описания задачи двух тел с использованием оператора Лапласа, возмущенного несимметричными потенциалами, которые составлены из δ-функций Дирака в $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$.

Ключевые слова: сингулярные возмущения; несимметричные возмущения; нелокальное взаимодействие; задача двух тел.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
7 грудня 2015 року