УДК 519.21
DOI: 10.20535/1810-0546.2017.4.106506

О.І. Клесов, І.І. Сіренька, О.А. Тимошенко*
КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

ПОСИЛЕНИЙ ЗАКОН ВЕЛИКИХ ЧИСЕЛ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕАВТОНОМНИХ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Background. Asymptotic behavior at infinity of non-autonomous stochastic differential equation solutions is studied in the paper.
Objective. The aim of the work is to find sufficient conditions for the strong law of large numbers for a random process which is a solution of non-autonomous stochastic differential equation.
Methods. Basic results of the theory of stochastic differential equations related to stochastic integrals estimation.
Results. Sufficient conditions for almost sure convergence to zero of normalized term related to diffusion of non-autonomous stochastic differential equation are obtained.
Conclusions. Results of the paper can be used for further research on the asymptotic behavior of stochastic differential equation solutions, finding the stability condition of stochastic differential equation solution and ergodic type problems also.

Keywords: strong law of large numbers; stochastic differential equation; Wiener process; asymptotic behavior.

Вступ

Історія теорії ймовірностей — це історія її граничних теорем, серед яких виділяються посилені закони великих чисел. За історичною традицією, твердження, що стосуються збіжності майже напевно, і називаються посиленим законом великих чисел (ПЗВЧ), який є важливим інструментом у дослідженні асимптотичної поведінки різних процесів.

При дослідженні асимптотичної поведінки розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь виникають задачі типу ПЗВЧ.

Й.І. Гіхман і А.В. Скороход [1] одні з перших почали вивчати задачу про асимптотичну поведінку розв'язку *автономного стохастичного диференціального рівняння*, збуреного за допомогою вінерівського процесу

$$dX(t) = g(X(t))dt + \sigma(X(t))dw(t),$$

де $w(\cdot)$ — стандартний вінерівський процес. При цьому припускалось, що $g(\cdot)$ та $\sigma(\cdot)$ є додатними неперервними функціями такими, що існує єдиний неперервний розв'язок цього рівняння, і розглядався лише той випадок, коли

$$P\{\lim_{t\to\infty} X(t) = \infty\} > 0.$$

У роботах [2, 3] досліджувалась асимптотична поведінка стохастичного диференціального рівняння із *фазовими незалежними збуреннями,* тобто

$$dX(t) = g(X(t))dt + \theta(t)dw(t).$$

Аналогічні задачі, але для так званого *стохастичного диференціального рівняння з відокремлюваними змінними*, досліджувались у роботах [4, 5]:

$$dX(t) = g(X(t))\varphi(t)dt + \sigma(X(t))\theta(t)dw(t).$$

Це рівняння є рівнянням *Й.І. Гіхмана—А.В. Скорохода* при $\varphi(\cdot) \equiv 1$, $\theta(\cdot) \equiv 1$; якщо ж покласти $\varphi(\cdot) \equiv 1$ і $\sigma(\cdot) \equiv 1$, то рівняння стає рівнянням, яке досліджувалось у [2, 3].

В усіх згаданих вище роботах властивості стохастичного диференціального рівняння визначалися властивостями розв'язку відповідної детермінованої задачі.

Постановка задачі

Розглянемо неавтономне стохастичне диференціальне рівняння

$$dX(t) = g(X(t))\varphi(t)dt + \sigma(X(t))\theta(t)dw(t), \qquad (1)$$

де $w(\cdot)$ — стандартний вінерівський процес; $\theta(\cdot)$ — неперервна функція, $g(\cdot)$, $\varphi(\cdot)$ і $\sigma(\cdot)$ — неперервні додатні функції такі, що (1) має неперервний розв'язок $X(\cdot)$.

*corresponding author: elena_timoshenko2008@ukr.net

Метою роботи є дослідження ПЗВЧ для випадкового процесу $X(\cdot)$ та доведення теореми, що дає змогу досліджувати асимптотичну поведінку розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь більш загального типу, ніж ті, що досліджувались у роботах [1—5].

Основні результати

Нехай на повному ймовірнісному просторі $\{\Omega, F, P\}$ задано неперервний випадковий процес $X(t) = (X(\omega, t), \omega \in \Omega, t \geq 0)$.

Позначимо

$$\Phi(t) = \int_0^t \varphi(u)du, \; t \geq 0,$$

де $\varphi(\cdot)$ — неперервна додатна функція, та припустимо, що

$$\lim_{t\to\infty} \Phi(t) = \infty. \tag{2}$$

Розглянемо деякі умови збіжності майже напевно (м.н.) типу ПЗВЧ для розв'язку рівняння (1)

Теорема 1. Припустимо, що $w(\cdot)$ — вінерівський процес, $\sigma(\cdot)$ — неперервна додатна функція така, що $\sup_{x\in R} \sigma(x) < \infty$, $g(\cdot)$, $\varphi(\cdot)$ і $\theta(\cdot)$ неперервні додатні функції такі, що (1) має неперервний розв'язок $X(\cdot)$, для якого $\lim_{t\to\infty} X(t) = \infty$ м.н. Крім того, нехай виконується умова (2) та

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\int_0^{2^{k+1}} \theta^2(s)ds}{\Phi^2(2^k)} < \infty. \tag{3}$$

Тоді

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{\Phi(t)} \int_0^t \sigma(X(s))\theta(s)dw(s) = 0 \text{ м.н.} \tag{4}$$

Д о в е д е н н я. Для цього при фіксованому $k \geq 0$ і довільному $\varepsilon > 0$ розглянемо події

$$B_k = \left\{ \sup_{2^k \leq t \leq 2^{k+1}} \frac{1}{\Phi(t)} \left| \int_0^t \sigma(X(s))\theta(s)dw(s) \right| > \varepsilon \right\}$$

та

$$C_k = \left\{ \sup_{2^k \leq t \leq 2^{k+1}} \frac{1}{\Phi(2^k)} \left| \int_0^t \sigma(X(s))\theta(s)dw(s) \right| > \varepsilon \right\}.$$

Функція $\Phi(\cdot)$ монотонно зростає, тому $B_k \subset C_k$, $k \geq 0$.

Оскільки $\sigma(\cdot)$ є обмеженою функцією, а $\theta(\cdot)$ — неперервною, то

$$\int_0^t \sigma^2(X(s))\theta^2(s)ds < \infty \text{ і } \int_0^t E[\sigma^2(X(s))\theta^2(s)]ds < \infty.$$

З урахуванням теореми 1 ([1, с. 20]) для будь-яких $k \geq 0$ і $\varepsilon > 0$ має місце оцінка

$$P\left\{ \sup_{2^k \leq t \leq 2^{k+1}} \frac{1}{\Phi(t)} \left| \int_0^t \sigma(X(s))\theta(s)dw(s) \right| > \varepsilon \right\} \leq$$

$$\leq P\left\{ \sup_{2^k \leq t \leq 2^{k+1}} \frac{1}{\Phi(2^k)} \left| \int_0^t \sigma(X(s))\theta(s)dw(s) \right| > \varepsilon \right\} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\Phi^2(2^k)\varepsilon^2} \int_0^{2^{k+1}} E\left|\sigma(X(s))\right|^2 \theta^2(s)\,ds \leq$$

$$\leq \frac{M^2}{\Phi^2(2^k)\varepsilon^2} \cdot \left(\int_0^{2^{k+1}} \theta^2(s)ds \right),$$

де $M = \sup_{x\in R} \sigma(x) < \infty$.

Отже,

$$P\left\{ \sup_{2^k \leq t \leq 2^{k+1}} \frac{1}{\Phi(t)} \left| \int_0^t \sigma(X(s))\theta(s)dw(s) \right| > \varepsilon \right\} \leq$$

$$\leq \frac{M^2}{\Phi^2(2^k)\varepsilon^2} \cdot \left(\int_0^{2^{k+1}} \theta^2(s)ds \right). \tag{5}$$

Тепер для довільних $\varepsilon > 0$ і $m \geq 1$ розглянемо подію

$$\tilde{B}_m = \left\{ \sup_{t \geq 2^m} \frac{1}{\Phi(t)} \left| \int_0^t \sigma(X(s))\theta(s)dw(s) \right| > \varepsilon \right\}$$

та подамо її у вигляді $\tilde{B}_m = \bigcup_{k=m}^{\infty} B_k$.

Оскільки

$$P\left(\bigcup_{k=m}^{\infty} B_k \right) = \sum_{k=m}^{\infty} P(B_k),$$

то за умовою (5) маємо

$$P\left\{ \sup_{t \geq 2^m} \frac{1}{\Phi(t)} \left| \int_0^t \sigma(X(s))\theta(s)dw(s) \right| > \varepsilon \right\} \leq$$

$$\le \sum_{k=m}^{\infty} P\left\{ \sup_{2^k \le t \le 2^{k+1}} \frac{1}{\Phi(t)} \left| \int_0^t \sigma(X(s))\theta(s)dw(s) \right| > \varepsilon \right\} \le$$

$$\le \Xi_m \cdot \frac{M^2}{\varepsilon^2},$$

де

$$\Xi_m = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{\int_0^{2^{k+1}} \theta^2(s)ds}{\Phi^2(2^k)},\ m \ge 1.$$

Зауважимо, що в силу (3) $\Xi_m \to 0$ при $m \to \infty$.

Отже,

$$P\left\{ \sup_{t \ge 2^m} \frac{1}{\Phi(t)} \left| \int_0^t \sigma(X(s))\theta(s)dw(s) \right| > \varepsilon \right\} \le \frac{\Xi_m M^2}{\varepsilon^2}. \quad (6)$$

Позначимо

$$X_m = \sup_{t \ge 2^m} \frac{1}{\Phi(t)} \left| \int_0^t \sigma(X(s))\theta(s)dw(s) \right|.$$

Тоді зі співвідношення (6) та умови (3) випливає, що $\lim_{m\to\infty} X_m = 0$ за ймовірністю. Оскільки $X_{m+1} \le X_m$, то $\lim_{m\to\infty} X_m = 0$ м.н.

Звідси випливає (4). Теорему доведено.

Зауважимо, що умови, за яких $\lim_{t\to\infty} X(t) = \infty$ м.н., де $X(\cdot)$ – розв'язок рівняння (1), наведено в [6].

Дослідимо умови, за яких ряд (3) є збіжним.

Лема 1. При $\theta(\cdot) \equiv 1$, $t \ge 0$, ряд (3) збігається, якщо для деякого $\delta > \frac{1}{2}$

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{t^\delta}{\Phi(t)} < \infty. \quad (7)$$

Доведення. Для того щоб довести співвідношення (7), розглянемо загальний член ряду (3):

$$0 < \frac{\int_0^{2^{k+1}} \theta^2(s)ds}{\Phi^2(2^k)} \le \frac{2^{k+1}}{\Phi^2(2^k)}.$$

Згідно з умовою (7) маємо, що існує $M > 0$ таке, що

$$\frac{t^\delta}{\Phi(t)} < M \text{ для довільного } t > 0.$$

Тому

$$\frac{2^{k+1}}{\Phi^2(2^k)} = 2^{(1-2\delta)k} \cdot \frac{2^{2\delta k}}{\Phi^2(2^k)} \le M^2 2^{(1-2\delta)k}.$$

Отже,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\int_0^{2^{k+1}} \theta^2(s)ds}{\Phi^2(2^k)} \le M^2 \sum_{k=0}^{\infty} 2^{(1-2\delta)k}.$$

Ряд у правій частині збігається для деякого $\delta > \frac{1}{2}$.

Зауваження. Умова (7) виконується, якщо для деякого $\beta < \frac{1}{2}$

$$\liminf_{u\to\infty} \varphi(u)u^\beta > 0. \quad (8)$$

Дійсно, якщо виконується (8), то існують такі $\varepsilon > 0$ та $u_0 \ge 0$, що

$$\varphi(u) > \varepsilon u^{-\beta},\ u > u_0.$$

Не втрачаючи загальності, вважатимемо, що $u_0 = 0$. Тому при $t \ge 1$

$$\int_0^t \varphi(u)du \ge \varepsilon \int_0^t u^{-\beta} du = \frac{\varepsilon}{1-\beta} \cdot t^{1-\beta}$$

та для довільного $\delta > 0$

$$\frac{t^\delta}{\Phi(t)} = \frac{t^\delta}{\int_0^t \varphi(u)du} \le$$

$$\le \frac{t^\delta}{\frac{\varepsilon}{1-\beta} \cdot t^{1-\beta}} \le \frac{(1-\beta)}{\varepsilon} \cdot t^{\delta-1+\beta}.$$

Отже, якщо $\beta < \frac{1}{2}$, то $\delta > \frac{1}{2}$ й умова (7) виконується.

Розглянемо один із прикладів застосування теореми 1, який показує її точність.

Лема 2. Нехай $w(\cdot)$ – вінерівський процес, тоді для довільного $\delta > 0$ маємо

$$\lim_{t\to\infty} \frac{w(t)}{\sqrt{t}(\ln t)^{\delta+0,5}} = 0 \text{ м.н.}$$

Доведення. У рівнянні (1) покладемо $\sigma(\cdot)\equiv 1$ і $\theta(\cdot)\equiv 1$ та

$$\varphi(t)=\frac{(\ln t)^{\delta+0,5}+2(\ln t)^{\delta-0,5}}{2\sqrt{t}},\ \delta>0.$$

Тоді

$$\Phi(t)=\sqrt{t}(\ln t)^{\delta+0,5},\ \delta>0.$$

Розглянемо умову (3) із теореми 1. Маємо

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\int_0^{2^{n+1}}\theta^2(s)ds}{\Phi^2(2^k)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\int_0^{2^{n+1}}ds}{2^n(\ln 2^n)^{1+2\delta}}=$$

$$=\frac{1}{(\ln 2)^{1+2\delta}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{2^n n^{1+2\delta}}=$$

$$=\frac{2}{(\ln 2)^{1+2\delta}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^{1+2\delta}}.$$

Оскільки $\delta>0$, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^{1+2\delta}}$ є збіжним, отже, умова (3) виконується. Тепер у силу теореми 1 маємо

$$0=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\Phi(t)}\int_0^t\sigma(X(s))\theta(s)dw(s)=$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\Phi(t)}\int_0^t dw(s)=\lim_{t\to\infty}\frac{w(t)}{\sqrt{t}(\ln t)^{\delta+0,5}}\qquad \text{м.н.}$$

Результат леми 2 також випливає із закону повторного логарифму для вінерівського процесу. Оскільки доведення леми 2 випливає з теореми 1, то можемо стверджувати, що теорема 1 є узгодженою із законом повторного логарифму для вінерівського процесу.

Висновки

Асимптотичні задачі завжди посідали важливе місце в різних ймовірнісних дослідженнях, і значну частину теорії ймовірностей становлять теореми типу законів великих чисел. У цій статті сформульовано умови теореми типу ПЗВЧ для розв’язку неавтономного стохастичного диференціального рівняння. Ці результати дають змогу досліджувати асимптотичну поведінку розв’язків більш загальних стохастичних диференціальних рівнянь, що, як відомо, широко застосовуються у багатьох галузях, таких як біологія, фізика та економіка.

За одержаних у статті умов з’являється можливість розглядати більш загальні форми залежності коефіцієнтів зсуву та дифузії від часової та просторової змінних.

У наступних дослідженнях планується встановлення нових тверджень, які описують властивості розв’язків стохастичних диференціальних рівнянь.

Список літератури

1. *Стохастические* дифференциальные уравнения и их приложения / И.И. Гихман, А.В Скороход. – К.: Наук. думка, 1982. – 610 с.
2. *Appleby J.A.D., Cheng J.* On the asymptotic stability of a class of perturbed ordinary differential equations with weak asymptotic mean reversion // E. J. Qualitative Theory of Diff. Equ., Proc. 9th Coll. – 2011. – **1**. – P. 1–36.
3. *Appleby J.A.D., Cheng J., Rodkina A.* Characterisation of the asymptotic behaviour of scalar linear differential equations with respect to a fading stochastic perturbation // Discrete Contin. Dyn. Syst., Suppl. – 2011. – **2011**. – P. 79–90.
4. *Псевдорегулярні* функції та узагальнені процеси відновлення / В.В. Булдигін, К.-Х. Індлекофер, О.І. Клесов, Й.Г. Штайнебах. – К.: ТВіМС, 2012. – 441 с.
5. *Tymoshenko O.A.* Generalization of asymptotic behavior of nonautonomouse stochastic differential equations // Наукові вісті НТУУ “КПІ”. – 2016. – № 4. – С. 100–106.
6. *Klesov O.I., Tymoshenko O.A.* Unbounded solutions of stochastic differential equations with time-dependent coefficients // Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp. – 2013. – **41**. – P. 25–35.

References

[1] I.I. Gihman and A.V. Skorohod, *Stochastic Differential Equations and its Applications.* Kyiv, SU: Naukova Dumka, 1982 (in Russian).

[2] J.A.D. Appleby *et al.*, “On the asymptotic stability of a class of perturbed ordinary differential equations with weak asymptotic mean reversion”, *E. J. Qualitative Theory of Diff. Equ., Proc. 9th Coll.*, vol. 1, pp. 1–36, 2011.

[3] J.A.D. Appleby *et al.*, "Characterisation of the asymptotic behaviour of scalar linear differential equations with respect to a fading stochastic perturbation", *Discrete Contin. Dyn. Syst., Suppl.*, vol. 2011, pp. 79–90, 2011.

[4] V.V. Buldygin *et al.*, *Pseudo Regularly Varying Functions and Generalized Renewal Processes.* Kyiv, Ukraine: ТВіМС, 2012 (in Ukrainian).

[5] O.A. Tymoshenko, "Generalization of asymptotic behavior of nonautonomouse stochastic differential equations", *Naukovi Visti NTUU KPI*, no. 4, pp. 100–106, 2016. doi: 10.20535/1810-0546.2016.4.71649

[6] O.I. Klesov and O.A. Tymoshenko, "Unbounded solutions of stochastic differential equations with time-dependent coefficients", *Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp.*, vol. 41, pp. 25–35, 2013.

О.І. Клесов, І.І. Сіренька, О.А. Тимошенко

ПОСИЛЕНИЙ ЗАКОН ВЕЛИКИХ ЧИСЕЛ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗКІВ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Проблематика. У статті розглядається гранична поведінка на нескінченності розв'язків неавтономних стохастичних диференціальних рівнянь.

Мета дослідження. Мета роботи полягає у наведенні умов, за яких встановлюється посилений закон великих чисел для випадкового процесу, що є розв'язком неавтономного стохастичного диференціального рівняння.

Методика реалізації. Застосовано базові результати теорії стохастичних диференціальних рівнянь щодо оцінки стохастичних інтегралів.

Результати дослідження. Отримано достатні умови збіжності майже напевно до нуля нормованого доданка, що відповідає за дифузію в неавтономному стохастичному диференціальному рівнянні.

Висновки. Одержані результати можна використовувати для дослідження асимптотичної поведінки розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь і встановлення умов стійкості розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь, а також до задач ергодичного типу.

Ключові слова: посилений закон великих чисел; стохастичне диференціальне рівняння; вінерівський процес; асимптотична поведінка.

О.И. Клесов, И.И. Сиренька, Е.А. Тимошенко

УСИЛЕННЫЙ ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ ДЛЯ РЕШЕНИЙ НЕАВТОНОМНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Проблематика. В статье рассматривается предельное поведение на бесконечности решений неавтономных стохастических дифференциальных уравнений.

Цель исследования. Цель работы заключается в нахождении условий, при которых устанавливается усиленный закон больших чисел для случайного процесса, который является решением неавтономного стохастического дифференциального уравнения.

Методика реализации. Применены базовые результаты теории стохастических дифференциальных уравнений относительно оценки стохастических интегралов.

Результаты исследования. Получены достаточные условия сходимости почти наверное к нулю нормированного слагаемого, отвечающего за диффузию в неавтономном стохастическом дифференциальном уравнении.

Выводы. Полученные результаты можно использовать для исследования асимптотического поведения решений стохастических дифференциальных уравнений и установления условий устойчивости решений стохастических дифференциальных уравнений, а также к задачам эргодического типа.

Ключевые слова: усиленный закон больших чисел; стохастическое дифференциальное уравнение; винеровский процесс; асимптотическое поведение.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
КПІ ім. Ігоря Сікорського

Надійшла до редакції
07 червня 2017 року