УДК 517.518.18+517.98
DOI: 10.20535/1810-0546.2017.4.96805

К.В. Моравецька*
КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

АЛЬТЕРНАТИВНА КОНСТРУКЦІЯ ПОВЕРХНЕВИХ МІР У СКІНЧЕННОВИМІРНИХ ПРОСТОРАХ ТА ЇЇ УЗГОДЖЕНІСТЬ ІЗ КЛАСИЧНИМ ПІДХОДОМ

Background. The area formulae are well known for surfaces embedded into a finite-dimensional Euclidean space. However, in the case of an infinite-dimensional Banach manifold, such formulae cannot be used. Thus, a problem of finding an alternative approach to the surface measures construction appears, that, on the one hand, leads to classical results in finite-dimensional case, and on the other hand, can be used for infinite-dimensional Banach manifolds.
Objective. The aim of the paper is to get a construction of surface measure induced by the Lebesgue measure and the associated form for a parametrically defined surface embedded into finite-dimensional Euclidean space. Show the consistency of surface area calculation by this construction with an area calculated by using well-known classical formulae.
Methods. Basic results of mathematical analyses, measure theory and differential geometry are used.
Results. An alternative construction of surface measures induced by the Lebesgue measure on surfaces in finite-dimensional space $\mathbb{R}^m$ is obtained. It is shown that such approach is consistent with the classical definition of the surface area.
Conclusions. The construction of surface measures suggested for infinite-dimensional spaces is a generalization of the classical approach in finite-dimensional spaces. Therefore further investigation of the described approach seems to be reasonable.

Keywords: surface measure; surface area; vector field.

Вступ

Проблема побудови поверхневих мір на поверхнях, вкладених у нескінченновимірний простір, є одним із ключових питань нескінченновимірного аналізу. Важливою умовою при розв’язанні подібних задач є забезпечення узгодженості з класичними результатами скінченновимірного аналізу.

Існують різні підходи до побудови поверхневих мір. Зокрема, в роботах [1, 2] розвинуто апарат поверхневого інтегрування у просторах Фреше. У [3] для побудови поверхневих мір на множинах рівня соболівських функцій у локально опуклих просторах використано соболівські ємності.

У роботах [4, 5] було запроваджено інший підхід до побудови асоційованої міри на гладкій межі області в нескінченновимірному просторі. В [6, 7] адекватність цього підходу була підтверджена при дослідженні крайових задач в областях гільбертового простору. Узагальнення на випадок поверхонь довільної скінченної корозмірності на банаховому многовиді з рівномірною структурою запропоновано в роботі [8]. Наша стаття присвячена побудові поверхневих мір за схемою зі вказаних робіт у скінченновимірному евклідовому просторі та дослідженню адекватності отриманих результатів відносно класичних формул площі поверхні.

Постановка задачі

Мета роботи: для випадку скінченновимірного евклідового простору $\mathbb{R}^m$ за схемою, описаною в [8], побудувати поверхневу міру, асоційовану з мірою Лебега, на параметрично заданій поверхні; дослідити узгодженість площі поверхні, обчисленої за такою побудовою, з площею, обчисленою за відомими класичними формулами математичного аналізу.

Попередні відомості

У праці [8] описано конструкцію поверхневих мір на банахових многовидах з рівномірною структурою. Оскільки евклідів простір $\mathbb{R}^m$ являє собою частинний випадок такого многовиду, то вказаний підхід може бути використаний, зокрема, і для $\mathbb{R}^m$. Коротко наведемо основні означення та схему побудови поверхневих мір для частинного випадку скінченновимірного простору.

*corresponding author: ketketty@gmail.com

Нехай E та F – відкриті підмножини в $\mathbb{R}^n$ та $\mathbb{R}^m$ відповідно. Будемо казати, що функція $f : E \to F$ належить до класу $C_b^2(E)$ (або є обмеженим морфізмом класу C^2), якщо f є двічі неперервно диференційовною, а функції f' і f'' є обмеженими на E. Якщо при цьому функція f є ізоморфізмом і f^{-1} також належить до класу C_b^2, то f називають обмеженим ізоморфізмом класу $C_b^2(E)$. Під обмеженими тензорними полями класу C^1 (полями класу C_b^1) будемо розуміти неперервно диференційовні тензорні поля, обмежені разом із похідною.

***Означення* 1.** Підмножину $S \subset \mathbb{R}^m$ будемо називати вкладеною в $\mathbb{R}^m$ поверхнею корозмірності k $(k < m)$, якщо існує зв'язна підмножина D в $\mathbb{R}^{m-k}$, відкритий окіл нуля $V \subset \mathbb{R}^k$, відкрита підмножина U в $\mathbb{R}^m$ і обмежений C_b^2-ізоморфізм $g : D \times V \to U$, для якого $g(D \times \{\vec{0}\}) = S$.

***Означення* 2.** Нехай S – поверхня корозмірності k в $\mathbb{R}^m$, $g : D \times V \to U$ – відповідний ізоморфізм. Тоді диференціальну k-форму ω класу $C_b^1(U)$ будемо називати асоційованою формою поверхні S, якщо виконано дві умови:

- для кожного $x \in S$: $\{Y \in \mathbb{R}^m \mid i_Y\omega(x) = 0\} = (g)'(g^{-1}(x))(\mathbb{R}^{m-k} \times \{\vec{0}\})$;
- існує таке $\delta > 0$, що для всіх $x \in S$ виконана нерівність $\|\omega(x)\| > \delta$.

***Означення* 3.** Набір попарно комутуючих векторних полів $\mathbf{X} = \{X_1, \ldots, X_k\}$ на U називається строго трансверсальним до вкладеної поверхні S (корозмірності k) з асоційованою формою ω, якщо існує таке $\delta > 0$, що для кожного $x \in S$ виконана нерівність $|\omega(\mathbf{X})(x)| > \delta$. Як показано у [8], таке означення є коректним, тобто не залежить від вибору асоційованої форми поверхні.

Φ_t^X будемо позначати потік векторного поля X для набору $\mathbf{X}$ попарно комутуючих полів: $\Phi_{\mathbf{t}}^{\mathbf{X}} = \Phi_{t_1}^{X_1} \ldots \Phi_{t_k}^{X_k}$, $\Phi_W^{\mathbf{X}}(x) = \{\Phi_{\mathbf{t}}^{\mathbf{X}}(x) \mid \mathbf{t} \in W\}$. B_r позначатимемо відкриту кулю радіуса r у $\mathbb{R}^k$. λ_k будемо позначати міру Лебега на $\mathbb{R}^k$.

Далі вважаємо, що на $\mathbb{R}^m$ задано вкладену поверхню S корозмірності k, асоційовану з нею диференціальну форму ω і строго трансверсальний до S набір попарно комутуючих векторних полів $\mathbf{X}$. Нехай на $\mathbb{R}^m$ також задано міру μ. У випадку, якщо для кожної множини $A \in \mathcal{B}(S)$ існує границя

$$\sigma_{\mathbf{X}}(A) := \lim_{r \to 0} \frac{\mu(\Phi_{B_r}^{\mathbf{X}}(A))}{\lambda_k(B_r)}, \tag{1}$$

функція множин $\sigma_{\mathbf{X}}$ є мірою на S і називається поверхневою мірою першого типу, породженою сім'єю векторних полів $\mathbf{X}$.

У випадку, коли на U задано два строго трансверсальних до S набори попарно комутуючих векторних полів $\mathbf{X}$ і $\mathbf{Y}$, для яких $|\omega(\mathbf{X})\|_S = |\omega(\mathbf{Y})\|_S$ і при цьому обидві міри $\sigma_{\mathbf{X}}$ та $\sigma_{\mathbf{Y}}$ є коректно визначеними та скінченними на S, вказані поверхневі міри збігаються (теорема 3 та зауваження 3 з [8]). Таким чином, забезпечується коректність наведеного далі означення.

***Означення* 4.** Поверхневою мірою другого типу на S, що індукована мірою μ і асоційованою формою ω, називається міра $\mu_\omega = \dfrac{1}{|\omega(\mathbf{X})\|_S} \cdot \sigma_{\mathbf{X}}$, де $\mathbf{X}$ – строго трансверсальний до S набір попарно комутуючих векторних полів, для якого границя (1) існує для кожного $A \in \mathcal{B}(S)$.

Якщо вектор $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ належить до $\mathbb{R}^m$, то $\mathbf{x}_k$ будемо позначати скорочений вектор із перших k координат вектора $\mathbf{x}$, тобто $\mathbf{x}_k = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$. π_k позначатимемо відповідний оператор проектування на перші k координат, $\tilde{\pi}_k$ – на останні k координат.

Міра на поверхні, яка є графіком функції

Розглянемо спершу випадок поверхні корозмірності 1, що є графіком функції. Нехай $M = \mathbb{R}^m$, $\mu = \lambda_m$ – міра Лебега на $\mathbb{R}^m$, $f : D \to \mathbb{R}$ – функція класу C_b^2, що визначена на деякій обмеженій відкритій підмножині D в $\mathbb{R}^{m-1}$. Нехай поверхня S задана таким чином:

$$S = \left\{ \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m \,\middle|\, \begin{array}{l} \mathbf{x}_{m-1} \in D, \\ x_m = f(\mathbf{x}_{m-1}) \end{array} \right\}.$$

Тоді площа поверхні S обчислюється за формулою

$$\sigma(S) = \iint_D \sqrt{1 + \|\mathbf{grad} f(\mathbf{y})\|^2}\, d\mathbf{y}. \qquad (2)$$

Побудуємо тепер поверхневу міру на S, використовуючи схему, описану в попередньому підрозділі.

Зафіксуємо деяке $\delta > 0$ і, позначивши Δ інтервал $(-\delta, \delta)$, розглянемо функцію $g : D \times \Delta \to \to \mathbb{R}^m$, задану формулою $g(z_1, \ldots, z_{m-1}, t) = = (z_1, \ldots, z_{m-1}, t + f(\mathbf{z}_{m-1}))$. Легко побачити, що при вказаній функції g і $U = g(D \times \Delta)$ поверхня S задовольняє умови означення 1, тобто є вкладеною в $\mathbb{R}^m$ поверхнею корозмірності 1. При цьому $g^{-1}(z_1, \ldots, z_{m-1}, t) = (z_1, \ldots, z_{m-1},\ t - f \times \times (\mathbf{z}_{m-1}))$.

Оскільки dt_m — диференціальна 1-форма на $D \times \Delta$, асоційована з поверхнею $D \times \{\vec{0}\}$, за асоційовану форму поверхні S можна взяти форму $\nu = (g^{-1})^* dt_m$ на U. При цьому

$$\nu(x_1, \ldots, x_m)(\mathbf{u}) = dt_m((g^{-1})'(\mathbf{x})\mathbf{u}) =$$
$$= -< \mathbf{grad} f(\mathbf{x}_{m-1}), \mathbf{u}_{m-1} > + u_m.$$

Тоді диференціальна форма $\omega(\mathbf{x}) = \dfrac{\nu(\mathbf{x})}{\|\nu(\mathbf{x})\|} = = \dfrac{\nu(\mathbf{x})}{\sqrt{1 + \|\mathbf{grad} f(\mathbf{x}_{m-1})\|^2}}$ також є асоційованою формою для S.

Постійне векторне поле $X(\mathbf{x}) = (0\ \ldots\ 0\ 1)^T \in \in \mathbb{R}^m$, задане на $\mathbb{R}^m$, є строго трансверсальним до S, оскільки $\nu(\mathbf{x})(X(\mathbf{x})) = \nu(\mathbf{x})\begin{pmatrix} \vec{0}_{m-1} \\ 1 \end{pmatrix} = 1$ при всіх $\mathbf{x} \in U$. При цьому $\Phi_t^X(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}_{m-1}, x_m + t)$ при всіх $x \in U$, $t \in \mathbb{R}$. Тоді при $r \in \mathbb{R}$, $A \in \mathcal{B}(S)$ маємо: $\Phi_{B_r}^X(A) = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \,\middle|\, \begin{matrix} \mathbf{x}_{m-1} \in \pi_{m-1}(A), \\ |x_m - f(\mathbf{x}_{m-1})| < r \end{matrix} \right\}$. Звідси отримуємо рівність

$$\lambda_m(\Phi_{B_r}^X(A)) = \iint_{\hat{A}} d\mathbf{z} \int_{f(\mathbf{z})-r}^{f(\mathbf{z})+r} dt = 2r\lambda_{m-1}(\hat{A}),$$

де $\hat{A} = (\pi_{m-1} \circ g^{-1})(A) = \pi_{m-1}(A)$.

Тоді для кожної множини $A \in \mathcal{B}(S)$ існує границя (1), і тому поверхнева міра першого типу на S, породжена векторним полем X, визначається формулою

$$\sigma_X(A) = \lim_{r \to 0} \frac{\lambda_m(\Phi_{B_r}^X(A))}{\lambda_1(B_r)} = \lambda_{m-1}(\pi_{m-1}(A)), \qquad (3)$$

тобто міра σ_X є образом міри λ_{m-1} при відображенні $F = g \circ i : D \to S$, де $i(x_1, \ldots, x_{m-1}) = = (x_1, \ldots, x_{m-1}, 0)$.

Поверхнева міра другого типу на S, індукована мірою λ_m та асоційованою формою ω, визначається як $\sigma_\omega = \dfrac{1}{|\omega(X)|\,|_S} \cdot \sigma_X$, тобто $\sigma_\omega(A) = \displaystyle\int_A \frac{1}{|\omega(X)|} d\sigma_X$. Врахувавши, що $\sigma_X = = \lambda_{m-1} \circ (g \circ i)^{-1}$, отримаємо

$$\sigma_\omega(A) = \int_{\pi_{m-1}(A)} \frac{1}{|\omega(X)(g(i(z)))|} \lambda_{m-1}(dz) =$$
$$= \iint_{\pi_{m-1}(A)} \sqrt{1 + \|\mathbf{grad} f(\mathbf{x})\|^2}\, d\mathbf{x}.$$

Взявши тепер за A всю поверхню S, отримаємо $\pi_{m-1}(S) = D$, а отже, $\sigma_\omega(A)$ збігається з класичною площею поверхні, що визначається формулою (2).

Зауваження. Як доведено в роботі [8], побудована міра σ_ω не залежить від вибору строго трансверсального до S векторного поля X на $\mathbb{R}^m$. Однак вона залежить від вибору форми ω, асоційованої з поверхнею S, при цьому поверхневі міри другого типу, побудовані при різних асоційованих формах, виявляються еквівалентними. Якщо, наприклад, взяти диференціальну форму $\nu = (g^{-1})^* dt_m$, то отримана міра σ_ν збігається з мірою σ_X, що задається формулою (3).

Допоміжні результати

Перш ніж переходити до загального випадку параметрично заданої поверхні, доведемо дві допоміжні леми, які стосуються властивостей матриць.

Лема 1. Нехай невироджена матриця A розміру $n \times n$ має блоковий вигляд $A =$

$=(B \quad H)$, а її обернена – $A^{-1} = \begin{pmatrix} C^T \\ F^T \end{pmatrix}$, де B, C – матриці $n \times k$, а H, F – $n \times (n-k)$. Тоді $|\det A| \cdot \sqrt{\det F^T F} = \sqrt{\det B^T B}$.

Доведення. Позначивши E_n одиничну матрицю розміру $n \times n$ і використавши властивості матриці та її оберненої, отримаємо рівність

$$E_n = \begin{pmatrix} E_k & 0 \\ 0 & E_{n-k} \end{pmatrix} = A^T A A^{-1} (A^{-1})^T =$$

$$= \begin{pmatrix} B^T B & B^T H \\ H^T B & H^T H \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C^T C & C^T F \\ F^T C & F^T F \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} B^T B C^T C + B^T H F^T C & B^T B C^T F + B^T H F^T F \\ H^T B C^T C + H^T H F^T C & H^T B C^T F + H^T H F^T F \end{pmatrix},$$

звідки $B^T B C^T C = E_k - B^T H F^T C$, $B^T B C^T F = -B^T H F^T F$. Тоді:

$$\frac{\det B^T B}{(\det A)^2} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} B^T B & 0 \\ 0 & E_{n-k} \end{pmatrix} \cdot \det(A^{-1}(A^{-1})^T) =$$

$$= \det \begin{pmatrix} B^T B & 0 \\ 0 & E_{n-k} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C^T C & C^T F \\ F^T C & F^T F \end{pmatrix} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} B^T B C^T C & B^T B C^T F \\ F^T C & F^T F \end{pmatrix} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} E_k - B^T H F^T C & -B^T H F^T F \\ F^T C & F^T F \end{pmatrix} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} E_k & 0 \\ F^T C & F^T F \end{pmatrix} = \det F^T F.$$

Передостання рівність отримана додаванням до верхніх k рядків матриці останніх $n-k$ рядків, домножених зліва на $B^T H$. Таким чином, після перенесення $(\det A)^2$ у праву частину і взяття кореня від обох частин виразу, отримаємо шукану тотожність.

Лема 2. Нехай B є прямокутною матрицею розміру $n \times k$, $k \le n$. Визначимо оператор P_B, що діє на просторі матриць розміру $n \times k$ таким чином:

$$P_B(V) = \det(B^T V).$$

Тоді $\|P_B\| := \sup_V \frac{P_B(V)}{\prod_{i=1}^{k} \|\mathbf{v}_i\|} = \sqrt{\det(B^T B)}$, де $\mathbf{v}_i$ є вектор-стовпцями матриці V.

Доведення. Представимо B у вигляді $B = UDW^T$, де U, V – ортогональні матриці (розмірів $n \times n$ та $k \times k$ відповідно), а D – невід'ємна "діагональна" розміру $n \times k$ (див. [9, с. 21]). Додатково представимо матрицю D як добуток прямокутної $(n \times k)$ одиничної матриці $E = \begin{pmatrix} E_k \\ 0 \end{pmatrix}$ та квадратної діагональної матриці F $(k \times k)$. Тоді

$$\det(B^T B) = \det(W F^T E^T U^T U E F W^T) =$$

$$= \det(F^T E^T E F) = \det(F^T F) = \det(F)^2.$$

Для довільної матриці V позначимо $V' = U^T V$, тоді норми вектор-стовпців матриці V' дорівнюють відповідним нормам вектор-стовпців V, а отже,

$$\frac{P_B(V)}{\prod_{i=1}^{k} \|\mathbf{v}_i\|} = \frac{\det(W D^T U^T V)}{\prod_{i=1}^{k} \|\mathbf{v}_i\|} =$$

$$= \frac{\det(W)\det(F)\det(E^T V')}{\prod_{i=1}^{k} \|\mathbf{v}'_i\|} = \frac{\det(F)\det(E^T V')}{\prod_{i=1}^{k} \|\mathbf{v}'_i\|}.$$

За нерівністю Адамара $\det(E^T V') \le \prod_{i=1}^{k} \|\mathbf{e}_i\|$, де $\mathbf{e}_i$ – вектор-рядки матриці $E^T V'$. При цьому для кожного $i \in \{1, \ldots, k\}$ виконується нерівність $\|\mathbf{e}_i\| \le \|\mathbf{v}'_i\|$, звідки випливає, що $\|P_B\| \le \det(F) = \sqrt{\det(B^T B)}$. З іншого боку, для $V = UE$ маємо рівність $P_B(V) = \sqrt{\det(B^T B)}$, що і завершує доведення леми 2.

Міра на поверхні, що задана параметрично

Розглянемо тепер випадок поверхні корозмірності k в $\mathbb{R}^m$, що задана параметрично. Як і раніше, $M = \mathbb{R}^m$, $\mu = \lambda_m$ – міра Лебега на $\mathbb{R}^m$. Нехай поверхня S задана відповідно до означення 1, тобто $S = g(D \times \{\vec{0}\})$, де $g : D \times V \to \to U \subset \mathbb{R}^m$ — C_b^2-ізоморфізм, D — обмежена відкрита підмножина в $\mathbb{R}^{m-k}$, V — відкритий окіл нуля в $\mathbb{R}^k$. g_D позначатимемо функцію $z = (z_1, \ldots, z_{m-k}) \mapsto g(z_1, \ldots, z_{m-k}, \vec{0}) \in S$, визначену на D, h — функцію g^{-1}.

Тоді площа поверхні S обчислюється за формулою ([10, с. 190]):

$$\sigma(S) = \iint_D \sqrt{\det[g'_D(\mathbf{y})^T g'_D(\mathbf{y})]}\, d\mathbf{y}. \tag{4}$$

Побудуємо тепер поверхневу міру на S за схемою із праці [8].

Оскільки $(\tilde{\pi}_k)^*(dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_k)$ — диференціальна k-форма на $D \times V$, асоційована з поверхнею $D \times \{\vec{0}\}$, то диференціальна форма $\nu = (g^{-1})^*(\tilde{\pi}_k)^*(dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_k)$ на U є асоційованою для поверхні S. При цьому

$$\nu(\mathbf{x})(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) = $$
$$= (dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_k)(F(\mathbf{x})^T \mathbf{v}_1, \ldots, F(\mathbf{x})^T \mathbf{v}_k),$$

де $F(\mathbf{x})^T = \tilde{\pi}_k((g^{-1})'(\mathbf{x})) = \tilde{\pi}_k(h'(\mathbf{x}))$ — матриця $k \times m$. Тоді за лемою 2:

$$\|\nu(\mathbf{x})\| = \||P_{F(\mathbf{x})}\|| = \sqrt{\det(F(\mathbf{x})^T F(\mathbf{x}))}.$$

Оскільки нормування диференціальної форми зберігає її асоційованість із поверхнею, то за асоційовану форму поверхні S можемо також взяти форму

$$\omega(\mathbf{x}) = \frac{\nu(\mathbf{x})}{\|\nu(\mathbf{x})\|} = \frac{\nu(\mathbf{x})}{\sqrt{\det(F(\mathbf{x})^T F(\mathbf{x}))}}.$$

Розглянемо набір постійних векторних полів $\mathbf{Y} = \{Y_1, \ldots, Y_k\}$ на $\mathbb{R}^m$, де $Y_i = \begin{pmatrix} \vec{0}_{m-k+i-1} \\ 1 \\ \vec{0}_{k-i} \end{pmatrix}$ — одиниця на $(m-k+i)$-ій позиції. Очевидно, що поля з набору $\mathbf{Y}$ є попарно комутуючими та утворюють строго трансверсальний до $D \times \{\vec{0}\}$ набір векторних полів (оскільки $((\tilde{\pi}_k)^*(dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_k))(\mathbf{Y}(\mathbf{x})) = \det E_k = 1$). Тому набір $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_k)$ векторних полів на U, g-пов'язаних із $\mathbf{Y}$, є строго трансверсальним до S набором попарно комутуючих векторних полів. При цьому

$$X_i(\mathbf{x}) = g'(g^{-1}(\mathbf{x})) \begin{pmatrix} \vec{0}_{m-k+i-1} \\ 1 \\ \vec{0}_{k-i} \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{\partial g}{\partial x_{m-k+i}} (g^{-1}(\mathbf{x})),$$
$$\omega(\mathbf{X})(\mathbf{x}) = \frac{\det(F(\mathbf{x})^T \mathbf{X}(\mathbf{x}))}{\sqrt{\det(F(\mathbf{x})^T F(\mathbf{x}))}} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\det(F(\mathbf{x})^T F(\mathbf{x}))}}. \tag{5}$$

Оскільки $\Phi_t^{X_i} = g \circ \Phi_t^{Y_i} \circ g^{-1}$, то маємо

$$\Phi_{\mathbf{t}}^{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = (g \circ \Phi_{\mathbf{t}}^{\mathbf{Y}} \circ g^{-1})(\mathbf{x}) = g\left(g^{-1}(\mathbf{x}) + \sum_{i=m-k+1}^{m} t_i \mathbf{e}_i \right)$$

при всіх $\mathbf{x} \in U$ і $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^m$ таких, що права частина має зміст. Тоді при $A \in \mathcal{B}(S)$ і $r \in \mathbb{R}$, для якого $B_r \subset V$, отримуємо рівність

$$\Phi_{B_r}^{\mathbf{X}}(A) = g(g_D^{-1}(A) \times B_r).$$

Зробивши заміну змінної $\mathbf{y} = g^{-1}(\mathbf{x})$, обчислимо тепер міру Лебега λ_m від множини $\Phi_{B_r}^{\mathbf{X}}(A)$:

$$\lambda_m(\Phi_{B_r}^{\mathbf{X}}(A)) = \iint_{g(g_D^{-1}(A) \times B_r)} d\mathbf{x} =$$
$$= \iint_{g_D^{-1}(A) \times B_r} |\det g'(\mathbf{y})|\, d\mathbf{y} =$$
$$= \int_{B_r} \left(\int_{g_D^{-1}(A)} |\det g'(\mathbf{x}, \mathbf{t})|\, d\mathbf{x} \right) d\mathbf{t}.$$

Функція g належить до класу $C_b^2(D \times V)$, тому $\det g'(\mathbf{x}, \mathbf{t})$ неперервний по $\mathbf{t}$ рівномірно відносно $\mathbf{x}$. Тоді границя (1) існує для кожного $A \in \mathcal{B}(S)$ і при цьому

$$\sigma_{\mathbf{X}}(A) = \lim_{r \to 0} \frac{\lambda_m(\Phi_{B_r}^{\mathbf{X}}(A))}{\lambda_k(B_r)} =$$
$$= \int_{g_D^{-1}(A)} |\det g'(\mathbf{x}, \vec{0})|\, d\mathbf{x},$$

тобто міра $\sigma_{\mathbf{X}}$ є образом міри $|\det g'(\cdot, \vec{0})| \cdot \lambda_{m-k}$ при відображенні $g_D : D \to S$.

Врахувавши рівність (5), переходимо до поверхневої міри другого типу, індукованої асоційованою формою ω:

$$\sigma_\omega(A) = \int_A \frac{1}{|\omega(X)|}\, d\sigma_{\mathbf{X}} =$$

$$= \int_A \sqrt{\det(F(\mathbf{x})^T F(\mathbf{x}))}\, d\sigma_{\mathbf{X}},$$

де $F(\mathbf{x})^T = \tilde{\pi}_k(h'(\mathbf{x}))$.

Зафіксуємо тепер довільне $x \in D$ і представимо матриці $g'(\mathbf{x}, \vec{0})$ та $h'(g(\mathbf{x}, \vec{0}))$ у блоковому вигляді: $g'(\mathbf{x}, \vec{0}) = (B_{\mathbf{x}} \quad H_{\mathbf{x}})$, $h'(g(\mathbf{x}, \vec{0})) = \begin{pmatrix} C_{\mathbf{x}}^T \\ F_{\mathbf{x}}^T \end{pmatrix}$, де B, C – матриці $m \times (m-k)$, H, F – $m \times k$. Тоді $F(g(\mathbf{x}, \vec{0})) = \tilde{\pi}_k(h'(g(\mathbf{x}, \vec{0})))^T = F_{\mathbf{x}}$, $B_{\mathbf{x}} = (g_D)'(\mathbf{x})$ і, крім того, за лемою 1:

$$|\det g'(\mathbf{x}, \vec{0})| \cdot \sqrt{\det F_{\mathbf{x}}{}^T F_{\mathbf{x}}} = \sqrt{\det B_{\mathbf{x}}{}^T B_{\mathbf{x}}}.$$

Врахувавши, що $\sigma_{\mathbf{X}} = (|\det g'(\cdot, \vec{0})| \cdot \lambda_{m-k}) \circ g_D{}^{-1}$, отримаємо:

$$\sigma_\omega(A) =$$

$$= \iint_{g_D^{-1}(A)} \sqrt{\det(F_{\mathbf{x}}{}^T F_{\mathbf{x}})} \cdot |\det g'(\mathbf{x}, \vec{0})|\, d\mathbf{x} =$$

$$= \iint_{g_D^{-1}(A)} \sqrt{\det(B_{\mathbf{x}}{}^T B_{\mathbf{x}})}\, d\mathbf{x} =$$

$$= \iint_{g_D^{-1}(A)} \sqrt{\det[g'_D(\mathbf{x})^T g'_D(\mathbf{x})]}\, d\mathbf{x}.$$

Взявши тепер як A всю поверхню S, отримаємо $g_D^{-1}(S) = D$, а отже, $\sigma_\omega(S)$ збігається з класичною площею поверхні, визначеною у формулі (4).

Висновки

У роботі отримано поверхневі міри першого та другого типу, індуковані мірою Лебега на поверхнях, що є графіками функцій, і на параметрично заданих поверхнях у $\mathbb{R}^m$. Показано, що такий підхід до обчислення площі поверхні є еквівалентним класичному. Таким чином, обґрунтовано адекватність використання вказаного підходу до побудови поверхневих мір на поверхнях скінченної корозмірності в нескінченновимірних просторах. Перспективним вбачається подальше дослідження поверхневих мір другого типу на поверхнях, вкладених у нескінченновимірні банахові многовиди.

Список літератури

1. *Угланов А.В.* Поверхностные интегралы в пространствах Фреше // Мат. сб. – 1998. – **189**, № 11. – С. 139–157.
2. *Uglanov A.V.* Integration on Infinite-Dimensional Surfaces and its Applications. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2000. – 262 p.
3. *Пугачев О.В.* Емкости и поверхностные меры в локально выпуклых пространствах // Теория вероятностей и ее применения. – 2008. – **53**, № 1. – С. 178–188.
4. *Богданский Ю.В.* Банаховы многообразия с ограниченной структурой и формула Гаусса–Остроградского // Укр. мат. журн. – 2012. – **64**, № 10. – С. 1299–1313.
5. *Богданский Ю.В.* Лапласиан по мере на гильбертовом пространстве и задача Дирихле для уравнения Пуассона в L_2-версии // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 9. – С. 1169–1178.
6. *Богданский Ю.В., Санжаревский Я.Ю.* Задача Дирихле с лапласианом по мере на гильбертовом пространстве // Укр. мат. журн. – 2014. – **66**, № 6. – С. 733–739.
7. *Богданский Ю.В.* Граничный оператор следа в области гильбертова пространства и характеристическое свойство его ядра // Укр. мат. журн. – 2015. – **67**, № 11. – С. 1450–1460.
8. *Богданский Ю.В., Моравецкая Е.В.* Поверхностные меры на банаховых многообразиях с равномерной структурой // Укр. мат. журн. – 2017. – **69**, № 8. – С. 1030–1048.
9. *Икрамов Х.Д.* Несимметричная проблема собственных значений. Численные методы. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991. – 240 с.
10. *Зорич В.А.* Математический анализ. Часть II. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1984. – 640 с.

References

[1] A.V. Uglanov, “Surface integrals in the Fréchet spaces”, *Matematicheskij Sbornik*, vol. 189, no. 11, pp. 139–157, 1998 (in Russian).

[2] A.V. Uglanov, *Integration on Infinite-Dimensional Surfaces and its Application.* Dordrecht, Netherlands: Kluwer Acad. Publ., 2000.

[3] O.V. Pugachev, “Capacities and surface measures in locally convex spaces”, *Teorija Verojatnostej i ee Primenenija*, vol. 53, no. 1, pp. 178–188, 2008 (in Russian).
[4] Yu.V. Bogdansky, “Banach manifolds with bounded structure and the Gauss–Ostrogradskii formula”, *Ukr. Mat. Zhurnal*, vol. 64, no. 10, pp. 1299–1313, 2012 (in Russian).
[5] Yu.V. Bogdansky, “Laplacian with respect to a measure on a Hilbert space and L_2-version of the Dirichlet problem for the Poisson equation”, *Ukr. Mat. Zhurnal*, vol. 63, no. 9, pp. 1169–1178, 2011 (in Russian).
[6] Yu.V. Bogdansky and Ya.Yu. Sanzharevskii, “The Dirichlet problem with Laplacian with respect to a measure in the Hilbert space”, *Ukr. Mat. Zhurnal*, vol. 66, no. 6, pp. 733–739, 2014 (in Russian).
[7] Yu.V. Bogdansky, “Boundary trace operator in a domain of Hilbert space and the characteristic property of its kernel”, *Ukr. Mat. Zhurnal*, vol. 67, no. 11, pp. 1450–1460, 20155 (in Russian).
[8] Yu.V. Bogdansky and K.V. Moravetska, “Surface measures on Banach manifolds with uniform structure”, *Ukr. Mat. Zhurnal*, vol. 69, no. 8, pp. 1030–1048, 2017 (in Russian).
[9] Kh.D. Ikramov, *Nonsymmetric Eigenvalue Problem*. Moscow, SU: Nauka, 1991 (in Russian).
[10] V.A. Zorich, *Mathematical Analysis*, vol. 2. Moscow, SU: Nauka, 1984 (in Russian).

К.В. Моравецька

АЛЬТЕРНАТИВНА КОНСТРУКЦІЯ ПОВЕРХНЕВИХ МІР У СКІНЧЕННОВИМІРНИХ ПРОСТОРАХ ТА ЇЇ УЗГОДЖЕНІСТЬ ІЗ КЛАСИЧНИМ ПІДХОДОМ

Проблематика. Для поверхонь, вкладених у скінченновимірний евклідів простір, формули площі є загальновідомими. Проте у випадку нескінченновимірного банахового многовиду використання вказаних формул є неможливим. Таким чином, виникає задача знаходження такого альтернативного підходу до побудови поверхневих мір, який, з одного боку, приводить до класичних результатів у скінченновимірному випадку, а з іншого, може бути використаний і для нескінченновимірних банахових многовидів.

Мета дослідження. Для параметрично заданої поверхні, вкладеної у скінченновимірний евклідів простір, побудувати поверхневу міру, індуковану мірою Лебега і асоційованою формою. Показати узгодженість площі поверхні, обчисленої з використанням такої конструкції, з площею, обчисленою за відомими класичними формулами.

Методика реалізації. Використано базові результати математичного аналізу, теорії міри та диференціальної геометрії.

Результати дослідження. Отримано альтернативну конструкцію поверхневих мір, індукованих мірою Лебега, на поверхнях у скінченновимірному просторі $\mathbb{R}^m$. Показано, що такий підхід узгоджується з класичним означенням площі поверхні.

Висновки. Запропонована для нескінченновимірних просторів конструкція поверхневих мір є узагальненням класичного підходу для випадку скінченновимірних просторів. У зв’язку з цим доцільним є подальше дослідження описаного в роботі підходу.

Ключові слова: поверхнева міра; площа поверхні; векторне поле.

Е.В. Моравецкая

АЛЬТЕРНАТИВНАЯ КОНСТРУКЦИЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ МЕР В КОНЕЧНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ И ЕЕ СОГЛАСОВАННОСТЬ С КЛАССИЧЕСКИМ ПОДХОДОМ

Проблематика. Для поверхностей, вложенных в конечномерное евклидово пространство, формулы площади являются общеизвестными. Однако в случае бесконечномерного банахового многообразия использование указанных формул не представляется возможным. Таким образом, возникает задача нахождения такого альтернативного подхода к построению поверхностных мер, который, с одной стороны, приводит к классическим результатам в конечномерном случае, а с другой, может быть использован и для бесконечномерных банаховых многообразий.

Цель исследования. Для параметрически заданной поверхности, вложенной в конечномерное евклидово пространство, построить поверхностную меру, индуцированную мерой Лебега и ассоциированной формой. Показать согласованность площади поверхности, посчитанной с использованием указанной конструкции, с площадью, посчитанной по известным классическим формулам.

Методика реализации. Использованы базовые результаты математического анализа, теории меры и дифференциальной геометрии.

Результаты исследования. Получена альтернативная конструкция поверхностных мер, индуцированных мерой Лебега, на поверхностях в конечномерном пространстве $\mathbb{R}^m$. Показано, что такой подход согласуется с классическим определением площади поверхности.

Выводы. Предложенная для бесконечномерных пространств конструкция поверхностных мер является обобщением классического подхода для случая конечномерных пространств. В связи с этим целесообразным выглядит дальнейшее исследование описанного в работе подхода.

Ключевые слова: поверхностная мера; площадь поверхности; векторное поле.

Рекомендована Радою Навчально-наукового комплексу “Інститут прикладного системного аналізу” КПІ ім. Ігоря Сікорського

Надійшла до редакції 26 березня 2017 року