УДК 301.17.15:532.5:551.465
DOI: 10.20535/1810-0546.2017.4.102048

П.В. Лук’янов[1], В.М. Турик[2*]
[1]Інститут гідромеханіки НАН України, Київ, Україна
[2]КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

РОЗВИТОК АНАЛІТИЧНІХ МОДЕЛЕЙ КОМПАКТНИХ МОНОПОЛЬНИХ ВИХРОВИХ ТЕЧІЙ

Background. Mathematical description of vortex flows as a part of basic fundamental concepts of continuum mechanics, hydro- and gas dynamics, thermal physics, theoretical basics of chemical engineering, geophysics, meteorology.
Objective. Replenishment of existing information in traditional scientific, technical and educational publications about vortices and their analytical models by new data for scientists, teachers, post-graduates and students with the purpose of using in further investigations of fluids and gas vortex motion.
Methods. Analytical review of existing vortex current models, including monopole compact vortices, on a basis of the latest data from scientific articles and specialized monographs and their comparison with traditional data containing in the known textbooks and educational materials.
Results. The lack of modern compact vortices models was revealed in traditional scientific, technical and educational literary sources. They include the compact analogs of the point vortex and Rankine vortex: quasi-point vortex and compact compensated vortex. On basis of these ones and similar to them solutions (circular vortex, vortex with triad constant vorticity zones) the models of compact helical flows and vortices with helical symmetry were elaborated. The solutions of such tasks were analyzed: diffusion of compact vortices (Taylor vortex, Kloosterziel solution), turbulent diffusion of compact vortex, solutions for quasi-compact (laminar and turbulent) vortex-source, vortex-sink and also solution of the problem about compact turbulent vortex generation by rotating cylinder. All considered models are consistent with the energy conservation law and have advantages in their use.
Conclusions. The article contains series of the latest analytical models that describe both laminar and turbulent dynamics of monopole vortex flows which have not been reflected in traditional publications up to the present. The further research must be directed to search of analytical models for the coherent vortical structures in flows of viscous fluids, particularly near curved surfaces, where known in hydromechanics “wall law” is disturbed and heat and mass transfer anomalies take place.

Keywords: compact vortex; analytical models; ideal fluid; viscous fluid; laminar flow; turbulent flow; vortex diffusion; vortex generation.

Вступ

Незважаючи на свою різноманітність, природні явища мають узгоджуватись із загальними законами фізики. Однак, як показують активні дослідження у вихровій гідромеханіці, теорія формування, еволюції та взаємодії вихрових утворень різної природи ще далека до свого завершення, особливо за умов турбулентної течії. Наприклад, нерівномірний прогрів атмосфери та світового океану породжує турбулентний тепломасообмін. Але турбулентний рух суцільного середовища (рідини, газу) із притаманною стохастичністю може вироджуватися у певні когерентні структури — узгоджені, відносно довгочасні (“long-lived”) та, як правило, середньомасштабні відносно масштабу початкової області турбулентної течії. Теорія переносу енергії турбулентності від максимального масштабу явища до мінімального — “каскадний перенос” аж до в’язкої дисипації, — як стало зрозумілим, не описує появи середньомасштабних вихрових структур. Отже, цей феномен, що спостерігається у природі, в лабораторних і числових експериментах, потребує інших пояснень.

Оскільки когерентні вихори мають скінченний масштаб, то природно, що їх енергія обертання також є скінченною величиною. За останні 30—40 років з’явилися моделі дифузії компактних вихорів. Хоча вихор, що дифундує, існує певний час, він доволі скоро вироджується. Тоді як пояснити когерентність природних вихорів? Одним із поштовхів до усвідомлення шляху до знайдення відповіді став широко відомий факт про те, що в атмосфері й океані, за наявності стійкої вертикальної стратифікації (зміни густини за вертикальною координатою), виживає лише певний тип обертання. Мова йде про обертання навколо вертикальної осі [1]. І це пов’язано із дією сили Архімеда, яка подавлює рух навколо горизонтальної осі та залишає переважно обертання навколо вертикальної, оскільки не здатна впливати на цей тип руху.

Якщо усвідомити щойно сказане, то відповідь щодо феномену існування когерентних ком-

* corresponding author: turick46@gmail.com

пактних вихорів слід шукати на підставі зазначених вище загальних законів фізики. Однак відомо, що існуюча на сьогодні математична формалізація цих законів у механіці рідин і газів не дає змоги цілком впевнено стверджувати, що рівняння добре обумовлені і неперервно залежать від початкових даних. Адже залишається відкритою проблема розв'язності рівнянь Нав'є–Стокса – доведення існування, єдиності та регулярності розв'язків цих рівнянь. Водночас певні гідромеханічні явища у в'язкому, а тим паче ідеальному, електронейтральному середовищі вдається приблизно змоделювати, тобто описати рівняннями, що мають розв'язки. Очевидно, саме ті розв'язки, які перетворюють дисипативні доданки у рівняннях на нуль, і будуть відповідати довгоживучим, тобто когерентним, структурам. Класичні моделі вихорів, що існували до недавнього, задовольняють цю умову, але вони не описували компактні структури. Лише застосування такого поняття, як компенсованість вихору, дало можливість побудувати шукані моделі.

На жаль, дотепер у класичних підручниках з механіки рідини та газу, наприклад у [2, 3] та інших, вони поки що не мають належного відображення. Традиційно можна знайти три-чотири аналітичні моделі вихрових течій. Мова йде про вихрові течії, у яких рідина обертається навколо одного полюса (осі), – так звані монополі. Зокрема, це точковий вихор, модель вихоростоку–вихороджерела, які традиційно побудовані для умов потенціальності течії, вихор Ренкіна, складений із потенціальної та чисто вихрової частин, і модель дифузії вихору. Остання модель, на відміну від попередніх, передбачає існування сил в'язкості. З іншого боку, слід зазначити, що і точковий вихор, і вихор Ренкіна можна трактувати як апроксимації розв'язків рівнянь в'язкої рідини, зокрема за умови нульової дифузії. Або, наприклад, модель точкового вихору є аналітичним розв'язком рівнянь, що описують динаміку в'язкої рідини – як ламінарну, так і турбулентну – за умови сталого коефіцієнта турбулентної дифузії. Але це не просто розв'язок, а такий, що передбачає відповідний розподіл швидкості у просторі, для якого дія дифузії зводиться нанівець. При всій простоті застосування точковий вихор не відповідає реальним течіям, які мають скінченні розміри. Так, наприклад, вихрову доріжку Кармана, – класичну течію поза тілом, яке обтікає рідина, – лише наближено можна описати для парної кількості вихорів. Для непарної кількості вихорів течія поблизу щойно утвореного непарного вихору повинна поширюватися дуже далеко від тіла подібно до точкового вихору, а енергія такої течії є нескінченною. Але цього, як відомо, не спостерігається.

Зазначені моделі набули подальшого розвитку. Крім цього, з'явилися нові аналітичні моделі – автомодельні розв'язки, що описують як ламінарну, так і турбулентну динаміку вихорів скінченних розмірів, або так званих компактних вихорів, у яких усі характеристики спадають з експоненціальною швидкістю. Визначний внесок у цьому напрямі було зроблено В.Ф. Козловим [4], який, по суті, увів термін компенсованого вихору и присвятив багато років розвитку моделей вихрових плям (компактних вихорів). У англомовній літературі аналогом назви "компенсований вихор" є термін "течія із нульовою загальною циркуляцією" [5].

Поповнення існуючої інформації про вихори та їх аналітичний опис новими даними вважаємо конче потрібним для науковців і викладачів, аспірантів і студентів старших курсів з метою використання у подальших дослідженнях вихрового руху у фізиці суцільного середовища, гідрогазодинаміці, теплофізиці, хімічній технології тощо.

Постановка задачі

Робота присвячена систематизації та узагальненню математичного інструментарію досліджень вихорів у суцільних електронейтральних середовищах. Мета роботи – познайомити читача з новими аналітичними моделями компактних монопольних вихрових течій як ідеальної, так і в'язкої нестисливої рідин у скінченному просторі, що з'явилися в літературі за останні три–чотири десятиліття.

Компактні аналоги вихору Ренкіна і точкового вихору

Логічно почати з нових результатів, що уточнюють моделі найпростіших вихрових течій – точкового вихору та вихору Ренкіна. Як відомо, вихор Ренкіна [4, 5] описується такими співвідношеннями поля азимутальної швидкості V_θ та вертикальної компоненти ротора Ω_z:

$$V_\theta = \begin{cases} \dfrac{V_0 r}{a}, & 0 \le r \le a, \\ \dfrac{V_0 a}{r}, & r \ge a, \end{cases} \qquad \Omega_z = \begin{cases} \dfrac{2V_0}{a}, & 0 \le r \le a, \\ 0, & r > a, \end{cases}$$

де V_0 – масштаб швидкості, a – радіус ядра вихору, r – поточний радіус.

Цей вихор містить ядро зі сталим значенням кутової швидкості, зовні ядра течія вважається потенціальною, тобто безвихровою. Згідно з цією моделлю, рідина повинна обертатися скрізь у просторі. Неважко переконатись, що кінетична енергія такого руху є нескінченною. Це і стало формальною підставою для розробки більш досконалої моделі. З метою її покращення майже сорок років тому М. Стерн [5] при вивченні стійкості океанічних вихорів використав просту модель:

$$\tilde{V}_\theta = \begin{cases} \tilde{r}, \quad 0 \le \tilde{r} \le 1, \\ \dfrac{\tilde{R}_V^2}{\tilde{r}(\tilde{R}_V^2 - 1)}\left(1 - \dfrac{\tilde{r}^2}{\tilde{R}_V^2}\right), \quad 1 \le \tilde{r} \le \tilde{R}_V, \\ 0, \quad \tilde{r} > \tilde{R}_V. \end{cases} \tag{1}$$

В (1) “хвилею” позначено безрозмірні величини, нормовані на відповідні значення відносно радіуса ядра вихору (зокрема, $\tilde{R}_V$ – безрозмірне значення повного радіуса вихору).

У своїй роботі М. Стерн не надав жодних пояснень та обґрунтувань використання такої моделі. Незалежно від М. Стерна, не так давно була поставлена задача про знайдення компактного аналога вихору Ренкіна – компенсованого вихору. У результаті була отримана така модель [6] (рис. 1):

$$V_\theta = \begin{cases} \dfrac{V_0 r}{a}, \quad 0 \le r \le a, \\ \dfrac{V_0 a}{r}\left(\dfrac{R_V^2 - r^2}{R_V^2 - a^2}\right), \quad a \le r \le R_V, \\ 0, \quad r > R_V. \end{cases} \tag{2}$$

У формулах (2) усі величини подано у розмірному вигляді (зокрема, R_V – радіус вихору).

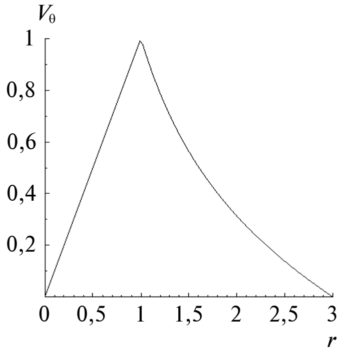

Рис. 1. Розподіл швидкості в компактному компенсованому вихорі

Модель (2) – це наслідок застосування умови компенсованості поля завихреності, яка використовує співвідношення поля азимутальної швидкості та вертикальної компоненти завихреності:

$$V_\theta = \frac{1}{r}\int_0^r r\Omega_z dr. \tag{3}$$

Якщо права частина (3) дорівнює нулеві при інтегруванні по всій області вихору, то він є компенсованим і, як наслідок, компактним. Простою мовою, інтегрально циркуляція швидкості по всьому об’єму вихору повинна дорівнювати нулю. Це досягається лише за умови, що у такій течії вертикальна компонента ротора швидкості має не одне значення, а принаймні два, які компенсують одне одного згідно з (3). Тому і виник такий термін, як “компенсований” вихор. Для циліндричних вихорів компенсованість, таким чином, є синонімом компактності, а точніше – скінченності розмірів. Останнє зауваження слушне тому, що у відомій монографії П. Сеффмена [7] компактність визначається як спадання абсолютних значень усіх характеристик зі швидкістю експоненти. Як буде показано далі, це визначення більше підходить до штучно створених вихорів, натомість у природних умовах вихори мають чітко виражену зовнішню межу.

Найбільш поширеною моделлю, що використовується при дослідженнях, є так званий точковий вихор:

$$V_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}. \tag{4}$$

У (4) і далі Γ – циркуляція поля швидкості.

Недолік цієї моделі той самий, що й вихору Ренкіна. Кілька років тому в літературі з’явився компактний аналог точкового вихору:

$$V_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}\left(1 - \frac{r^2}{R_V^2}\right). \tag{5}$$

Він отримав назву квазіточкового вихору [8], оскільки дуже близький до точкового (порівняйте вирази (4) і (5) та криві на рис. 2).

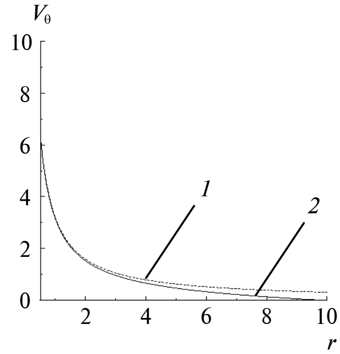

Рис. 2. Азимутальна швидкість згідно з моделями точкового (*1*) та квазіточкового (*2*) вихорів

Компактний кільцевий вихор і вихор із трьома областями сталої завихреності

Перш за все мова йтиме не про вихрове кільце, а про вихрову течію у кільцевій області. Як було зазначено вище, для того, щоб вихор мав скінченні розміри, зовсім непотрібно, аби його обмежувала зовнішня стінка чи інша границя. Коли вихрова течія має місце у кільцевій області, то виявляється, що аналітичний розв'язок просто збігається з течією між двома концентричними циліндрами. Дійсно, компенсований кільцевий вихор має такі характеристики [9]:

$$V_\theta = \begin{cases} \dfrac{\Omega_0 (r^2 - R_0^2)}{2r}, & R_0 \le r \le R_0 + a, \\ \dfrac{\Omega_0}{r}\left(\dfrac{(R_0+a)^2 - R_0^2}{(R_0+R_V)^2 - (R_0+a)^2}\right)\dfrac{(R_0+R_V)^2 - r^2}{2}, \\ R_0 + a \le r \le R_0 + R_{V,} \\ 0, \quad r > R, \end{cases}$$

$$\Omega_z = \begin{cases} \Omega_{0,} & R_0 \le r \le R_0 + a, \\ -\dfrac{\Omega_0((R_0+a)^2 - R_0^2)}{(R_0+R_V)^2 - (R_0+a)^2}, \\ R_0 + a \le r \le R_0 + R_V, \\ 0, \quad r > R_V, \end{cases} \qquad (6)$$

де Ω_0 — максимальне значення завихреності; R_0 — внутрішній радіус вихору.

Як бачимо, це підтверджує зазначене вище. Але головне те, що такий розподіл, як тепер зрозуміло, не обумовлений механізмом в'язкості — це просто компенсованість поля вертикальної компоненти завихреності.

Дослідження в геофізичній гідромеханіці [10], атмосферних вихорів, таких як торнадо [11], а також лабораторні експерименти [12] свідчать про існування течій із трьома областями сталої завихреності. Отже, була розроблена така модель вихору з трьома областями сталої завихреності [9]:

$$V_\theta = \begin{cases} 0{,}5\Omega_0 r, \quad 0 \le r \le a, \\ \dfrac{\Omega_0 a^2 + \Omega_1(r^2 - a^2)}{2r}, \quad a \le r \le R_1, \\ \dfrac{\Omega_0 a^2 + \Omega_1(R_1^2 - a^2)}{2r}\left(\dfrac{R_2^2 - r^2}{R_2^2 - R_1^2}\right), \quad R_1 \le r \le R_2, \\ 0, \quad r > R_2, \end{cases} \qquad (7)$$

$$\Omega_z = \begin{cases} \Omega_0, \quad 0 \le r \le a, \\ \Omega_1, \quad a \le r \le R_1, \\ -\dfrac{\Omega_0 a^2 + \Omega_1(R_1^2 - a^2)}{R_2^2 - R_1^2}, \quad R_1 \le r \le R_2, \\ 0, \quad r > R_2, \end{cases} \qquad (7)$$

де a, R_1, R_2 — радіуси зон вихору зі сталою інтенсивністю; Ω_0, Ω_1 — відповідні завихреності.

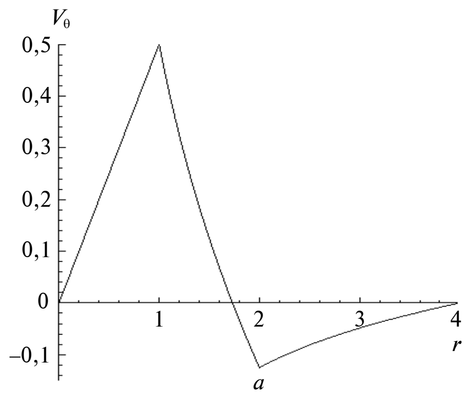

Рис. 3. Розподіл азимутальної швидкості у вихорі із протитечією

З точки зору математики, у таких течій азимутальна швидкість рідини може змінювати знак. На рис. 3 це чітко видно. Тому таку течію можна і доцільно назвати компактним вихором із протитечією.

Моделі компактних вихорів із гвинтовою симетрією

Існують такі вихрові течії, в яких усі характеристики течії є сталими уздовж гвинтової лінії, що визначається співвідношеннями [13]:

$$r = \text{const}, \quad z - \theta l = \text{const}, \quad h = 2\pi l,$$

де h — крок гвинтової лінії.

При цьому, якщо $l > 0$, то симетрія називається правою гвинтовою, а якщо $l < 0$ — відповідно, лівою.

Ці течії мають, крім азимутальної, ще й осьову компоненту швидкості V_z. Вони пов'язані співвідношенням

$$V_z = V_z^0 - \frac{r}{l} V_\theta.$$

Аналітичні моделі таких течій розроблено у [13—16]. Недоліком усіх зазначених робіт є те, що поля швидкості у них не є компактними. Цей недолік усунуто в [17], де на підставі уявлень про відомі компактні вихрові течії побудовані відповідні моделі. Розглянемо їх.

1. Перша модель відповідає течії, у якій азимутальна швидкість описується ізольованим гауссіаном [18] або вихором Тейлора [19]:

$$V_\theta = \frac{r}{2}\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right); \quad V_z = -\frac{r^2}{2l}\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right).$$

Такий тип вихору можливий лише в області рідини без границь. Але, за П. Сеффменом [7], він є компактним. На рис. 4 їм відповідає крива *2*.

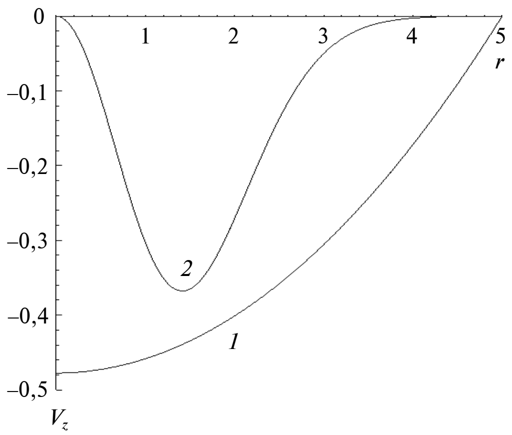

Рис. 4. Розподіли осьової швидкості: *1* – за моделлю квазіточкового вихору; *2* – за моделлю ізольованого гауссіана (вихору Тейлора)

2. Друга модель відповідає течії на підставі квазіточкового вихору (5) (див. рис. 4):

$$V_z = -\frac{\Gamma}{2\pi l}\left(1 - \frac{r^2}{R_V^2}\right). \quad (8)$$

3. Третя модель використовує як азимутальну швидкість компактний аналог вихору Ренкіна (1):

$$V_z = \begin{cases} -\dfrac{V_0 r^2}{al}, & 0 \le r \le a, \\ -\dfrac{V_0 a}{l}\left(\dfrac{R_V^2 - r^2}{R_V^2 - a^2}\right), & a \le r \le R_V, \\ 0, & r > R_V. \end{cases} \quad (9)$$

Дуже близькою до (8) є формула Ескюдьє [20, 21] для азимутальної швидкості:

$$V_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}\left[1 - \exp\left(-\frac{r^2}{R_*^2}\right)\right] + \frac{\omega r}{2},$$

де ω, R_* – деякі константи.

Ця формула, з використанням умови компенсованості вихору, має вигляд [17]

$$V_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}\left[1 - \exp\left(-\frac{r^2}{R_*^2}\right)\right] - \frac{\Gamma}{2\pi R_V^2}\left[1 - \exp\left(-\frac{R_V^2}{R_*^2}\right)\right] r.$$

Відповідний вираз для поздовжньої компоненти швидкості має такий вигляд:

$$V_z = -\frac{\Gamma}{2\pi l}\left[1 - \exp\left(-\frac{r^2}{R_*^2}\right)\right] + \frac{\Gamma}{2\pi R_V^2 l}\left[1 - \exp\left(-\frac{R_V^2}{R_*^2}\right)\right] r^2.$$

На рис. 5 крива *2* відповідає саме їй.

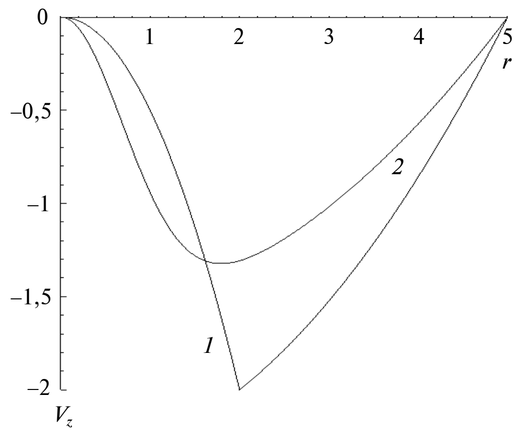

Рис. 5. Розподіли осьової швидкості: *1* – відповідає формулам (9); *2* – з використанням формули Ескудьє

4. Четверта модель базується на уявленні про порожнистий (кільцевий) компактний компенсований вихор (6):

$$V_z = \begin{cases} -\dfrac{\Omega_0 (r^2 - R_0^2)}{2l}, \quad R_0 \le r \le R_0 + a, \\ -\dfrac{\Omega_0}{l}\left(\dfrac{(R_0 + a)^2 - R_0^2}{(R_0 + R_V)^2 - (R_0 + a)^2}\right)\dfrac{(R_0 + R_V)^2 - r^2}{2}, \\ R_0 + a \le r \le R_0 + R_V, \\ 0, \quad r > R. \end{cases}$$

5. Нарешті, п'ята модель відповідає компактному компенсованому вихору з протитечією (7) (рис. 6):

$$V_z = \begin{cases} -\dfrac{r^2}{l} 0,5\Omega_0, & 0 \le r \le a, \\ -\dfrac{\Omega_0 a^2 + \Omega_1 (r^2 - a^2)}{2l}, & a \le r \le R_1, \\ -\dfrac{\Omega_0 a^2 + \Omega_1 (R_1^2 - a^2)}{2l}\left(\dfrac{R_2^2 - r^2}{R_2^2 - R_1^2}\right), & R_1 \le r \le R_2, \\ 0, & r > R_2. \end{cases}$$

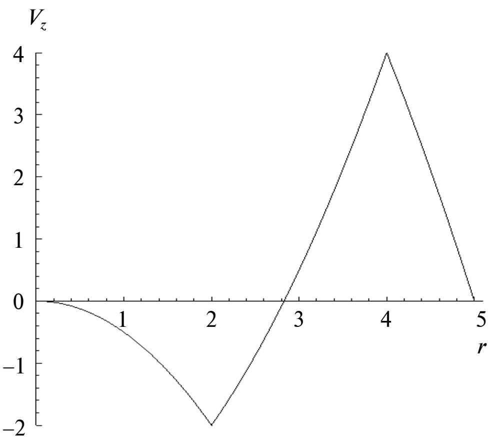

Рис. 6. Розподіл осьової швидкості у вихорі із гвинтовою симетрією на підставі вихору з протитечією

Хоча такі течії, як показують наведені приклади, розглядаються в рамках моделі нев'язкої рідини, існують також компактні вихрові течії у реальних рідинах, причому поля швидкості в них можна описувати наведеними вище моделями.

Моделі компактних гвинтових течій

Течія, у якій вектори швидкості та ротора швидкості є колінеарними, називається *гвинтовою*. Згідно зі сказаним, для гвинтової течії має місце співвідношення

$$\mathrm{rot}\mathbf{V} = \lambda\mathbf{V}. \quad (10)$$

У циліндричних координатах (10) набуває вигляду

$$-\frac{\partial V_z}{\partial z} = \lambda V_\theta; \quad \frac{1}{r}\frac{\partial(rV_\theta)}{\partial r} = \lambda V_z.$$

Необізнаному в цій області фахівцю легко переплутати таку течію з розглянутими вище. Річ у тім, що для течій із гвинтовою симетрією часто використовують термін *helical.* Утім цей термін відповідає саме гвинтовим течіям. Термін *гвинтова течія* був уведений у 1881 р. І. Громекою [22], отже, більш ніж століття тому. Лише через декілька років потому незалежно від І. Громеки опублікував свою працю Е. Бельтрамі (1889 р.). Але, на жаль, традиційно в більшості випадків таку течію іменують течією Бельтрамі.

Гвинтові течії розглядаються як такі, що є нев'язкими [13, 23]. Дійсно, визначення поля осьової компоненти швидкості отримується саме із визначення гвинтового руху, а не з рівнянь руху. Кілька років тому, на підставі наведених вище моделей компактних вихорів, були отримані аналітичні розв'язки, які, на відміну від усіх попередніх, уже враховували кінцевий розмір вихору в радіальному напрямку [24]:

1) компактний гвинтовий компенсований вихор;

2) компактний гвинтовий кільцевий вихор;

3) компактний гвинтовий вихор із трьома областями (сталої) завихреності.

На зовнішній границі течії осьова компонента швидкості у зазначених моделях не дорівнює нулю. В рамках моделі нев'язкої рідини це є цілком прийнятним. Отже, можна зазначити, що повністю гвинтових течій у необмеженому середовищі (тобто коли вихор не обмежений зовнішньою границею) не існує. Відповідь слід шукати через ускладнення моделі з урахуванням в'язкості рідини. Отримані результати і становлять зміст оригінальної статті.

Моделі дифузії компактних вихорів

Практично в кожному підручнику з гідромеханіки можна знайти модель дифузії точкового вихору — так званий вихор Лемба–Озеєна:

$$\Omega = \frac{\Gamma}{4\pi\nu t}\exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right);$$

$$V_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}\left[1-\exp\left(-\frac{r^2}{4\nu t}\right)\right],$$

де ν — кінематична в'язкість рідини, t — час.

Зазначені розв'язки відповідають вихровій течії нескінченних розмірів. Але за останні десятиріччя з'явилися нові розв'язки, що описують дифузію вихорів. Якщо вихор має скінченний розмір і при цьому дифундує, то умову компенсованості, або нульової циркуляції, також можна застосовувати. Так, Р. Клустерзіель [25] знайшов асимптотичний (для великих значень часу) розв'язок, що описує поведінку поля завихреності при дифузії вихору. Його розв'язок враховує те, що поле завихреності складається в кожний момент часу з двох частин різного знака завихреності:

$$\lim_{t\to\infty}\Omega(r;t) = \frac{\mathrm{const}}{(2t+1)^2}\left(1-\frac{r^2}{4t+2}\right)\exp\left(-\frac{r^2}{4t+2}\right).$$

На підставі подібних асимптотик у подальшому була розвинута аналітична модель [26], що описує молекулярну дифузію штучно створених у лабораторії плям у стійко стратифікованій (у вертикальному напрямку) рідині (зазначимо, що і океан, і атмосфера мають вертикальну стратифікацію).

Оскільки в природі (океани, моря) основною є не молекулярна, а турбулентна дифузія, то в роботі [27] було знайдено автомодельно-аналітичний розв'язок для турбулентної дифузії вихору, що описується таким автомодельним рівнянням:

$$\frac{d^2\hat{\Omega}}{d\eta^2}+\left(\frac{1}{\eta}+\frac{3}{2}\eta\right)\frac{d\hat{\Omega}}{d\eta}+\frac{3(n+1)}{2}\hat{\Omega}=0,$$

де $\hat{\Omega}(\eta)=\Omega(r,t)\cdot t^{-a}$; $\eta=t^b r$ — автомодельна змінна; параметри a, b знаходяться з умов автомодельності розв'язків і залежать від типу дифузії тощо.

Загальний роз'язок має вигляд ряду. При $n=3$ він відповідає ізольованому гауссіану [18] або вихору Тейлора [19]:

$$\hat{\Omega}=\left(1-\frac{3}{4}\eta^2\right)\exp\left(-\frac{3}{4}\eta^2\right).$$

При $n>3$ поле швидкості має на периферії протитечію, а поле завихреності складається з трьох областей сталого знака (рис. 7).

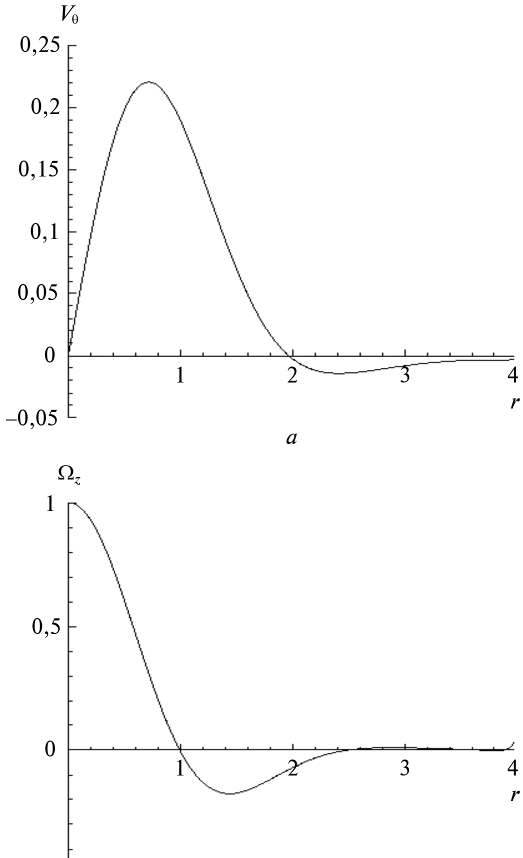

Рис. 7. Автомодельний розподіл швидкості (*а*) та завихреності (*б*) при $n=4$, що відповідає вихору із протитечією

За останні десятиліття також були уточнені моделі вихоростоку та вихороджерела. Як відомо з підручників, зазначені течії отримують як просте накладання (суперпозицію) точкового вихору і течії у вигляді стоку або джерела [2, 3]. Так, О. Гайфуллін [28] отримав нові автомодельні розв'язки щодо зазначених течій. Але поле азимутальної швидкості у цих розв'язках також не є компактним. Указаний недолік подолано в роботі [29], де отримано автомодельне рівняння

$$\frac{d^2\hat{\Omega}}{d\eta^2}+\left(\frac{1-\Lambda}{\eta}-\mathrm{Re}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)\eta\right)\frac{d\hat{\Omega}}{d\eta}+2\,\mathrm{Re}\,(1+\gamma)\hat{\Omega}=0,$$

розв'язок якого подано у вигляді ряду

$$\hat{\Omega}=\sum_{k}^{\infty}A_k\eta^{k-1},\quad k=1,3,\ldots$$

Коефіцієнти цього ряду знаходяться з рекурентних співвідношень вигляду

$$A_{k+2}=-\frac{\mathrm{Re}(k+n)}{(k+1)(k+1-\Lambda)}\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)A_k.$$

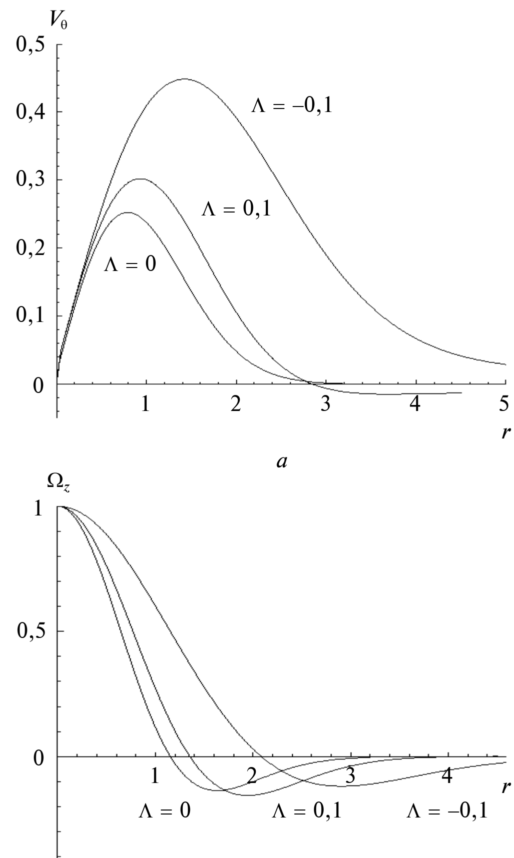

Рис. 8. Розподіли азимутальної швидкості (*а*) та завихреності (*б*)

У наведених щойно співвідношеннях Re — число Рейнольдса, $\Lambda = Q/K$ — параметр, що означає співвідношення потужності джерела або стоку Q до величини турбулентної дифузії K; γ — показник степеня часу, за яким змінюється коефіцієнт турбулентної дифузії. Приклади графіків функцій азимутальної швидкості та завихреності наведені на рис. 8.

Моделі генерації компактного турбулентного вихору

У роботі [30] на підставі знань про структуру турбулентної течії Тейлора–Куетта [31] отримано аналітичний розв'язок, що описує поширення в часі турбулентного вихору, який має скінченний розмір у кожний момент часу. Отримане автомодельне рівняння для функції циркуляції швидкості U_s, його розв'язок і відповідний розподіл азимутальної швидкості мають такий вигляд:

$$-\frac{\eta}{2}\frac{dU_s}{d\eta} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{d^2U_s}{d\eta^2},$$

$$U_s(\eta) = \frac{\Gamma}{2\pi}\left(1 - \mathrm{erf}\left(\frac{\sqrt{\mathrm{Re}}}{2}\eta\right)\right),$$

$$V_\theta(r,t) = \frac{\Gamma}{2\pi r}\left(1 - \mathrm{erf}\left(\sqrt{\frac{\mathrm{Re}}{t}}\,\frac{(r - R_i)}{2}\right)\right).$$

Графіки азимутальної швидкості, наведені на рис. 9, чітко вказують на скінченний розмір вихору в кожний момент часу.

Для більш повного огляду робіт з вихрової тематики можна рекомендувати оглядову статтю В. Мелешка і Х. Арефа [32], в якій викладено бібліографію за майже 100 перших років існування цієї галузі науки. Корисною є також оглядова робота Г. Фліра [33] з моделей компактних вихорів у геофізиці. Нарешті, заслуговує на увагу стаття М. Сатіжина та ін. [34], де увага зосереджена на моделях вихорів, побудованих на автомодельних розв'язках.

У технічних пристроях вихрові потоки обмежені твердими стінками. Їх структури набагато складніші за наведені вище моделі. Поки що ці структури вивчаються в основному експериментально [35–37]. Річ у тім, що це — особливий клас течій із гвинтовою симетрією, у яких спостерігається втрата стійкості та утворення так званих когерентних вихрових структур. Ці структури існують поблизу як фіксованої твердої стінки, так і рухомої рідинної циліндричної границі [38]. Але аналогія із компактними течіями з гвинтовою симетрією для низки випадків є очевидною.

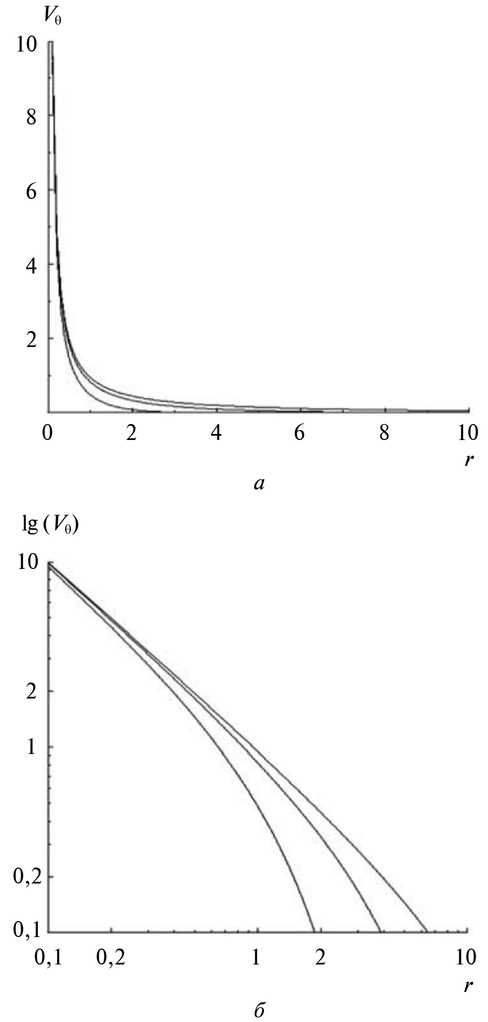

Рис. 9. Азимутальна швидкість у турбулентному вихорі у звичайних (*а*) та у логарифмічних (*б*) координатах для різних значень $\sqrt{\frac{\mathrm{Re}}{t}} = 1$ (нижні криві); 0,32 (середні криві); 0,1 (верхні криві)

Висновки

У роботі наведено низку нових аналітичних моделей, що з'явилися за попередні три–чотири десятиріччя і описують як ламінарну, так і турбулентну динаміку монопольних вихрових течій, але які дотепер не знайшли належного відображення в традиційних підручниках і навчальних посібниках. Подальші дослідження слід спрямувати на пошук аналітичних моделей когерентних вихрових структур у потоках в'язкої рідини, особливо поблизу криволінійних поверхонь, де порушується відомий у гідромеханіці "закон стінки" та мають місце аномалії тепломасообміну.

Подяка

Автори роботи висловлюють щиру подяку професору кафедри загальної фізики та фізики твердого тіла КПІ ім. І. Сікорського В'ячеславу Миколайовичу Горшкову за його конструктивні зауваження, що сприяли покращенню вступної частини статті.

Список літератури

1. *Pearson H.J., Linden P.F.* The final stage of decay of turbulence in stably stratified fluid. // J. Fluid. Mech. – 1983. – **134**. – P. 195–203.
2. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1987. – 840 с.
3. *Путята В.Й., Сідляр М.М.* Гідромеханіка. – К.: Вид-во Київ. ун-ту, 1963. – 480 с.
4. *Козлов В.Ф.* Геофизическая гидродинамика вихревых пятен // Морской гидрофиз. журнал. – 1994. – № 1. – С. 26–35.
5. *Stern M.E.* Minimal properties of planetary eddies // J. Marine Res. – 1975. – **33**, № 1. – P. 1–13.
6. *Лук'янов П.В.* Одновимірні моделі компактних вихорів // Наукові вісті НТТУ "КПІ". – 2010. – № 4. – С. 145–150.
7. *Сэффмэн Ф.Дж.* Динамика вихрей. – М.: Научный мир, 2000. – 375 с.
8. *Лук'янов П.В.* Модель квазіточкового вихору // Наукові вісті НТТУ "КПІ". – 2011. – № 4. – С. 139–142.
9. *Лукьянов П.В.* Модели компактных компенсированных вихрей и их применение в задачах механики жидкости и газа // Прикладна гідромеханіка. – 2011. – **13**, № 2. – С. 37–43.
10. *Козлов В.Ф.* Стационарные модели бароклинных компенсированных вихрей // Известия АН. Физика атмосферы и океана. – 1992. – **28**, № 6. – С. 615–624.
11. *Арсеньев С.А., Губарь А.Ю., Николаевский В.М.* Самоорганизация торнадо и ураганов в атмосферных течениях с мезомасштабными вихрями // ДАН. – 2004. – № 4. – С. 541–546.
12. *Рудяк В.Я., Савченко С.О.* Моделирование закрученной затопленной струи, индуцируемой вихрестоком // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2002. – № 4. – С. 139–149.
13. *Alekseenko S.V., Kuibin P.A., Okulov V.L.* Theory of Concentrated Vortices: An Introduction. – Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2007. – 493 p.
14. *Dritschel D.G.* Generalized helical Beltrami flows in hydrodynamics and magnetohydrodynamics // J. Fluid. Mech. – 1991. – **222**. – P. 525–541.
15. *Куйбин П.А., Окулов В.Л.* Одномерные решения для течений с винтовой симметрией // Теплофизика и аэромеханика. – 1996. – № 4. – С. 311–315.
16. *Lucas D., Dritschel D.G.* A family of helically symmetric vortex equilibria // J. Fluid Mech. – 2009. – **634**. – P. 245–268.
17. *Лукьянов П.В.* Модели компактных компенсированных вихрей с винтовой симметрией // Прикладна гідромеханіка. – 2013. – **15**, № 3. – С. 37–42.
18. *Hopfinger E.J., van Heijst G.J.F.* Vorticies in rotating fluids // Annu. Rev. Fluid Mech. – 1993. – **25**. – P. 241–289.
19. *Taylor G.I.* Distribution of velocity and temperature between concentric cylinder // Proc. Roy. Soc. – 1935. – **A 151**. – P. 494–512.
20. *Leibovich S.* Vortex stability and breakdown – survey and extension // AIAA J. – 1984. – **22**, № 9. – P. 1192–1206.
21. *Escudier M.P., Borstein J., Maxworthy T.* The dynamics of confined vortices // Proc. Royal Soc. London. – 1982. – **A 382**. – P. 335–360.
22. *Громека И.С.* Собрание сочинений. – М.: Изд-во АН СССР, 1952. – 296 с.
23. *Васильев О.Ф.* Основы механики винтовых и циркуляционных потоков. – М.-Л.: Госэнергоиздат, 1958. – 144 с.
24. *Лукьянов П.В.* Компактные винтовые вихри // Прикладна гідромеханіка. – 2011. – **13**, № 3. – С. 61–68.
25. *Kloosterziel R.C.* On the large-time asymptotics of the diffusion equation on infinite domains // J. Eng. Math. – 1990. – **24**. – P. 213–236.
26. *Dynamics* of pacake-like vortices in stratified fluid: experiments, model and numerical simulations / M. Beckers, R. Verzicco, H.J.H. Clercx, G.J.F. van Heijst // J. Fluid Mech. – 2001. – **433**. – P. 1–27.
27. *Лукьянов П.В.* Диффузия изолированного квазидвумерного вихря в слое устойчиво стратифицированной жидкости // Прикладна гідромеханіка. – 2006. – **8**, № 3. – С. 63–77.
28. *Гайфуллин А.М.* Автомодельное нестационарное течение вязкой жидкости // Механика жидкости и газа. – 2005. – № 4. – С. 29–35.
29. *Лук'янов П.В.* Квазикомпактные вихреисточник и вихресток // Прикладна гідромеханіка. – 2012. – **14**, № 2. – С. 23–29.

30. *Лук'янов П.В.* Генерація компактного турбулентного вихору: наближена модель для відносно великих моментів часу // Наукові вісті НТТУ "КПІ". – 2013. – № 4. – С. 127–131.
31. *Townsend A.A.* The Structure of Turbulent Shear Flow. – Cambridge: Cambridge University Press, 1956. – 315 p.
32. *Meleshko V.V., Aref H.* A bibliography of vortex dynamics 1858–1956 // Adv. Appl. Mech. – 2007. – **41**. – P. 197–291.
33. *Flierl G.R.* Isolated eddy models in geophysics // Annu. Rev. Fluid. – 1987. – **19**. – P. 493–530.
34. *Vortex* models based on similarity solutions of the two-dimensional diffusion equation / M.P., Satijn M.G. van Buren, H.J.H. Clercx, G.J.H. van Heijst // Phys. Fluids. – 2004. – **16**, № 11. – P. 3997–4011.
35. *Турик В.Н.* О взаимной восприимчивости вихревых структур и управлении ими // Вісник НТУУ "КПІ". Сер. Машинобудування. – 2009. – № 56. – С. 286–299.
36. *Турик В.Н.* Когерентные вихревые структуры в ограниченных закрученных потоках // Вісник Черкас. держ. технолог. ун-ту. – 2004. – № 2. – С. 58–67.
37. *Кочин В.А., Турик В.Н.* Особенности методики проведения термоанемометрического эксперимента при исследовании структуры течений в вихревой камере // Вісник НТУУ "КПІ". Сер. Машинобудування. – 2005. – № 47. – С. 54–57.
38. *Турик В.Н.* О гидродинамической неустойчивости течений в вихревых камерах // Промислова гідравліка і пневматика. – 2006. – № 3. – С. 32–37.

References

[1] H.J. Pearson and P.F. Linden, "The final stage of decay of turbulence in stably stratified fluid", *J. Fluid. Mech.*, vol. 134, pp. 195–203, 1983. doi: 10.1017/S0022112083003304

[2] L.G. Loitsyansky, *Mechanics of Fluid and Gas.* Moscow, SU: Nauka, 1987 (in Russian).

[3] V.I. Putyata and M.M. Sidlyar, *Hydromechanics.* Kyiv, SU: Kyiv University Publ., 1963 (in Ukrainian).

[4] V.F. Kozlov, "Geophysical hydrodynamics of vortex patches", *Morskoi Gidrofizicheskii Zhurnal*, no. 1, pp. 26–35, 1994 (in Russian).

[5] M.E. Stern, "Minimal properties of planetary eddies", *J. Marine Res.*, vol. 33, no. 1, pp. 1–13, 1975.

[6] P.V. Lukianov, "One-dimensional models of compact vortices", *Naukovi Visti NTUU KPI*, no. 4, pp. 145–150, 2010 (in Ukrainian).

[7] P.G. Saffman, *Vortex Dynamics.* Moscow, Russia: Nauchny Mir, 2000 (in Russian).

[8] P.V. Lukianov, "Model of the quasi-point vortex", *Naukovi Visti NTUU KPI*, no. 4, pp. 139–142, 2011 (in Ukrainian).

[9] P.V. Lukianov, "Compact compensated vortex models and their using in fluid and gas mechanics", *Applied Hydromechanics*, vol. 13, no. 2, pp. 37–43, 2011 (in Russian).

[10] V.F. Kozlov, "Stationary models of baroclinic compensated vortices", *Izvestiya AN. Fizika Atmosfery i Okeana*, vol. 28, no. 6, pp. 615–624, 1992 (in Russian).

[11] S.A. Arseniev *et al.*, "Self-organization of tornados and hurricanes in atmospheric flows with mesoscale vortices", *DAN*, vol. 395, no. 6, pp. 1–6, 2004 (in Russian).

[12] V.Ya. Rudyak and S.O. Savchenko, "Modelling of twisted submerged jet inducted by vorticity sink", *Sibirski Zhurnal Industrial'noji Matematiki*, no. 4, pp. 139–149, 2002 (in Russian).

[13] S.V. Alekseenko *et al.*, *Theory of Concentrated Vortices: An Introduction.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2007.

[14] D.G. Dritschel, "Generalized helical Beltrami flows in hydrodynamics and magnetohydrodynamics", *J. Fluid. Mech.*, vol. 222, pp. 525–541, 1991. doi: 10.1017/S0022112091001209

[15] P.A. Kuibin and V.L. Okulov, "One-dimensional solutions for the flows with helical symmetry", *Teplofizika i Aeromechanika*, no. 4, pp. 311–315, 1996.

[16] D. Lucas and D.G. Dritschel, "A family of helically symmetric vortex equilibria", *J. Fluid Mech.*, vol. 634, pp. 245–268, 2009. doi: 10.1017/s0022//2009007319

[17] P.V. Lukianov, "The models of compact compensated vortex flows with helical symmetry", *Applied Hydromechanics*, vol. 15, no. 3. pp. 37–42, 2013 (in Russian).

[18] E.J. Hopfinger and G.J.F. van Heijst, "Vorticies in rotating fluids", *Ann. Rev. Fluid Mech.*, vol. 25, pp. 241–289, 1993. doi: 10.1146/annurev.fl.25.010193.001325

[19] G.I. Taylor, "Distribution of velocity and temperature between concentric cylinder", *Proc. Roy. Soc.*, vol. A 151, pp. 494–512, 1935. doi: 10.1098/rspa.1935.0163

[20] S. Leibovich, "Vortex stability and breakdown – survey and extension", *AIAA J.*, vol. 22, no. 9, pp. 1192–1206, 1984.

[21] M.P. Escudier *et al.*, "The dynamics of confined vortices", *Proc. Royal Soc. London*, vol. A 382, pp. 335–360, 1982. doi: 10.1098/rspa.1982.0105

[22] I.S. Gromeka, *Paper Collection*. Moscow, SU: Academy of Science of the USSR, 1952 (in Russian).
[23] O.F. Vasiliev, *Introduction to Helical and Circulating Flows Mechanics*. Moscow, Lieningrad, SU: Gosenergoizdat, 1958 (in Russian).
[24] P.V. Lukianov, “Compact helical vortices”, *Applied Hydromechanics*, vol. 13, no. 3, pp. 61–68, 2011 (in Russian).
[25] R.C. Kloosterziel, “On the large-time asymptotics of the diffusion equation on infinite domains”, *J. Eng. Math.*, vol. 24, pp. 213–236, 1990. doi: 10.1007/BF00058467
[26] M. Beckers, “Dynamics of pacake-like vortices in stratified fluid: experiments, model and numerical simulations”, *J. Fluid Mech.*, vol. 433. pp. 1–27, 2001. doi: 10.1017/S0022112001003482
[27] P.V. Lukianov, “Vortex diffusion in the layer of viscous stratified fluid”, *Applied Hydromechanics*, vol. 8, no. 3, pp. 63–77, 2006 (in Russian).
[28] A.M. Gaifullin, “Self-similar non-steady viscous fluid flow”, *Miechanika Zhidkosti i Gaza,* no. 4, pp. 29–35, 2005 (in Russian). doi: 10.1017/ s0022//2009007319
[29] P.V. Lukianov, “Quasi-compact vortex-source and vortex-sink flows”, *Applied Hydromechanics*, vol. 14, no. 2, pp. 23–29, 2012 (in Ukrainian).
[30] P.V. Lukianov, “Compact turbulent vortex generation: Approximate model for relatively large time moments”, *Naukovi Visti NTUU KPI*, no. 4, pp. 127–131, 2013 (in Ukrainian).
[31] A.A. Townsend, *The Structure of Turbulent Shear Flow*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1956.
[32] V.V. Meleshko and H. Aref, “A bibliography of vortex dynamics 1858–1956”, *Adv. Appl. Mech.*, vol. 41, pp. 197–291, 2007.
[33] G.R. Flierl, “Isolated eddy models in geophysics”, *Annu. Rev. Fluid*, vol. 19, pp. 493–530 1987. doi: 10.1146/annurev.fl. 19.010187.002425
[34] M.P. Satijn *et al.*, “Vortex models based on similarity solutions of the two-dimensional diffusion equation”, *Phys. Fluids*, vol. 16, no. 11, pp. 3997–4011, 2004. doi: 10.1063/1.1804548
[35] V.N. Turick, “On the mutual susceptibility of vortical structures and their control”, *Visnyk NTUU KPI. Ser. Mashinobuduvannja*, no. 56, pp. 286–299, 2009 (in Russian).
[36] V.N. Turick, “Coherent vortical structures in the limited twisting flows”, *Visnyk Cherkass'kogo Technologichnogo Universitetu*, no. 2, pp. 58–67, 2004 (in Russian).
[37] V.A. Kochin and V.N. Turick, “Measurement procedure features of hot-wire anemometer experiment for flow structure study in vortex chamber”, *Visnyk NTUU KPI. Ser. Mashinobuduvannja*, no. 47, pp. 54–57, 2005 (in Russian).
[38] V.N. Turick, “On hydrodynamic instability of flows in vortex chambers”, *Promyslova Gidravlika i Pnevmatyka*, no. 3, pp. 32–37, 2006 (in Russian).

П.В. Лук’янов, В.М. Турик

РОЗВИТОК АНАЛІТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ КОМПАКТНИХ МОНОПОЛЬНИХ ВИХРОВИХ ТЕЧІЙ

Проблематика. Математичний опис вихрових течій як частини фундаментальних понять фізики суцільних середовищ, гідрогазодинаміки, теплофізики, теоретичних основ хімічних технологій, геофізики, метеорології.

Мета дослідження. Поповнення існуючої інформації в традиційній науково-технічній та навчальній літературі про вихори та їх аналітичні моделі новими даними для науковців, викладачів, аспірантів і студентів з метою використання у подальших дослідженнях вихрового руху рідин і газів.

Методика реалізації. Аналітичний огляд існуючих моделей вихрових течій, зокрема монопольних компактних вихорів, на підставі нових даних наукових статей і спеціалізованих монографій та порівняння їх із традиційними даними, що містяться у відомих підручниках і навчальних посібниках.

Результати дослідження. Виявлено відсутність у традиційних науково-технічних і навчально-методичних джерелах новітніх моделей компактних вихорів. До їх числа можна віднести компактні аналоги точкового вихору та вихору Ренкіна: квазіточковий вихор і компактний компенсований вихор. З використанням їх і подібних до них розв’язків (кільцевий вихор, вихор із трьома областями сталої завихреності) було розроблено моделі компактних гвинтових вихорів та вихорів із гвинтовою симетрією. Проаналізовано розв’язки задач дифузії компактних вихорів (вихор Тейлора, розв’язок Клустерзіеля), турбулентної дифузії компактного вихору, розв’язки задач про квазікомпактні (ламінарне та турбулентне) вихороджерело та вихоростік, а також розв’язок задачі про генерацію компактного турбулентного вихору циліндром, що обертається. Наведені моделі узгоджуються із законом збереження енергії і тому мають перевагу в їх використанні.

Висновки. Наведено низку новітніх аналітичних моделей, що описують як ламінарну, так і турбулентну динаміку монопольних вихрових течій, але які дотепер не знайшли належного відображення в традиційній літературі. Подальші дослідження слід спрямувати на пошук аналітичних моделей когерентних вихрових структур у потоках в’язкої рідини, особливо поблизу криволінійних поверхонь, де порушується відомий у гідромеханіці “закон стінки” та мають місце аномалії тепломасообміну.

Ключові слова: компактний вихор; аналітичні моделі; ідеальна рідина; в’язка рідина; ламінарна течія; турбулентна течія; дифузія вихору; генерація вихору.

П.В. Лукьянов, В.Н. Турик

РАЗВИТИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ КОМПАКТНЫХ МОНОПОЛЬНЫХ ВИХРЕВЫХ ТЕЧЕНИЙ

Проблематика. Математическое описание вихревых течений как части фундаментальных понятий физики сплошных сред, гидрогазодинамики, теплофизики, теоретических основ химических технологий, геофизики, метеорологии.

Цель исследования. Пополнение существующей информации в традиционной научно-технической и учебной литературе о вихрях и их аналитических моделях новыми данными для научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов с целью использования в дальнейших исследованиях вихревого движения жидкостей и газов.

Методика реализации. Аналитический обзор существующих моделей вихревых течений, в том числе монопольных компактных вихрей, на основе новых данных научных статей и специализированных монографий и сравнение их с традиционными данными, содержащимися в известных учебниках и учебных пособиях.

Результаты исследования. Выявлено отсутствие в традиционных научно-технических и учебно-методических источниках современных моделей компактных вихрей. К их числу можно отнести компактные аналоги точечного вихря и вихря Рэнкина: квазиточечный вихрь и компактный компенсированный вихрь. С использованием их и подобных им решений (кольцевой вихрь, вихрь с тремя областями постоянной завихренности) были разработаны модели компактных винтовых вихрей и вихрей с винтовой симметрией. Проанализированы решения задач диффузии компактных вихрей (вихрь Тейлора, решение Клустерзиэля), турбулентной диффузии компактного вихря, решения для задач о квазикомпактных (ламинарном и турбулентном) вихреисточнике и вихрестоке, а также решение задачи о генерации вращающимся цилиндром компактного турбулентного вихря. Приведенные модели, согласуясь с законом сохранения энергии, имеют преимущество при их использовании.

Выводы. Приведен ряд новейших аналитических моделей, описывающих как ламинарную, так и турбулентную динамику монопольных вихревых течений, но до настоящего времени не нашедших надлежащего отображения в традиционной литературе. Дальнейшие исследования следует направить на поиск аналитических моделей когерентных вихревых структур в потоках вязкой жидкости, особенно вблизи криволинейных поверхностей, где нарушается известный в гидромеханике “закон стенки” и имеют место аномалии тепломассообмена.

Ключевые слова: компактный вихрь; аналитические модели; идеальная жидкость; вязкая жидкость; ламинарное течение; турбулентное течение; диффузия вихря; генерация вихря.

Рекомендована Радою
Механіко-машинобудівного інституту
КПІ ім. Ігоря Сікорського

Надійшла до редакції
21 травня 2017 року