

УДК 517.9

DOI: 10.20535/1810-0546.2017.4.95191

І.В. Веригіна\*

КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

## ЕФЕКТИВНІСТЬ СТРАТЕГІЙ У МОДЕЛЯХ КОНФЛІКТНОГО ПЕРЕРОЗПОДІЛУ РЕСУРСНОГО ПРОСТОРУ

**Background.** The model of conflict redistribution of resource space (territory) between a pair of opponents in the case of infinite fractal division of space is investigated.

**Objective.** The aim of the paper is to consider the problem of conflict redistribution of resource space, if the opponent presence measures on the space are limited, but not necessarily probabilistic.

**Methods.** To specify the measures of the occupied territories and to find their limiting values a probabilistic approach was applied.

**Results.** The existence of limit values of measures of occupied territories with an infinite increase in the division step is established. The possible values are indicated. Using computer simulation graphs are obtained which show the behavior of the measures of the occupied territories with increasing of the division step.

**Conclusions.** It is shown that the limit values of measures of occupied territories depend only on the selected strategies (that is, the way of structured representation of measures that correspond to each of the opponents).

**Keywords:** dynamic conflict system; conflict redistribution of resource space; strategies of opponents; self-similar measures.

### Вступ

Розглянемо систему, що складається з двох протидіючих сторін (опонентів) і простору  $\Omega$ , на якому відбувається їх конфлікт. Простір конфлікту є самоподібно структурованим одиничним відрізком  $\Omega = [0, 1]$  із трьома мірами, одна з яких  $\lambda$  – міра Лебега, дві інші –  $\mu$  та  $\nu$  – є мірами, що відповідають двом опонентам, які конфліктують на спільному ресурсному просторі  $\Omega$ . Структурованість простору відповідає  $\mathcal{Q}_n$ -представленню чисел одиничного відрізка (див. [1]). Задача про конфліктний перерозподіл ресурсного простору виникла як продовження досліджень у теорії динамічних систем конфлікту, що розвинута в [2–4]. Але, на відміну від дослідження безпосередньо динаміки конфлікту, ставиться така задача: яка частина ресурсного простору, що задається мірою Лебега, в результаті конфлікту, “боротьби”, буде відповідати кожній із конфліктуючих сторін (називаємо це “захопленням” ресурсного простору)? У [5] таку задачу було розглянуто у випадку, коли початковий поділ простору відбувається на два регіони, тобто при  $n = 2$ , а міри  $\mu, \nu$  є ймовірнісними; було доведено існування граничних значень мір територій, захоплених опонентами. У [6, 7] цю задачу було розв’язано в більш загальному випадку для  $n \geq 2$ , міри захо-

плених опонентами територій було оцінено за допомогою значень функції розподілу стандартної нормально розподіленої величини. У нашій роботі ця задача розглядається у випадку, коли міри присутності опонентів на ресурсному просторі  $\mu$  і  $\nu$  не обов’язково є ймовірнісними та однаковими. Показується роль вибраних опонентами стратегій, тобто способу подання мір  $\mu$  і  $\nu$  на просторі  $\Omega$ .

### Постановка задачі

Метою роботи є дослідження динаміки перерозподілу ресурсного простору в результаті конфліктної боротьби двох опонентів з урахуванням вибору опонентами стратегій і структурної (фрактальної) регіоналізації самого простору у випадку, коли міри присутності опонентів на ресурсному просторі є обмеженими, але не обов’язково однаковими.

### Побудова моделі

Розглянемо модель системи з двох протидіючих сторін. Назвемо їх опонентами А та В, які взаємодіють (конфліктують) за певним правилом на спільному ресурсному просторі  $\Omega = [0, 1]$ . Нехай простір конфлікту є подрібненим на регіони ітераційним способом:

\*corresponding author: i.verygina@kpi.ua

$\Omega = \bigcup_{i_1, \dots, i_k=1}^n \Omega_{i_1 \dots i_k}$ ,  $k = 1, 2, \dots$  ( $k$  – крок подрібнення). На кроці подрібнення  $k = 1$  простір поділений на  $n$  регіонів ( $n$  – фіксоване число,  $n \geq 2$ ), міри Лебега яких  $q_1, q_2, \dots, q_n$ , де  $q_i > 0$ ,  $\sum_{i=1}^n q_i = 1$ . При подальшому подрібненні міра Лебега  $\lambda$  регіону  $\Omega_{i_1 \dots i_k}$  визначається за формулою

$$\begin{aligned} \lambda(\Omega_{i_1 \dots i_k}) &= |\Omega_{i_1 \dots i_k}| = q_{i_1} q_{i_2} \dots q_{i_k} = \\ &= q_1^{m_1(k)} q_2^{m_2(k)} \dots q_n^{m_n(k)}, \\ m_i(k) &\in \{0, 1, \dots, k\}, \sum_{i=1}^n m_i(k) = k, \end{aligned}$$

де  $m_i(k)$  позначає кількість індексів  $i_s$  у  $\Omega_{i_1 \dots i_k}$  таких, що  $i_s = i$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

Присутність опонентів А та В на  $\Omega$  на кроці подрібнення  $k$  задається мірами  $\mu$  та  $\nu$  відповідно:

$$\begin{aligned} \mu(\Omega_{i_1 \dots i_k}) &= p_{i_1 \dots i_k}, \nu(\Omega_{i_1 \dots i_k}) = r_{i_1 \dots i_k}, \\ \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^n p_{i_1 \dots i_k} &= a, \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^n r_{i_1 \dots i_k} = b, a, b \in R, a, b > 0. \end{aligned}$$

Стратегія кожного з опонентів А та В фіксується наборами чисел  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  і  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  відповідно, де  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = \sum_{i=1}^n \beta_i = 1$ ,  $0 < \alpha_i < 1$ ,  $0 < \beta_i < 1$  для всіх  $i = 1, \dots, n$ . Тоді на  $k$ -му кроці подрібнення міри присутності опонентів визначаються за формулами

$$\begin{aligned} p_{i_1 \dots i_k} &= a \cdot \alpha_1^{m_1(k)} \alpha_2^{m_2(k)} \dots \alpha_n^{m_n(k)}, \\ r_{i_1 \dots i_k} &= b \cdot \beta_1^{m_1(k)} \beta_2^{m_2(k)} \dots \beta_n^{m_n(k)}. \end{aligned}$$

Вважаємо, що опоненти мають різні стратегії, тобто  $\exists i: \alpha_i \neq \beta_i$ , тому, взагалі,  $p_{i_1 \dots i_k} \neq r_{i_1 \dots i_k}$ . Якщо  $p_{i_1 \dots i_k} > r_{i_1 \dots i_k}$ , то говоримо, що в цьому регіоні “перемагає” опонент А і він “захоплює” цю територію. Позначимо такий регіон  $\Omega_{i_1 \dots i_k}^A$ . І навпаки, якщо  $p_{i_1 \dots i_k} < r_{i_1 \dots i_k}$ , то в цьому регіоні “перемагає” опонент В. Позначимо такий регіон  $\Omega_{i_1 \dots i_k}^B$ . Якщо ж  $p_{i_1 \dots i_k} = r_{i_1 \dots i_k}$ , то цей регіон не належить жодному з опонентів. Позначимо такий регіон  $\Omega_{i_1 \dots i_k}^{A=B}$ . На кроці подрібнення  $k$  зберемо всі регіони,

“захоплені” А або В, і ті, де вони обидва втрачають свій вплив. Міри цих територій позначимо

$$\begin{aligned} T_k^A &= \sum \lambda(\Omega_{i_1 \dots i_k}^A), T_k^B = \sum \lambda(\Omega_{i_1 \dots i_k}^B), \\ T_k^{A=B} &= \sum \lambda(\Omega_{i_1 \dots i_k}^{A=B}). \end{aligned}$$

Поставимо запитання: як змінюються розміри територій  $T_k^A, T_k^B, T_k^{A=B}$ , якщо  $k$  необмежено зростає? Покажемо, що існують граничні значення  $T^A = \lim_{k \rightarrow \infty} T_k^A, T^B = \lim_{k \rightarrow \infty} T_k^B, T^{A=B} = \lim_{k \rightarrow \infty} T_k^{A=B}$ .

### Імовірнісна інтерпретація міри Лебега захопленої території

Умова  $p_{i_1 \dots i_k} > r_{i_1 \dots i_k}$ , що забезпечує перемогу опонента А у регіоні  $\Omega_{i_1 \dots i_k}$ , рівносильна такій умові:

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} \ln \frac{a}{b} + \frac{m_1(k)}{k} \ln \frac{\alpha_1}{\beta_1} + \\ + \frac{m_2(k)}{k} \ln \frac{\alpha_2}{\beta_2} + \dots + \frac{m_n(k)}{k} \ln \frac{\alpha_n}{\beta_n} > 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Подивимось на нумерацію регіону  $\Omega_{i_1 \dots i_k}$  як на випадкову послідовність індексів  $\{i_1, \dots, i_k\}$ . На кожному місці  $s$  можна очікувати на появу одного з індексів  $i \in \{1, \dots, n\}$  з відповідними ймовірностями  $q_i: P\{i_s = i\} = q_i$ . Зауважимо, що появи індексів на різних місцях є незалежними подіями. Тоді  $\omega_i(k) = \frac{m_i(k)}{k}$  є частотою появи індексу  $i$  в послідовності  $\{i_1, \dots, i_k\}$ . Позначимо випадкові величини

$$\begin{aligned} \theta_k &= \sum_{i=1}^n \frac{m_i(k)}{k} \ln \frac{\alpha_i}{\beta_i}, \\ \eta_k &= \frac{1}{k} \ln \frac{a}{b} + \sum_{i=1}^n \frac{m_i(k)}{k} \ln \frac{\alpha_i}{\beta_i} = \frac{1}{k} \ln \frac{a}{b} + \theta_k. \end{aligned}$$

У випадку  $a = b$  ці величини збігаються.

Виконання умови (1) означає, що відбувається подія  $\{\eta_k > 0\}$ . Це також означає, що регіон належить опоненту А. Таким чином, міри Лебега територій, захоплених опонентами А та В на кроці подрібнення  $k$ ,  $T_k^A$  і  $T_k^B$  від-

повідно, та території, де опоненти рівносильні,  $T_k^{A=B}$ , допускають імовірнісну інтерпретацію. Тут і в подальшому застосовуємо позначення  $P\{C\}$  – імовірність події  $C$ .

**Твердження.** Міри Лебега територій  $T_k^A$ ,  $T_k^B$ ,  $T_k^{A=B}$ , де перевагу має один із опонентів, А чи В, або де вони рівносильні, можна розглядати як імовірності таких подій:

$$T_k^A = P\{\eta_k > 0\}, T_k^B = P\{\eta_k < 0\},$$

$$T_k^{A=B} = P\{\eta_k = 0\}.$$

Зробимо кілька зауважень щодо величин  $\theta_k$  і  $\eta_k$ .

Випадкова величина  $\theta_k$  є лінійною комбінацією випадкових біноміальних величин  $m_i(k)$ . Відомо (див., наприклад, [8]), що математичне сподівання таких величин  $M\{m_i(k)\} = kq_i$ . Математичне сподівання випадкової величини  $\theta_k$ :

$$\tilde{\theta} := M\{\theta_k\} = \sum_{i=1}^n q_i \ln \frac{\alpha_i}{\beta_i}, \quad (2)$$

а математичне сподівання випадкової величини  $\eta_k$ :

$$\tilde{\eta}_k := M\{\eta_k\} = \frac{1}{k} \ln \frac{a}{b} + \tilde{\theta}.$$

Величина  $\tilde{\theta}$  залежить тільки від вибраних стратегій та не залежить від кроку подрібнення  $k$ . Величина  $\tilde{\eta}_k$  залежить від  $k$ , але з ростом  $k$  наближається до  $\tilde{\theta}$ .

Біноміально розподілені величини  $m_i(k)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , можна подати у вигляді суми бернуллієвих величин (див. [8, 9]), а саме:

$$m_i(k) = \xi_1^{(i)} + \dots + \xi_k^{(i)} = \sum_{j=1}^k \xi_j^{(i)},$$

де  $\xi_j^{(i)}$  – випадкові величини, що є індикаторами появи індексу  $i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , на місці  $j$ ,  $j = \overline{1, k}$ , у послідовності індексів  $\{i_1, \dots, i_k\}$ :

$$P\{\xi_j^{(i)} = 1\} = P\{i_j = i\} = q_i,$$

$$P\{\xi_j^{(i)} = 0\} = P\{i_j \neq i\} = 1 - q_i.$$

За фіксованого  $i$  випадкові величини  $\xi_j^{(i)}$ ,  $j = \overline{1, k}$ , є незалежними; математичне сподіван-

ня –  $M\{\xi_j^{(i)}\} = q_i$ , дисперсія –  $D\{\xi_j^{(i)}\} = q_i \times (1 - q_i)$ . Подамо різницю  $(\theta_k - \tilde{\theta})$  через  $\xi_j^{(i)}$ :

$$\theta_k - \tilde{\theta} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^n (m_i(k) - kq_i) \ln \frac{\alpha_i}{\beta_i}$$

$$= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k (\xi_j^{(i)} - q_i) \ln \frac{\alpha_i}{\beta_i} =$$

$$= \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n (\xi_j^{(i)} - q_i) \ln \frac{\alpha_i}{\beta_i}. \quad (3)$$

Позначимо  $X_j = \sum_{i=1}^n (\xi_j^{(i)} - q_i) \ln \frac{\alpha_i}{\beta_i}$ . Тоді (3) перепишеться у вигляді

$$\theta_k - \tilde{\theta} = \frac{X_1 + \dots + X_k}{k} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k X_j. \quad (4)$$

Відповідно,  $\eta_k - \tilde{\theta} = \frac{1}{k} \ln \frac{a}{b} + \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k X_j$ . Значимо, що величини  $X_j$ ,  $j = \overline{1, k}$ , є однаково розподіленими та незалежними; математичне сподівання –  $M\{X_j\} = 0$ , дисперсія –

$$D\{X_j\} = M\{X_j^2\} =: S^2. \quad (5)$$

Зауважимо, що величини  $\tilde{\theta}$ ,  $S$ , які задаються формулами (2), (5), є сталими, не залежать від кроку подрібнення  $k$ , а фіксуються заданим початковим розподілом  $\Omega$  на регіони та вибраними стратегіями опонентів А і В.

**Теорема (про граничні значення мір Лебега захоплених територій)**

Якщо  $\tilde{\theta} > 0$ , то  $\lim_{k \rightarrow \infty} T_k^A = T^A = 1$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} T_k^B = T^B = 0$ .

Якщо  $\tilde{\theta} < 0$ , то  $\lim_{k \rightarrow \infty} T_k^A = T^A = 0$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} T_k^B = T^B = 1$ .

Якщо  $\tilde{\theta} = 0$ , то  $\lim_{k \rightarrow \infty} T_k^A = T^A = \lim_{k \rightarrow \infty} T_k^B = 1/2$ .

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T_k^{A=B} = T^{A=B} = 0.$$

Доведення. Розглянемо випадок, коли  $\tilde{\theta} > 0$ . Згідно з відомою теоремою Бернуллі (див. [8–10]), для довільного  $\varepsilon > 0$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{m_i(k)}{k} - q_i \right| < \varepsilon \right\} = 1.$$

Це означає, що відносна частота  $\omega_i(k) = \frac{m_i(k)}{k}$  при нескінченному збільшенні  $k$  збігається за ймовірністю до  $q_i$ :  $\omega_i \xrightarrow{P} q_i$  при  $k \rightarrow \infty$ . Тоді послідовність  $\theta_k$  збігається за ймовірністю до  $\tilde{\theta}$ :

$$\begin{aligned} \theta_k &= \sum_{i=1}^n \frac{m_i(k)}{k} \ln \frac{\alpha_i}{\beta_i} \xrightarrow{P} \tilde{\theta} = \\ &= \sum_{i=1}^n q_i \ln \frac{\alpha_i}{\beta_i} \text{ при } k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Отже, і послідовність величин  $\eta_k = \frac{1}{k} \ln \frac{a}{b} + \theta_k$  збігається за ймовірністю до  $\tilde{\theta}$ :  $\eta_k \xrightarrow{P} \tilde{\theta}$  при  $k \rightarrow \infty$ .

Зі збіжності за ймовірністю впливає збіжність за розподілом (див. [8]):

$$\eta_k \xrightarrow{d} \tilde{\theta} \text{ при } k \rightarrow \infty$$

або

$$P\{\eta_k > 0\} \rightarrow P\{\tilde{\theta} > 0\} \text{ при } k \rightarrow \infty.$$

Тобто існує границя

$$T^A = \lim_{k \rightarrow \infty} T_k^A = \lim_{k \rightarrow \infty} P\{\eta_k > 0\} = P\{\tilde{\theta} > 0\} = 1.$$

Оскільки  $T_k^A + T_k^B + T_k^{A=B} = 1$  для кожного  $k = 1, 2, \dots$ , то з існування  $\lim_{k \rightarrow \infty} T_k^A = T^A = 1$  впливає існування  $\lim_{k \rightarrow \infty} T_k^B = T^B = 0$  та  $\lim_{k \rightarrow \infty} T_k^{A=B} = T^{A=B} = 0$ .

Теорему в першому випадку доведено. Доведення у випадку, коли  $\tilde{\theta} < 0$ , є аналогічним.

Нехай  $\tilde{\theta} = 0$ . Розглянемо величину

$$\zeta_k = \frac{\sqrt{k}}{S} (\theta_k - \tilde{\theta}) = \frac{\sqrt{k}}{S} \theta_k,$$

де  $S$  визначено формулою (5). Згідно з (4)  $\zeta_k =$

$= \frac{\sum_{j=1}^k X_j}{S\sqrt{k}}$ . За центральною граничною теоремою (див. [8, с. 156])  $P\{\zeta_k < x\} \rightarrow F_{0,1}(x)$  при  $k \rightarrow \infty$ , рівномірно по  $x$ , де  $F_{0,1}(x)$  – функція розподілу нормального закону з параметрами (0,1) або

$$F_{0,1}(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{2} + \Phi(x),$$

де  $\Phi(x)$  – функція Лапласа. Тоді

$$\begin{aligned} T_k^A &= P\{\eta_k > 0\} = P\left\{\theta_k > -\frac{1}{k} \ln \frac{a}{b}\right\} = \\ &= P\left\{\frac{\sum_{j=1}^k X_j}{S\sqrt{k}} > -\frac{1}{S\sqrt{k}} \ln \frac{a}{b}\right\} = \\ &= P\left\{\zeta_k > -\frac{1}{S\sqrt{k}} \ln \frac{a}{b}\right\}. \end{aligned}$$

Зафіксуємо довільне  $\varepsilon > 0$  і відзначимо, що  $-\frac{1}{S\sqrt{k}} \ln \frac{a}{b} \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  для достатньо великих  $k$ .

Тоді

$$P\{\zeta_k > \varepsilon\} \leq P\left\{\zeta_k > -\frac{1}{S\sqrt{k}} \ln \frac{a}{b}\right\} \leq P\{\zeta_k > -\varepsilon\}$$

або

$$P\{\zeta_k > \varepsilon\} \leq T_k^A \leq P\{\zeta_k > -\varepsilon\}.$$

Тому, застосовуючи центральну граничну теорему, маємо

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} T_k^A \leq \lim_{k \rightarrow \infty} P\{\zeta_k > -\varepsilon\} = \frac{1}{2} - \Phi(-\varepsilon) = \frac{1}{2} + \Phi(\varepsilon);$$

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} T_k^A \geq \lim_{k \rightarrow \infty} P\{\zeta_k > \varepsilon\} = \frac{1}{2} - \Phi(\varepsilon).$$

Покладаючи  $\varepsilon \rightarrow +0$  та зважаючи на неперервність функції Лапласа, одержуємо

$$T^A = \lim_{k \rightarrow \infty} T_k^A = \frac{1}{2} + \Phi(0) = \frac{1}{2}.$$

Аналогічно отримаємо, що  $T^B = \frac{1}{2}$ .

Отже, у випадку, коли  $\tilde{\theta} = 0$ ,  $T^A = T^B = \frac{1}{2}$ , а тоді  $T^{A=B} = 0$ . Теорему доведено.

### Комп'ютерне моделювання задачі

За допомогою комп'ютерного моделювання було виконано розрахунки та досліджено поведінку описаних систем. Це дає змогу наочно продемонструвати і підтвердити отримані теоретичні результати. Розглянемо такі приклади.

**Приклад 1.** Нехай у випадку  $n = 2$  поділ  $\Omega$  задається числами  $q_1 = q_2 = 0,5$ , а стратегії опо-

нентів А і В визначаються наборами  $\alpha_1 = 0,6$ ,  $\alpha_2 = 0,4$  та  $\beta_1 = 0,2$ ,  $\beta_2 = 0,8$  відповідно. Нехай  $a = b = 1$ , тобто сили опонентів рівні. Тоді  $\tilde{\theta} = 0,203 > 0$ , і за теоремою  $T^A = 1$ ,  $T^B = 0$ . На рис. 1 показано поведінку  $T_k^A$  і  $T_k^B$  залежно від  $k$ . За значень  $k > 40$  опонент А захоплює більше 90 % території.

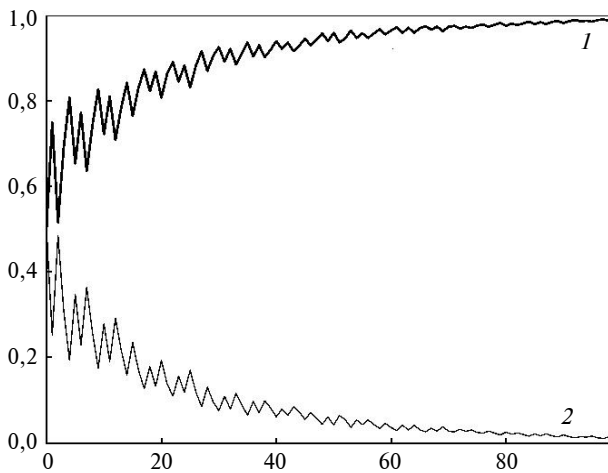


Рис. 1. Приклад 1. Міри Лебега захоплених територій  $T_k^A$  (1) і  $T_k^B$  (2) залежно від кроку подрібнення  $k$

**Приклад 2.** У випадку  $n = 2$  поділ  $\Omega$  задається числами  $q_1 = q_2 = 0,5$ , а стратегії опонентів —  $\alpha_1 = 0,6$ ,  $\alpha_2 = 0,4$  та  $\beta_1 = 0,2$ ,  $\beta_2 = 0,8$ . Нехай сили опонентів нерівні:  $a = 2$ ,  $b = 100$ . Значення  $\tilde{\theta} = 0,203 > 0$ , і тоді за теоремою  $T^A = 1$ ,  $T^B = 0$ . На рис. 2 показано поведінку  $T_k^A$  та  $T_k^B$ .

Графік демонструє, що хоча опонент В має велику початкову перевагу над опонентом А, при збільшенні кроку  $k$  територія, яку він захоплює, наближається до 0, а міра території, контрольована опонентом А, наближається до 1. Вже за значень  $k > 80$  опонент А захоплює більше 90 % території.

**Приклад 3.**  $n = 4$ ,  $q_1 = 0,1$ ,  $q_2 = 0,4$ ,  $q_3 = 0,4$ ,  $q_4 = 0,1$ ,  $\alpha_1 = 0,1$ ,  $\alpha_2 = 0,2$ ,  $\alpha_3 = 0,3$ ,  $\alpha_4 = 0,4$ ,  $\beta_1 = 0,4$ ,  $\beta_2 = 0,3$ ,  $\beta_3 = 0,2$ ,  $\beta_4 = 0,1$ . У цьому випадку  $\tilde{\theta} = 0$ .

На рис. 3 зигзагоподібна лінія показує поведінку  $T_k^A$ , що прямує до  $\frac{1}{2}$  ( $T_k^B$  також пря-

мує до  $\frac{1}{2}$ , на графіку не показано).  $T_k^{A=B}$  прямує до нульового значення.

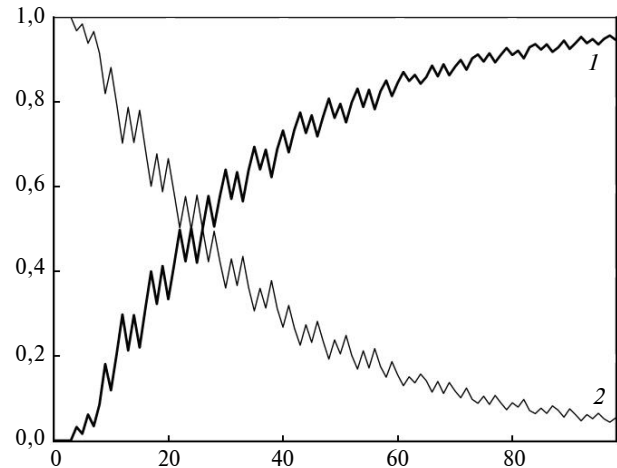


Рис. 2. Приклад 2. Міри Лебега захоплених територій  $T_k^A$  (1) і  $T_k^B$  (2) залежно від кроку подрібнення  $k$

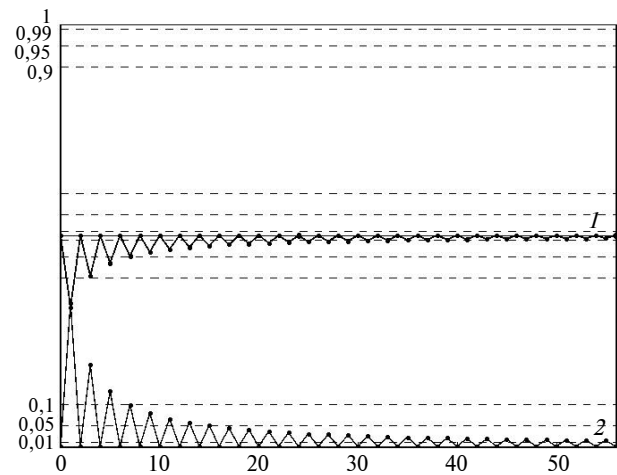


Рис. 3. Приклад 3. Графіки поведінки  $T_k^A$  (1),  $T_k^{A=B}$  (2) залежно від  $k$

### Роль стратегій у задачі про перерозподіл ресурсного простору. Про оптимальну стратегію

Таким чином, граничні значення мір Лебега захоплених територій не залежать від значення міри присутності опонентів А та В на  $\Omega$ ,  $\mu(\Omega) = a$  і  $\nu(\Omega) = b$ . Вони залежать тільки від вибраних стратегій опонентів: наборів  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  і  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ , та способу ділення  $\Omega$  на ре-

гіони, тобто набору  $q_1, q_2, \dots, q_n$ . Зауважимо, що оптимальною стратегією опонента А є така, що  $\alpha_i = q_i$  для всіх  $i = \overline{1, n}$ , тоді при довільній стратегії опонента В (яка не збігається зі стратегією опонента А), опонент А захоплює майже всю територію. Доведення цього факту наведено в [7].

### Висновки

Досліджено модель про конфліктний перерозподіл ресурсного простору (території) між парою опонентів у випадку нескінченного фрактального подрібнення простору. Простором є відрізок  $\Omega = [0, 1]$  із трьома мірами: одна з них  $\lambda$  – міра Лебега, дві інші міри  $\mu$  та  $\nu$  – міри, які задають ступінь присутності відповідно кожного з опонентів на просторі  $\Omega$  та значення яких порівнюються. На кожному кроці подрібнення розглянуто міри Лебега територій, що відповідають опонентам, а саме таких, де кожен із них має перевагу. Показано, що існують граничні значення мір таких територій при нескінченному збільшенні кроку подрібнення, та встановлено їх можливі значення: 1, 0 або  $\frac{1}{2}$ . Показано, що можливість набути те

чи інше значення пов'язана тільки з вибором певної стратегії. Вказано, яка стратегія може бути оптимальною для того, щоб у результаті отримати під контроль майже всю територію ресурсного простору.

Зауважимо, що замість розглянутої міри Лебега  $\lambda$  на просторі  $\Omega = [0, 1]$  можна використати скінченну міру  $\lambda$  на просторі  $\Omega$  іншої природи, для якої при нескінченному фрактальному подрібненні простору виконується співвідношення самоподібності. Вважаємо, що основні результати роботи можна буде переформулювати, не втрачаючи загального змісту. У такому випадку модель може бути придатною до застосування. Наприклад, у задачах передбачення результатів виборів міра  $\lambda$  буде відповідати розподілу виборців, а точність прогнозів залежатиме від кроку подрібнення території на регіони. Але в цьому напрямі потрібно провести додаткові дослідження, хоча зрозуміло, що основні результати роботи містять потрібні узагальнення та деталізацію.

\*\*\*

Автор висловлює щире подяку рецензенту за цінні зауваження та поради.

### Список літератури

1. *Працьовитий М.В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. – К.: Вид-во НПУ імені М.П. Драгоманова, 1998. – 296 с.
2. *Koshmanenko V.* Existence theorems of the  $\omega$ -limit states for conflict dynamical systems // *Methods Funct. Anal. Topology.* – 2014. – **20**, № 4. – Р. 379–390.
3. *Кошманенко В.Д.* Спектральна теорія динамічних систем конфлікту. – К.: Наук. думка, 2016. – 287 с.
4. *Koshmanenko V., Verygina I.* Dynamical systems of conflict in terms of structural measures // *Meth. Funct. Anal. Topology.* – 2016. – **22**, № 1. – Р. 81–93.
5. *Веригіна І.В.* Порівняння стратегій пари опонентів у задачі “захоплення” території // *Доповіді НАН України.* – 2016. – № 5. – С. 7–12.
6. *Веригіна І.В., Бузинний О.М.* Конфліктний перерозподіл ресурсного простору: оцінка швидкості збіжності мір захоплених територій // *Мат. та комп. моделювання. Сер. Фіз.-мат. науки.* – 2016. – Вип. 13. – С. 28–44.
7. *Веригіна І.В., Кошманенко В.Д.* Задача про оптимальну стратегію в моделях конфліктного перерозподілу ресурсного простору // *Укр. мат. журнал.* – 2017. – **69**, № 7. – С. 905–911.
8. *Боровков А.А.* Теория вероятностей. – М.: Эдиториал УРСС, 1999. – 472 с.
9. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1. – М.: Мир, 1984. – 527 с.
10. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. – М.: Мир, 1984. – 752 с.

### References

- [1] M. Prashovyty, *Fractal Approach in Research of Singular Distributions*. Kyiv, Ukraine: National Pedagogical Dragomanov University Publ., 1998 (in Ukrainian).
- [2] V. Koshmanenko, “Existence theorems of the  $\omega$ -limit states for conflict dynamical systems”, *Methods Funct. Anal. Topology*, vol. 20, no. 4, pp. 379–390, 2014.
- [3] V.D. Koshmanenko, *Spectral Theory for Conflict Dynamical Systems*. Kyiv, Ukraine: Naukova Dumka, 2016 (in Ukrainian).

- [4] V. Koshmanenko and I. Verygina, “Dynamical systems of conflict in terms of structural measures”, *Meth. Funct. Anal. Topology*, vol. 22, no. 1, pp. 81–93, 2016.
- [5] I. Verygina, “Comparison of two opponent strategies in the problem of “conquest” of territory”, *Dopovidi NANU*, no. 5, pp. 7–12, 2016 (in Ukrainian).
- [6] I. Verygina and O. Buzynny, “Conflicting redistribution of the resource space: estimation of speed of approaching of measures of the occupied territories”, *Matematychna ta Komp'yuterna Modelyuvannya. Ser. Fiz.-Mat. Nauky*, vol. 13, pp. 28–44, 2016 (in Ukrainian).
- [7] I. Verygina and V. Koshmanenko, “Task about optimal strategy in models of conflict redistribution of resource space”, *Ukr. Math. J.*, vol. 69, no. 7, pp. 905–911, 2017 (in Ukrainian).
- [8] A.A. Borovkov, *Probability Theory*. Moscow, Russia: Editorial URSS, 1999 (in Russian).
- [9] V. Feller, *Introduction to Probability Theory and its Applications*, vol. 1. Moscow, Russia: Mir, 1984 (in Russian).
- [10] V. Feller, *Introduction to Probability Theory and its Applications*, vol. 2. Moscow, Russia: Mir, 1984 (in Russian).

І.В. Веригіна

#### ЕФЕКТИВНІСТЬ СТРАТЕГІЙ У МОДЕЛЯХ КОНФЛІКТНОГО ПЕРЕРОЗПОДІЛУ РЕСУРСНОГО ПРОСТОРУ

**Проблематика.** Досліджується модель конфліктного перерозподілу ресурсного простору (території) між парою опонентів у випадку нескінченного фрактального подрібнення простору.

**Мета дослідження.** Розглянуто задачу про конфліктний перерозподіл ресурсного простору, якщо міри присутності опонентів на просторі є обмеженими, але не обов'язково ймовірнісними.

**Методика реалізації.** Для задання мір захоплених територій і знаходження їх граничних значень застосовується ймовірнісний підхід.

**Результати дослідження.** Встановлено існування граничних значень мір захоплених територій при нескінченному збільшенні кроку подрібнення та встановлено їх можливі значення. За допомогою комп'ютерного моделювання одержано графіки, що демонструють поведінку мір захоплених територій зі збільшенням кроку подрібнення.

**Висновки.** Граничні значення мір захоплених територій залежать тільки від вибраних стратегій (тобто способу структурованого подання мір, що відповідають кожному з опонентів).

**Ключові слова:** динамічна система конфлікту; конфліктний перерозподіл ресурсного простору; стратегії опонентів; самоподібні міри.

І.В. Веригіна

#### ЭФЕКТИВНОСТЬ СТРАТЕГИЙ В МОДЕЛЯХ КОНФЛИКТНОГО ПЕРЕРАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСНОГО ПРОСТРАНСТВА

**Проблематика.** Исследуется модель конфликтного перераспределения ресурсного пространства (территории) между парой оппонентов в случае бесконечного фрактального деления пространства.

**Цель исследования.** Рассмотрена задача о конфликтном перераспределении ресурсного пространства, если меры присутствия оппонентов на пространстве являются ограниченными, но не обязательно вероятностными.

**Методика реализации.** Для задания мер захваченных территорий и нахождения их предельных значений применяется вероятностный подход.

**Результаты исследования.** Установлено существование предельных значений мер захваченных территорий при бесконечном увеличении шага деления, и указаны их возможные значения. С помощью компьютерного моделирования получены графики, которые показывают поведение мер захваченных территорий при увеличении шага деления.

**Выводы.** Предельные значения мер захваченных территорий зависят только от выбранных стратегий (то есть способа структурированного представления мер, которые соответствуют каждому из оппонентов).

**Ключевые слова:** динамическая система конфликта; конфликтное перераспределение ресурсного пространства; стратегии опонентов; самоподобные меры.

Рекомендована Радою  
фізико-математичного факультету  
КПІ ім. Ігоря Сікорського

Надійшла до редакції  
09 березня 2017 року