УДК 512.21
DOI: 10.20535/1810-0546.2017.4.106224

О.В. Іванов, Н.М. Карпова*
КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

ПОВЕРХНЯ МАКСИМУМІВ СПЕКТРАЛЬНИХ ЩІЛЬНОСТЕЙ AR(2)-ПРОЦЕСІВ ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ В СТАТИСТИЦІ ЧАСОВИХ РЯДІВ

Background. In the problem on probabilities of large deviations of discrete time and sub-Gaussian AR(2) noise nonlinear regression model parameter least squares estimate a constant is determined that controls the rate of exponential convergence to zero of indicated probabilities.
Objective. The aim of the paper is to find the surface of maximums of AR(2) process spectral densities in the domain of its stationarity in explicit form.
Methods. The results were obtained on the use of methodology developed in the works by A. Sieders, K. Dzhaparidze (1987), A.V. Ivanov (1997, 2016) and standard Calculus methods.
Results. A complex formula that describes a continuous surface of maximums of AR(2) process spectral densities assigned on the stationary triangle of the time series of this type is obtained.
Conclusions. The obtained formula of surface of maximums of noise spectral densities gives an opportunity to realize for which values of AR(2) process characteristic polynomial coefficients it is possible to look for greater rate of convergence to zero of the probabilities of large deviations of the considered estimates.

Keywords: nonlinear regression model; least squares estimate; sub-Gaussian white noise; AR(2) process; probabilities of large deviations; surface of maximums of spectral densities.

Вступ

Імовірності великих відхилень нормованої оцінки найменших квадратів (о.н.к.) невідомого параметра нелінійної регресії давно вивчаються в статистичній літературі. В роботі [1] було доведено твердження про ймовірності великих відхилень о.н.к. скалярного параметра нелінійної регресії зі степеневою швидкістю спадання у випадку незалежних однаково розподілених (н.о.р.) помилок спостережень із моментами скінченного порядку. Аналогічний результат з експоненціальною швидкістю спадання було отримано в [2] для гауссівської моделі регресії. В роботі [3] було доведено загальну теорему про ймовірності великих відхилень для M-оцінок, що узагальнює результат монографії [4], із застосуванням до о.н.к. параметрів нелінійної регресії з пред- та субгауссівськими н.о.р. помилками спостережень. Деякі результати в цьому напрямі отримано також у [5]. Крім цього, результати про ймовірності великих відхилень о.н.к. у нелінійній регресії з корельованими спостереженнями можна знайти в [6–9].

У роботі [10] отримано аналогічні результати у випадку, коли випадковий шум є субгауссівським стаціонарним часовим рядом з обмеженою спектральною щільністю (с.щ.). Максимальне значення с.щ. входить у знаменник константи показника експоненти, що описує швидкість збіжності ймовірностей великих відхилень до нуля. Таким чином, ця швидкість тим більша, чим менший максимум с.щ.

Коли с.щ. стаціонарного часового ряду залежить від скінченної сукупності параметрів — як, наприклад, у ARMA(p, k)-процесів [11], — то для відповіді на запитання, для яких значень цих параметрів швидкість збіжності більша, треба описати поверхню максимальних значень с.щ., коли параметри, від яких вона залежить, пробігають область стаціонарності певного часового ряду. В загальному випадку ARMA(p, q)-процесів, і навіть простіших AR(p)- та MA(k)-процесів, цю поверхню максимумів не можна отримати в явному вигляді — лише наближено. Цікавими у застосуваннях виключеннями є, наприклад, AR(2)-процеси, для яких цю поверхню можна описати в явному вигляді.

Постановка задачі

У цій роботі вивчається поверхня максимумів с.щ. AR(2)-процесів у області їх стаціонарності. Метою дослідження є отримання в явному вигляді формульного виразу для цієї поверхні.

Вихідні положення

Припустимо, що ми спостерігаємо випадкову послідовність

* corresponding author: pansies89@gmail.com

$$X_t = a_t(\theta) + \varepsilon_t, \ t \ge 1, \tag{1}$$

де $a_t(\theta)$, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_q) \in \Theta^c \subset \mathbb{R}^q$, $t \ge 1$, — неперервні функції, істинне значення параметра θ належить обмеженій відкритій опуклій множині Θ, $\varepsilon = \{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ — часовий ряд, означений на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, $\mathrm{E}\varepsilon_t = 0$. Будемо писати $\sum = \sum\limits_{t=1}^{T}$.

***Означення* 1.** Будь-який випадковий вектор $\widehat{\theta}_T = (\widehat{\theta}_{1T}, \dots, \widehat{\theta}_{qT}) \in \Theta^c$, для якого

$$Q_T(\widehat{\theta}_T) = \min_{\tau \in \Theta^c} Q_T(\tau), \quad Q_T(\tau) = \sum (X_t - a_t(\tau))^2,$$

називається о.н.к. невідомого параметра θ, отриманою за спостереженнями $\{X_t, t = \overline{1, T}\}$.

***Означення* 2.** Випадкова величина (в.в) η називається строго субгауссівською [12], якщо для будь-якого $\Delta \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{E}\exp\{\Delta\eta\} \le \exp\left\{\frac{1}{2}\sigma_\eta^2 \Delta^2\right\}, \ \sigma_\eta^2 = \mathrm{E}\eta^2.$$

Очевидно, гауссівська в.в. є строго субгауссівською. Приклади строго субгауссівських в.в., які не є гауссівськими, наведено в [12].

***Означення* 3.** Послідовність $\{\xi_j, j \in \mathbb{Z}\}$ н.о.р. строго субгауссівських в.в. називається (дискретним) білим субгауссівським шумом.

Введемо таке припущення.

N.1. Помилки спостережень у моделі регресії (1) мають вигляд

$$\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \xi_{t-j}, \ t \in \mathbb{Z}, \tag{2}$$

де $\{\xi_j, j \in \mathbb{Z}\}$ — білий субгауссівський шум ($\mathrm{E}\xi_j = 0, \mathrm{E}\xi_j^2 = \sigma_\xi^2$), причому

$$\sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 < \infty.$$

Умова **N.1** означає, що $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ є реакцією лінійної однорідної та фізично здійсненної системи на послідовність випадкових імпульсів $\{\xi_j, j \in \mathbb{Z}\}$ (фізично здійсненний фільтр). Крім того, часовий ряд (2) є стаціонарним та має с.щ.

$$f(\lambda) = \frac{\sigma_\xi^2}{2\pi} \left| \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j e^{-ij\lambda} \right|^2, \ \lambda \in [-\pi, \pi]. \tag{3}$$

N.2. Часовий ряд (2) має обмежену с.щ.:

$$f_0 = \sup_{\lambda \in [-\pi, \pi]} f(\lambda) < \infty.$$

В асимптотичній теорії нелінійної регресії в задачі нормальної апроксимації розподілу о.н.к. невідомого параметра θ ми нормуємо різницю $\widehat{\theta}_T - \theta$ діагональною матрицею [5, 6]

$$d_T(\theta) = \mathrm{diag}(d_{iT}(\theta), i = \overline{1, q}),$$

$$d_{iT}^2(\theta) = \sum \left(\frac{\partial}{\partial \theta_i} a_t(\theta) \right)^2.$$

Надалі ми вважаємо, що функції $a_t(\tau)$, $t \ge 1$, неперервно диференційовані за $\tau \in \Theta$.

Позначимо

$$\Delta_t(u) = a_t(\theta + d_T^{-1}(\theta)u) - a_t(\theta), \quad t = \overline{1, T},$$

$$\Phi_T(u, \upsilon) = \sum (\Delta_t(u) - \Delta_t(\upsilon))^2,$$

$$u, \upsilon \in U_T(\theta) = d_T(\theta)(\Theta^c - \theta).$$

A. Існують числа $0 < c_0(\theta) < c_1(\theta) < \infty$ такі, що для будь яких $u, \upsilon \in U_T(\theta)$ і всіх достатньо великих T $(T > T_0)$

$$c_0(\theta)\|u - \upsilon\|^2 \le \Phi_T(u, \upsilon) \le c_1(\theta)\|u - \upsilon\|^2. \tag{4}$$

Умову типу (4) було введено в [1] та використано в [2, 3, 8] та інших роботах. У [3, 10] наведено приклади функцій регресії $a_t(\tau), (t, \tau) \in \mathbb{N} \times \Theta^c$, для яких виконано (4).

У [10], серед інших, було отримано результат, який ми сформулюємо у вигляді теореми.

Теорема 1. Якщо виконано умови **A, N.1, N.2**, то існують константи $B_0, b_0 > 0$, такі, що для $T > T_0$, $R > R_0$

$$P\{\|d_T(\theta)(\widehat{\theta}_T - \theta)\| \ge R\} \le B_0 \exp\{-b_0 R^2\}, \tag{5}$$

причому для будь-якого $\beta > 0$ константу B_0 можна вибрати так, що

$$b_0 \ge \frac{c_0(\theta)}{16\pi f_0 (1 + q)} - \beta. \tag{6}$$

ARMA(p, k)-процеси є важливими прикладами часових рядів (2). Ці процеси визначено системою рекурентних співвідношень (див., наприклад, [11])

$$a(z) = 1 - a_1 z - \ldots - a_p z^p,$$
$$b(z) = 1 + b_1 z + \ldots + b_k z^k, \tag{7}$$

де $\{\xi_t,\ t \in \mathbb{Z}\}$ — білий субгауссівський шум. Якщо S — це оператор оберненого $a(z) = 1 - a_1 z - \ldots - a_p z^p$, $b(z) = 1 + b_1 z + \ldots + b_k z^k$ зсуву, то співвідношення (7) можна переписати у вигляді $a(S)\varepsilon_t = b(S)\xi_t$, де

$$a(z) = 1 - a_1 z - \ldots - a_p z^p,$$
$$b(z) = 1 + b_1 z + \ldots + b_k z^k.$$

Якщо поліноми $a(z)$, $b(z)$ не мають спільних коренів і $a(z) \neq 0$ при $|z| \leq 1$, тоді $\{\varepsilon_t,\ t \in \mathbb{Z}\}$ є стаціонарним ARMA(p, k)-процесом. Аналогічно (2) можна записати

$$\varepsilon_t = \Psi(S)\xi_t,\ \Psi(z) = \frac{b(z)}{a(z)} = \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j z^j,$$

і за формулою (3) с.щ. ARMA(p, q)-процесу має вигляд

$$f(\lambda) = \frac{\sigma_\xi^2}{2\pi} \frac{|b(e^{-i\lambda})|^2}{|a(e^{-i\lambda})|^2},\ \ \lambda \in [-\pi, \pi]. \tag{8}$$

Оскільки поліном $a(z)$ не має коренів на одиничному колі, то $f(\lambda)$, $\lambda \in [-\pi, \pi]$, є неперервною функцією. Позначимо

$$f_{\max} = \max_{-\pi \leq \lambda \leq \pi} \frac{|b(e^{-i\lambda})|^2}{|a(e^{-i\lambda})|^2}. \tag{9}$$

N.3. Помилки спостережень у моделі регресії (1) утворюють ARMA(p, k)-процес (7) із білим субгауссівським шумом $\{\xi_t,\ t \in \mathbb{Z}\}$.

Тоді з теореми 1 отримуємо такий наслідок.

***Наслідок* 1.** За умов **A, N.3** висновок теореми 1 є правильним із нерівністю (6), переписаною у вигляді

$$b_0 \geq \frac{c_0(\theta)}{8\sigma_\xi^2 f_{\max}(1+q)} - \beta, \tag{10}$$

де $f_{\max}$ задано (9).

Якщо в (7) $b(z) \equiv 1$, то ми отримуємо означення AR(p)-процесу

$$\varepsilon_t = a_1\varepsilon_{t-1} + \ldots + a_p\varepsilon_{t-p} + \xi_t,\ t \in \mathbb{Z}, \tag{11}$$

зі с.щ.

$$f(\lambda) = \frac{\sigma_\xi^2}{2\pi} |a(e^{-i\lambda})|^{-2}, \tag{12}$$

причому, як випливає з (9),

$$f_{\max} = \max_{-\pi \leq \lambda \leq \pi} \frac{1}{|a(e^{-i\lambda})|^2} = \frac{1}{\min\limits_{-\pi \leq \lambda \leq \pi} |a(e^{-i\lambda})|^2}. \tag{13}$$

N.3. Помилки спостережень у моделі регресії (1) утворюють AR(p)-процес (11) із білим субгауссівським шумом $\{\xi_t,\ t \in \mathbb{Z}\}$.

Тоді з теореми 1, (10) і (13) отримуємо такий наслідок.

***Наслідок* 2.** За умов **A, N.4** справедлива теорема 1, причому

$$b_0 \geq \frac{c_0(\theta) \min\limits_{-\pi \leq \lambda \leq \pi} |a(e^{-i\lambda})|^2}{8\sigma_\xi^2(1+q)} - \beta. \tag{14}$$

Так виникає задача знаходження поверхні максимумів с.щ. AR(p)-процесів, яка, завдяки (13) і (14), зводиться до знаходження поверхні

$$A(a_1, \ldots, a_p) = \min_{-\pi \leq \lambda \leq \pi} |a(e^{-i\lambda})|^2 \tag{15}$$

в області стаціонарності AR(p)-процесів.

Основний результат

Задачу, сформульовану наприкінці попереднього розділу роботи, як ми писали у вступі, можна розв'язати в явному вигляді для AR(2)-процесів. Розглянемо AR(2)-процес

$$\varepsilon_t = a_1\varepsilon_{t-1} + a_2\varepsilon_{t-2} + \xi_t,\ t \in \mathbb{Z}, \tag{16}$$

де $\{\xi_t,\ t \in \mathbb{Z}\}$ — білий субгауссівський шум. Як добре відомо [11], область стаціонарності AR(2)-процесу (16) задано нерівностями, які утворюють трикутник

$$S_0 = \{(a_1, a_2)\colon a_1 + a_2 \langle 1,\ a_1 - a_2 \rangle -1,\ a_2 > -1\}. \tag{17}$$

Очевидно,

$$A(\lambda; a_1, a_2) = |a(e^{-i\lambda})|^2 =$$
$$= 1 + a_1^2 + a_2^2 + 2a_1(a_2 - 1)\cos\lambda - 2a_2\cos 2\lambda.$$

Оскільки $A(\lambda) = A(\lambda; a_1, a_2)$ — парна за λ функція, то достатньо знайти $A(a_1, a_2) = \min\limits_{0 \leq \lambda \leq \pi} A(\lambda)$ за обмежень S_0 на параметри a_1, a_2. Маємо

$$A'(\lambda) = -2a_1(a_2 - 1)\sin\lambda + 4a_2\sin 2\lambda, \tag{18}$$

і тому критичні точки функції $A(\lambda)$ дорівнюють 0, π або є розв'язком рівняння

$$\cos\lambda = -\frac{a_1(a_2-1)}{4a_2}$$

за умови

$$-1 \le \frac{a_1(a_2-1)}{4a_2} \le 1. \tag{19}$$

Розглядаючи праву частину нерівності (19), отримуємо, що у випадку $a_2 > 0$ це множина

$$S_1 = \left\{(a_1, a_2) \in S_0\colon a_2 \ge \frac{a_1}{a_1-4},\ a_2 > 0\right\}.$$

Якщо $a_2 < 0$, то маємо підобласть

$$S_2 = \left\{(a_1, a_2) \in S_0\colon a_2 \le \frac{a_1}{a_2-4},\ a_2 < 0\right\}.$$

Переходячи до лівої частини (19), також отримуємо дві підобласті S_0, а саме

$$S_3 = \left\{(a_1, a_2) \in S_0\colon a_2 \ge \frac{a_1}{a_1+4},\ a_2 > 0\right\}$$

і

$$S_4 = \left\{(a_1, a_2) \in S_0\colon a_2 \le \frac{a_1}{a_1+4}, a_2 < 0\right\}.$$

Позначимо $S_5 = (S_1 \cap S_3) \cup (S_2 \cap S_4) \subset S_0$ – область, у якій виконується нерівність (19), причому частина гіпербол

$$\text{(i)}\quad a_2 = \frac{a_1}{a_1+4} \qquad \text{(ii)}\quad a_2 = \frac{a_1}{a_1-4}, \tag{20}$$

які потрапили у трикутник стаціонарності S_0, входять у цю область. Якщо $(a_1, a_2) \in S_5$, то отримуємо критичну точку

$$\lambda^* = \arccos\frac{a_1(a_2-1)}{4a_2} \in [0, \pi]. \tag{21}$$

Знайдемо геометричні місця точок $(a_1, a_2) \in$ $\in S_0$, у яких за критичних значень 1) $\lambda = 0, \pi$; 2) $\lambda = \arccos\frac{a_1(a_2-1)}{4a_2}$ функція $A(\lambda)$ набуває мінімального значення. Маємо

$$A''(\lambda) = -2a_1(a_1-1)\cos\lambda + 8a_2\cos 2\lambda. \tag{22}$$

Розв'язком нерівності

$$A''(\pi) = 2a_1(a_1-1) + 8a_2 > 0$$

є підмножина S_0 вигляду

$$S_6 = \left\{(a_1, a_2) \in S_0\colon a_2 > \frac{a_1}{a_1+4}\right\}.$$

Зауважимо, що частина гіперболи $a_2 = \frac{a_1}{a_1+4}$, що входить у S_0, не належить S_6. З іншого боку,

$$A(\pi) = (1 + a_1 - a_2)^2. \tag{23}$$

Своєю чергою розв'язком нерівності

$$A''(0) = 2a_1(1-a_1) + 8a_2 > 0$$

є множина $S_7 = \left\{(a_1, a_2) \in S_0\colon a_2 > \frac{a_1}{a_1-4}\right\}$, причому частина гіперболи $a_2 = \frac{a_1}{a_1+4}$, що входить у S_0, не належить S_7. Маємо також

$$A(0) = (1 - a_1 - a_2)^2. \tag{24}$$

Порівняємо мінімуми в точках π та 0 за формулами (23) і (24). Із (17) випливає, що $0 < 1 + a_1 - a_2 \le 1 - a_1 - a_2$, якщо $a_1 \le 0$. Це означає, що область, у якій мінімум досягається в точці π при $a_1 \le 0$, має вигляд

$$S_6' = \left\{(a_1, a_2) \in S_0\colon a_2 > \frac{a_1}{a_1+4}, a_1 \le 0\right\}. \tag{25}$$

З іншого боку, якщо $a_1 \ge 0$, то $1 + a_1 - a_2 \ge 1 -$ $- a_1 - a_2 > 0$. Це означає, що область, у якій мінімум досягається в точці 0 при $a_1 \ge 0$, має вигляд

$$S_7' = \left\{(a_1, a_2) \in S_0\colon a_2 > \frac{a_1}{a_1-4}, a_1 \ge 0\right\}. \tag{26}$$

Очевидно, при $a_1 = 0$ мінімуми в точках 0 і π збігаються.

Відкритим залишається питання щодо мінімумів $A(\lambda)$ у точках π і 0 на гіперболах (20). Розглянемо спочатку гіперболу (i), на якій

$$A''(\lambda) = \frac{8a_1}{a_1+4}(\cos\lambda + \cos 2\lambda), \quad A''(\pi) = 0;$$

$$A'''(\lambda) = -\frac{8a_1}{a_1+4}(\sin\lambda + 2\sin 2\lambda), \quad A'''(\pi) = 0;$$

$$A^{(4)}(\lambda) = -\frac{8a_1}{a_1+4}(\cos\lambda + 4\cos 2\lambda),$$

$$A^{(4)}(\pi) = -\frac{24a_1}{a_1+4} > 0$$

при $a_1 < 0$.

Таким чином, на гіперболі (i) при $a_1 < 0$ і точці π функція $A(\lambda)$ досягає свого мінімуму, який дорівнює

$$A(\pi) = (1 + a_1 - a_2)^2 =$$

$$= \left(1 + a_1 - \frac{a_1}{a_1+4}\right)^2 = \frac{(a_1+2)^4}{(a_1+4)^2}. \qquad (27)$$

Аналогічно на гіперболі (ii)

$$A''(\lambda) = \frac{8a_1}{4-a_1}(\cos\lambda - \cos 2\lambda), \quad A''(0) = 0;$$

$$A'''(\lambda) = \frac{8a_1}{4-a_1}(-\sin\lambda + 2\sin 2\lambda), \quad A'''(0) = 0;$$

$$A^{(4)}(\lambda) = \frac{8a_1}{4-a_1}(-\cos\lambda + 4\cos 2\lambda),$$

$$A^{(4)}(\pi) = \frac{24a_1}{4-a_1} > 0$$

при $a_1 > 0$.

Таким чином, на гіперболі (ii) при $a_1 > 0$ у точці 0 функція $A(\lambda)$ досягає свого мінімуму, який дорівнює

$$A(0) = (1 - a_1 - a_2)^2 =$$

$$= \left(1 - a_1 - \frac{a_1}{a_1-4}\right)^2 = \frac{(a_1-2)^4}{(a_1-4)^2}. \qquad (28)$$

Отже, на множині

$$S_6'' = \left\{(a_1, a_2) \in S_0 \colon a_2 > \frac{a_1}{a_1+4}, \; a_1 < 0\right\}$$

функція $A(\lambda)$ досягає мінімуму (27) в точці π, а на множині

$$S_7'' = \left\{(a_1, a_2) \in S_0 \colon a_2 \geq \frac{a_1}{a_1-4}, \; a_1 > 0\right\}$$

досягає мінімуму (28) у точці 0.

Мінімум функції $A(\lambda)$ у критичній точці (21) досягається в області S_5 там, де

$$A''(\lambda^*) = \frac{a_1^2(a_2-1)^2 - 16a_2^2}{2a_2} > 0. \qquad (29)$$

Розглянемо спочатку випадок $a_2 < 0$. Тоді (27) виконано, якщо

$$(a_1(a_2-1) - 4a_2)(a_1(a_2-1) + 4a_2) < 0. \qquad (30)$$

Дужки в (28) мають знаки (+, –) у множині $S_2' \cap S_4'$, де

$$S_2' = \left\{(a_1, a_2) \in S_0 \colon a_2 < \frac{a_1}{a_1-4}, \; a_2 < 0\right\},$$

$$S_4' = \left\{(a_1, a_2) \in S_0 \colon a_2 < \frac{a_1}{a_1+4}, \; a_2 < 0\right\}.$$

Неважко впевнитися в тому, що при $a_2 < 0$ пара знаків (–, +) у добутку (30) дає порожню множину параметрів.

Розглянемо випадок $a_2 > 0$. Тоді для справедливості (29) потрібно, щоб виконувалось

$$(a_1(a_2-1) - 4a_2)(a_1(a_2-1) + 4a_2) > 0. \qquad (31)$$

Перевіряючи знаки дужок (+, +) та (–, –) у (31), ми отримуємо в обох випадках порожні множини параметрів.

Запишемо в області $S_2' \cap S_4'$ значення мінімуму

$$A(\lambda^*) = 1 + a_1^2 + a_2^2 + 2a_1(a_2-1)\frac{a_1(a_2-1)}{4a_2} -$$

$$- 2a_2\left(2\frac{a_1^2(a_2-1)^2}{16a_2^2} - 1\right) = (1+a_2)^2\left(1 + \frac{a_1^2}{4a_2}\right). \qquad (32)$$

Тоді при $a_1 > 0$ і $a_2 = \dfrac{a_1}{a_1-4}$

$$A(\lambda^*) = \frac{(a_1-2)^4}{(a_1-4)^2}, \qquad (33)$$

що збігається зі значенням (28). Аналогічно при $a_1 < 0$ і $a_2 = \dfrac{a_1}{a_1+4}$

$$A(\lambda^*) = \frac{(a_1+2)^4}{(a_1+4)^2}, \qquad (34)$$

що збігається зі значенням (27).

Позначимо

$$S^{(1)} = S_7'' = \left\{(a_1, a_2) \in S_0 \colon a_2 \geq \frac{a_1}{a_1-4}, \; a_1 > 0\right\},$$

$$S^{(2)} = S_6'' = \left\{(a_1, a_2) \in S_0 \colon a_2 \geq \frac{a_1}{a_1+4}, \; a_1 < 0\right\},$$

$$S^{(3)} = S_2' \cap S_4' =$$
$$= \left\{ (a_1, a_2) \in S_0 \colon a_2 < \frac{a_1}{a_1 - 4},\ a_2 < \frac{a_1}{a_1 + 4} a_2 < 0 \right\}.$$

Множини $S^{(1)}, S^{(2)}$ і $S^{(3)}$ можна побачити на рис. 1, і вони фігурують у формулюванні наведеної нижче теореми, яка описує поверхню мінімумів $A(a_1, a_2),\ (a_1, a_2) \in S_0$.

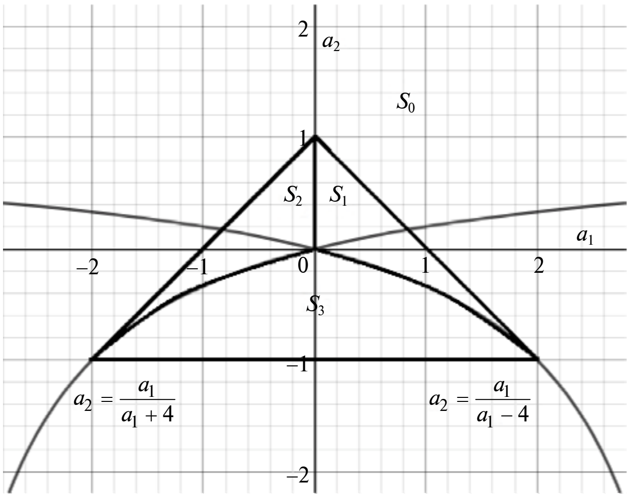

Рис. 1. $S_0 = S^{(1)} \cup S^{(2)} \cup S^{(3)} \cup (\{0\} \times [0,1))$

Теорема 2. Мінімум функції
$$A(\lambda) = A(\lambda; a_1, a_2) = |a(e^{-i\lambda})|^2,\ \lambda \in [0, \pi],$$
в області стаціонарності AR(2)-процесів $\lambda \in [0, \pi]$ досягається

1) у множині $S^{(1)}$ в точці $\lambda = 0$ і дорівнює (24);

2) у множині $S^{(2)}$ в точці $\lambda = \pi$ і дорівнює (23).

На межі $\{0\} \times [0, 1)$ цих множин $A(0) = A(\pi) = (1 - a_2)^2$;

3) у множині $S^{(3)}$ в точці $\lambda^* = \arccos \frac{a_1(a_2 - 1)}{2a_2}$ і дорівнює (32).

На межі множин $S^{(1)}$ і $S^{(3)}$, тобто на гіперболі
$$a_2 = \frac{a_1}{a_1 - 4},\ a_1 > 0,\ A(0) = A(\lambda^*) = \frac{(a_1 - 2)^4}{(a_1 - 4)^2}.$$

Відповідно, на межі множин $S^{(2)}$ і $S^{(3)}$, тобто на гіперболі
$$a_2 = \frac{a_1}{a_1 + 4},\ a_1 < 0,\ A(\pi) = A(\lambda^*) = \frac{(a_1 + 2)^4}{(a_1 + 4)^2}.$$

Зауважимо, що на сторонах трикутника S_0, які не входять в область стаціонарності AR(2)-процесів, всі мінімуми, що знайдено за формулами (23), (24), (32), дорівнюють нулю.

Стає також зрозумілим, що кращі константи b_0 із формули (14) ми отримуємо тоді, коли параметри (a_1, a_2) набувають малих значень. Це видно з графіка поверхні $A(a_1, a_2),\ (a_1, a_2) \in S_0$ на рис. 2.

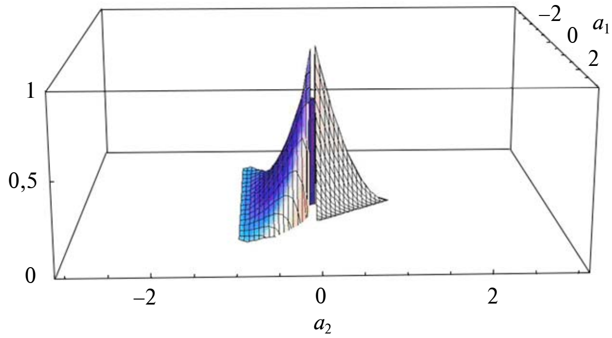

Рис. 2. Поверхня мінімумів функції $|a(e^{i\lambda})|^2$

Висновки

Оцінки типу (14) для константи, що контролює швидкість експоненціальної збіжності до нуля ймовірностей великих відхилень нормованої о.н.к. векторного параметра нелінійної регресії, було отримано в [10].

У нашій роботі цю константу детально досліджено для AR(2) випадкового шуму моделі, а саме: знайдено в явному вигляді поверхню максимумів с.щ. AR(2)-процесів у області їх стаціонарності. Цей результат дає можливість зрозуміти, для яких значень коефіцієнтів характеристичного полінома AR(2)-процесу можна сподіватись на більшу швидкість збіжності до нуля ймовірностей великих відхилень.

У подальших дослідженнях варто побудувати також поверхні максимумів важливих в аналізі часових рядів MA(q), q = 2, 3, 4, ARMA(2, 1), ARMA(1, 2), ARMA(2, 2), AR(p), p = 3, 4, процесів, щоб зрозуміти, для яких значень параметрів цих процесів швидкість збіжності до нуля ймовірностей великих відхилень о.н.к. буде найбільшою. Але в більшій частині вказаних випадків можна сподіватись тільки на наближену побудову таких поверхонь числовими методами.

Список літератури

1. *Ivanov A.V.* An asymptotic expansion for the distribution of the least squares estimator of the non-linear regression parameter // Theor. Probab. Appl. – 1977. – **21**, № 3. – P. 557–570.
2. *Prakasa Rao B.L.S.* On the exponential rate of convergence of the least squares estimator in the nonlinear regression model with Gaussian errors // Statist. Probab. Lett. – 1984. – **2**. – P. 139–142.
3. *Sieders A., Dzhaparidze K.* A large deviation result for parameter estimators and its application to nonlinear regression analysis // Ann. Statist. – 1987. – **15**, № 3. – P. 1031–1049.
4. *Ibragimov I.A., Has'minskii R.Z.* Statistical Estimation: Asymptotic Theory. – New York: Springer, 1981. – 403 p.
5. *Ivanov A.V.* Asymtotic Theory of Nonlinear Regression. – Dordrecht, Boston, London: Kluwer AP, 1997. – 327 p.
6. *Ivanov A.V., Leonenko N.N.* Statistical Analysis of Random Fields. – Dordrecht, Boston, London: Kluwer AP, 1989. – 244 p.
7. *Prakasa Rao B.L.S.* The rate of convergence for the least squares estimator in a non-linear regression model with dependent errors // J. Multivariate Analysis. – 1984. – **14**, № 3. – P. 315–322.
8. *Hu S.H.* A large deviation result for the least squares estimators in nonlinear regression // Stochastic Process and their Applications. – 1993. – **47**. – P. 345–352.
9. *Yang W.Z., Hu S.H.* Large deviation for a least squares estimator in a non-linear regression model // Stat. Probab. Lett. – 2014. – **91**. – P. 135–144.
10. *Ivanov A.V.* Large deviations of regression parameter estimate in the models with stationary sub-Gaussian noise // Theor. Probab. Math. Stat. – 2016. – **95**. – P. 92–100.
11. *Brockwell P.J., Davis R.A.* Introduction to Time Series and Forecasting. – 2nd ed. – New York: Springer, 2002. – 434 p.
12. *Buldygin V.V., Kozachenko Yu.V.* Metric characterization of random variables and random processes. – Providence: AMS, 2000. – 257 p.

References

[1] A.V. Ivanov, "An asymptotic expansion for the distribution of the least squares estimator of the non-linear regression parameter", *Theory Probab. Appl.*, vol. 21, no. 3, pp. 557–570, 1977. doi: 10.1137/1121067

[2] B.L.S. Prakasa Rao, "On the exponential rate of convergence of the least squares estimator in the nonlinear regression model with Gaussian errors", *Statist. Probab. Lett.*, vol. 2, pp. 139–142, 1984. doi: 10.1016/0167-7152(84)90004-X

[3] A. Sieders and K. Dzhaparidze, "A large deviation result for parameter estimators and its application to nonlinear regression analysis", *Ann. Statist.*, vol. 15, no. 3, pp. 1031–1049, 1987. doi: 10.1214/aos/1176350491

[4] I.A. Ibragimov and R.Z. Has'minskii, *Statistical Estimation: Asymptotic Theory.* New York: Springer, 1981.

[5] A.V. Ivanov, *Asymptotic Theory of Nonlinear Regression.* Dordrecht, Boston, London: Kluwer AP, 1997.

[6] A.V. Ivanov and N.N. Leonenko, *Statistical Analysis of Random Fields.* Dordrecht, Boston, London: Kluwer AP, 1989.

[7] B.L.S. Pracasa Rao, "The rate of convergence for the least squares estimator in a non-linear regression model with dependent errors", *J. Multivariate Analysis*, vol. 14, no. 3, pp. 315–322, 1984. doi: 10.1016/0047-259X(84)90036-8

[8] S.H. Hu, "A large deviation result for the least squares estimators in nonlinear regression", *Stochastic Process and their Applications*, vol. 47, pp. 345–352, 1993. doi: 10.1016/0304-4149(93)90022-V

[9] W.Z. Yang and S.H. Hu, "Large deviation for a least squares estimator in a non-linear regression model", *Stat. Probab. Lett.*, vol. 91, pp. 135–144, 2014. doi: 10.1016/j.spl.2014.04.022

[10] A.V. Ivanov, "Large deviations of regression parameter estimate in the models with stationary sub-Gaussian noise", *Theor. Probab. Math. Stat.*, vol. 95, pp. 92–100, 2016.

[11] P.J. Brockwell and R.A. Davis, *Introduction to Time Series and Forecasting*, 2nd ed. New York: Springer, 2002.

[12] V.V. Buldygin and Yu.V. Kozachenko, *Metric Characterization of Random Variables and Random Processes.* Providence: AMS, 2000.

О.В. Іванов, Н.М. Карпова

ПОВЕРХНЯ МАКСИМУМІВ СПЕКТРАЛЬНИХ ЩІЛЬНОСТЕЙ AR(2)-ПРОЦЕСІВ ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ В СТАТИСТИЦІ ЧАСОВИХ РЯДІВ

Проблематика. В задачі про ймовірності великих відхилень оцінки найменших квадратів параметра нелінійної моделі регресії з дискретним часом та субгауссівським AR(2)-шумом визначено константу, що контролює швидкість експоненціальної збіжності до нуля вказаних імовірностей.

Мета дослідження. Знайти в явному вигляді поверхню максимумів спектральних щільностей AR(2)-процесів у області їх стаціонарності.

Методика реалізації. Отримання результатів роботи ґрунтується на застосуванні методології, розвинутої в роботах А. Сайдерса, К. Джапарідзе (1987 р.), О.В. Іванова (1997, 2016 рр.), і стандартних методів диференціального числення.

Результати дослідження. Отримано складну формулу, що описує неперервну поверхню максимумів спектральних щільностей AR(2)-процесів, задану на трикутнику стаціонарності часових рядів цього типу.

Висновки. Одержана в роботі формула поверхні максимумів спектральної щільності шуму дає можливість зрозуміти, для яких значень коефіцієнтів характеристичного полінома AR(2)-процесу можна сподіватись на більшу швидкість збіжності до нуля ймовірностей великих відхилень оцінок, про які йдеться.

Ключові слова: нелінійна модель регресії; оцінка найменших квадратів; субгауссівський білий шум; AR(2)-процес; імовірності великих відхилень; поверхня максимумів спектральних щільностей.

А.В. Иванов, Н.Н. Карпова

ПОВЕРХНОСТЬ МАКСИМУМОВ СПЕКТРАЛЬНЫХ ПЛОТНОСТЕЙ AR(2)-ПРОЦЕССОВ И ЕЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ В СТАТИСТИКЕ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

Проблематика. В задаче о вероятностях больших отклонений оценки наименьших квадратов параметра нелинейной модели регрессии с дискретным временем и субгауссовским AR(2)-шумом определена константа, которая контролирует скорость экспоненциальной сходимости к нулю указанных вероятностей.

Цель исследования. Найти в явном виде поверхность максимумов спектральных плотностей AR(2)-процессов в области их стационарности.

Методика реализации. Получение результатов опирается на применение методологии, развитой в работах А. Сайдерса, К. Джапаридзе (1987 г.), А.В. Иванова (1997, 2016 гг.), и стандартных методов дифференциального исчисления.

Результаты исследования. Получена сложная формула, которая описывает непрерывную поверхность максимумов спектральных плотностей AR(2)-процессов, заданную на треугольнике стационарности временных рядов данного типа.

Выводы. Полученная в работе формула поверхности максимумов спектральной плотности шума дает возможность понять, для каких значений коэффициентов характеристического многочлена AR(2)-процесса можно надеяться на большую скорость сходимости к нулю вероятностей больших отклонений изучаемых оценок.

Ключевые слова: нелинейная модель регрессии; оценка наименьших квадратов; субгауссовский белый шум; AR(2)-процесс; вероятности больших отклонений; поверхность максимумов спектральных плотностей.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
КПІ ім. Ігоря Сікорського

Надійшла до редакції
05 червня 2017 року