UDC 519.816:519.812
DOI: 10.20535/1810-0546.2017.5.105535

V.V. Romanuke*
Polish Naval Academy, Gdynia, Poland

FINDING AN OPTIMAL DECISIONS' SUBSET BY MINIMAXIMAX REGRET CRITERION REGARDING INSTABILITY OF THE DECISION FUNCTION

Background. A generalization of the minimax regret criterion is represented as even the best-assurance minimax regret criterion comes inconsistent under instable evaluations of decision situations.
Objective. The goal is to formulate the minimaximax regret criterion.
Methods. Unlike the classic one, the generalized regret criterion is minimaximax which operates over generalized regrets. These regrets are found from a generalized decision function which is defined on a Cartesian product of a decisions' set, a set of states, and a set of metastates. Metastate describes instability of the decision function whose values change through a set of metastates. The instability destroys assurance of minimaxed regrets found classically, so regrets are found over a generalized decision function. For this, utility evaluations are subtracted from the utility maximized across a decision set, or the loss/risk minimized across a decision set is subtracted from loss/risk evaluations. Then regrets are minimized under uncertainty across two dimensions of states and metastates, that is they are minimaximaxed.
Results. The suggested minimaximax regret criterion allows finding an optimal decisions' subset with not only regarding instability of the decision function, but also with reducing the initial decisions' set more, unlike the ultimate pessimism criterion without regrets (minimaximax/maximinimin). This especially concerns nonnegative utility matrices with many zeros.
Conclusions. A ratio of a number of optimal decisions by the without-regret maximinimin/minimaximax to a number of optimal decisions by the minimaximax regret criterion decreased by 1 can be interpreted as a gain of applying the represented minimax regret criterion generalization. This gain fundamentally depends on whether sets of decisions, states, and metastates are finite or not. If they all are finite, then the gain depends on values in a three-dimensional regret matrix and its dimensions. It is surprising but the gain may be negative, that is finding regrets may come non-effective.

Keywords: decision function; minimax regret criterion; optimal decisions' subset; metastate; minimaximax regret criterion.

Introduction

Minimax regret criterion preferred to classic maximin/minimax is applied in a wide variety of decision making fields [1, 2]. Its preference is simply explained with that it usually softens ultimate pessimism. Minimax regret criterion is effective when prior statistics or probabilistic measures are unreliable [1, 3, 4]. The effectiveness is nonetheless reckoned on constant evaluations of decision situations (pairs of decision and state). Instability of the decision function destroys assurance of minimaxed regrets. For instance, instable evaluations of decision function's values can be a result of decision making for a long period [5], discordance of expert estimations (multiple estimations of a decision situation without consensus), bad influence of external factors on the given decision function [6, 7], etc. Besides, point evaluation is always much less reliable than interval evaluation (or, at least, multiple point evaluation), that implies multiple versions of the decision function. These aspects are equivalent to decision function's instability. Obviously enough, preference of minimax regret criterion can be used for optimally dealing with instable decision functions as well.

Regrets, or rather fines for accepting poor decisions, are found in the classical way: for every fixed state of a utility function, evaluations over all decisions are subtracted from the maximal evaluation [1, 3, 5]. In the case of a loss/risk function, the minimal loss/risk is subtracted from evaluations over all decisions [8, 9]. Subsequently, maximal regrets are minimized. Clearly, those operations may be problematic only for infinite decision functions of special types. Such functions usually have discontinuities and other irregularities. However, the main problem is potential instability of decision function which can be solved via proper formalization of instable evaluations of situations. In the article [10], risks are minimaxed regarding the risk matrix instability. This matrix is represented as a finite set of matrices implying the risk matrix change through this set. Each version of the risk matrix corresponds to a state which is called the metastate. Thus, the finite

* corresponding author: romanukevadimv@gmail.com

change of the decision matrix is substituted with the three-dimensional decision matrix. A generalization of the decision function is suggested in the article [11]. The generalized decision function is defined on a Cartesian product of a decisions' set, a set of states, and a set of metastates. Despite the rule of minimaximax applied to the generalized decision function is described in [11], there is an open question of how to find regrets over such function. Even for a three-dimensional decision matrix, it is a matter of argument what subtraction should be.

Problem statement

As even the best-assurance minimax regret criterion comes inconsistent under instable evaluations of decision situations, the goal is to formulate the minimaximax regret criterion. Such a criterion will allow finding optimal decisions' subset regarding instability of the decision function. Just as in the articles [10, 11], the instability is expressed along the third dimension which is the metastate.

For reaching the goal, the two tasks are to be accomplished:

1. To substantiate a rule for finding regrets over a generalized decision function.
2. To formalize finding an optimal decisions' subset by the criterion of applying minimaximax to the found regrets.

Each of these two items is to be firstly explained for the decision matrix. Then the more general case is going to be formalized. In the end, the suggested minimaximax regret criterion shall be discussed and a conclusion will be given.

Finding regrets over a generalized decision function

Denote a finite set of decisions by $X = \{x_i\}_{i=1}^{N}$ for $N \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, a finite set of states by $S = \{s_j\}_{j=1}^{Q}$ for $Q \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, and a finite set of metastates by $M = \{m_k\}_{k=1}^{K}$ for $K \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$. Let $\mathbf{U}_k = (u_{ijk})_{N\times Q}$ be a decision matrix at the k-th metastate, where u_{ijk} is an evaluation of meta-situation $\{x_i, s_j, m_k\}$ for the decision x_i by the state s_j at the metastate m_k. Three-dimensional matrix $\mathbf{U} = \{\mathbf{U}_k\}_{k=1}^{K}$ is the generalized decision matrix.

Now uncertainty is in two dimensions – states and metastates. So, to execute those subtractions, evaluations of decisions are to be extremized by each fixed couple $\{s_j, m_k\}$. For utility matrices $\{\mathbf{U}_k\}_{k=1}^{K}$ the regret for accepting poor decision in the metasituation $\{x_i, s_j, m_k\}$ is

$$r_{ijk} = \max_{z=\overline{1,\,N}} u_{zjk} - u_{ijk}. \tag{1}$$

If $\{\mathbf{U}_k\}_{k=1}^{K}$ are losses or risks, then

$$r_{ijk} = u_{ijk} - \min_{z=\overline{1,\,N}} u_{zjk}. \tag{2}$$

Regrets (1) or (2) constitute the generalized regret matrix $\mathbf{R} = \{\mathbf{R}_k\}_{k=1}^{K}$ by $\mathbf{R}_k = (r_{ijk})_{N\times Q}$.

If at least one of the sets X, S, M is infinite, then a generalized decision function $u(x, s, m)$ is defined on the set $X \times S \times M$, i. e. for all metasituations $\{x, s, m\}$ by $x \in X$, $s \in S$, $m \in M$. Then, for a utility function $u(x, s, m)$ the regret for accepting poor decision in the meta-situation $\{x, s, m\}$ is

$$r(x, s, m) = \max_{y\in X} u(y, s, m) - u(x, s, m). \tag{3}$$

If $u(x, s, m)$ is a loss/risk function, then

$$r(x, s, m) = u(x, s, m) - \min_{y\in X} u(y, s, m). \tag{4}$$

Rules (1), (3), and (2), (4) differ from classically finding regrets with the third dimension only. So any number of dimensions can be added and the rule remains the same: extremization over decision set X by all the rest variables are fixed, and the corresponding subtraction.

Minimaximax regret criterion

Regrets (1), (2), (3), or (4) must be minimized under uncertainty across those two dimensions. Therefore, an optimal decisions' subset

$$X^* = \arg\min_{x_i,\, i=\overline{1,\,N}} \left\{ \max_{j=\overline{1,\,Q}} \max_{k=\overline{1,\,K}} r_{ijk} \right\} \subset X \tag{5}$$

for a finite set $X \times S \times M$, or

$$X^* = \arg\min_{x\in X} \left\{ \max_{s\in S} \max_{m\in M} r(x, s, m) \right\} \subset X \tag{6}$$

for an infinite set $X \times S \times M$. Consider a simple example. Suppose that

$$\mathbf{U} = \left\{ \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 0 \\ 6 & 1 & 5 & 2 \\ 4 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 6 \\ 2 & 6 & 2 & 3 \end{bmatrix} \right\} \tag{7}$$

is a utility matrix. Here we have two metastates. Then, executing subtractions (1) gives a regret matrix

$$\mathbf{R} = \left\{ \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & 6 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \right\}. \tag{8}$$

An optimal decisions' subset by (5) is

$$X^* = \arg \min_{x_i,\, i=\overline{1,\,3}} \left\{ \max_{j=\overline{1,\,4}} \max_{k=\overline{1,\,2}} r_{ijk} \right\}$$

$$= \arg \min_{x_i,\, i=\overline{1,\,3}} \{\max\{4, 5\}, \max\{3, 6\}, \max\{5, 3\}\}$$

$$= \arg \min_{x_i,\, i=\overline{1,\,3}} \{5, 6, 5\} = \{x_1, x_3\}. \tag{9}$$

By the way, the maximinimin rule applied to matrix (7) gives

$$X^{(\mathrm{M3})} = \arg \max_{x_i,\, i=\overline{1,\,3}} \left\{ \min_{j=\overline{1,\,4}} \min_{k=\overline{1,\,2}} u_{ijk} \right\}$$

$$= \arg \max_{x_i,\, i=\overline{1,\,3}} \{\min\{0, 1\}, \min\{1, 0\}, \min\{0, 2\}\}$$

$$= \arg \max_{x_i,\, i=\overline{1,\,3}} \{0, 0, 0\} = \{x_1, x_2, x_3\} = X, \tag{10}$$

that is, it does not reduce the initial set of decisions.

Discussion

The example with utility matrix (7) and its corresponding regret matrix (8) shows simplicity of the minimaximax regret criterion, similar to the classic minimax regret. An expected advantage of minimaximax regret criterion is that it will be always reducing the initial set of decisions X more. The example with optimal decisions' subsets (9) and (10) is an illustration to the expectation. If $u_{142} = 2$ instead of $u_{142} = 1$, we would get a single optimal decision:

$$X^* = \arg \min_{x_i,\, i=\overline{1,\,3}} \left\{ \max_{j=\overline{1,\,4}} \max_{k=\overline{1,\,2}} r_{ijk} \right\}$$

$$= \arg \min_{x_i,\, i=\overline{1,\,3}} \{\max\{4, 4\}, \max\{3, 6\}, \max\{5, 3\}\}$$

$$= \arg \min_{x_i,\, i=\overline{1,\,3}} \{4, 6, 5\} = \{x_1\}$$

by the same maximinimin result in (10), i. e.

$$X^{(\mathrm{M3})} = \arg \max_{x_i,\, i=\overline{1,\,3}} \left\{ \min_{j=\overline{1,\,4}} \min_{k=\overline{1,\,2}} u_{ijk} \right\}$$

$$= \arg \max_{x_i,\, i=\overline{1,\,3}} \{\min\{0, 2\}, \min\{1, 0\}, \min\{0, 2\}\}$$

$$= \arg \max_{x_i,\, i=\overline{1,\,3}} \{0, 0, 0\} = \{x_1, x_2, x_3\} = X.$$

This is because there are zeros in matrix (7) corresponding to every single decision. Such cases of zeros-in-decisions are hopeless for classic maximin. In another example, more grotesque one, the utility matrix

$$\mathbf{U} = \left(\begin{bmatrix} 0 & 5 & 5 & 27 & 8 & 0 & 16 \\ 12 & 28 & 5 & 24 & 7 & 24 & 26 \\ 5 & 7 & 21 & 22 & 13 & 29 & 26 \\ 21 & 27 & 10 & 24 & 6 & 0 & 18 \\ 11 & 6 & 19 & 11 & 24 & 28 & 6 \\ 25 & 11 & 11 & 18 & 29 & 0 & 6 \\ 17 & 19 & 7 & 15 & 16 & 23 & 5 \\ 22 & 0 & 18 & 17 & 0 & 20 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 29 & 12 & 21 & 6 & 27 & 20 \\ 18 & 23 & 18 & 29 & 5 & 23 & 14 \\ 28 & 10 & 22 & 10 & 9 & 0 & 18 \\ 10 & 19 & 17 & 29 & 21 & 11 & 7 \\ 12 & 7 & 16 & 10 & 23 & 21 & 5 \\ 29 & 8 & 17 & 26 & 20 & 21 & 24 \\ 20 & 15 & 6 & 12 & 25 & 8 & 28 \\ 28 & 20 & 15 & 13 & 0 & 6 & 23 \end{bmatrix}, \right.$$

$$\left. \begin{bmatrix} 3 & 16 & 18 & 14 & 10 & 25 & 22 \\ 5 & 23 & 3 & 26 & 28 & 9 & 12 \\ 2 & 9 & 11 & 4 & 3 & 16 & 14 \\ 14 & 5 & 1 & 11 & 21 & 29 & 20 \\ 0 & 10 & 15 & 27 & 19 & 16 & 29 \\ 26 & 6 & 12 & 27 & 24 & 9 & 9 \\ 1 & 27 & 24 & 18 & 22 & 10 & 22 \\ 2 & 15 & 29 & 21 & 11 & 18 & 25 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 28 & 17 & 8 & 15 & 5 & 2 & 9 \\ 0 & 19 & 21 & 14 & 20 & 29 & 4 \\ 10 & 1 & 4 & 26 & 17 & 19 & 10 \\ 19 & 10 & 25 & 10 & 20 & 6 & 3 \\ 8 & 13 & 4 & 13 & 10 & 12 & 26 \\ 6 & 7 & 17 & 28 & 18 & 3 & 2 \\ 18 & 25 & 24 & 29 & 0 & 7 & 11 \\ 21 & 21 & 10 & 1 & 24 & 8 & 27 \end{bmatrix} \right) \tag{11}$$

is formed by rounding uniformly distributed numbers within the segment [0; 30] and then inserting zeros into $\mathbf{U}_1$ if the rounded number is less than 5. Without considering regrets,

$$X^{(\mathrm{M3})} = \arg \max_{x_i,\ i=\overline{1,\ 8}} \left\{ \min_{j=\overline{1,\ 14}} \min_{k=\overline{1,\ 2}} u_{ijk} \right\}$$

$$= \arg \max_{x_i,\ i=\overline{1,\ 8}} \{\min\{0,\ 2\},\ \min\{5,\ 0\},$$

$$\min\{0,\ 1\},\ \min\{0,\ 1\},\ \min\{5,\ 0\},$$

$$\min\{0,\ 2\},\ \min\{5,\ 0\},\ \min\{0,\ 1\}\}$$

$$= \arg \max_{x_i,\ i=\overline{1,\ 8}} \{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\} = X,$$

that is we would not get any reduction of the initial set of decisions X. But minimaximax regret criterion, applied to the generalized regret matrix

$$\mathbf{R} = \left(\left[\begin{matrix} 25 & 23 & 16 & 0 & 21 & 29 & 10 \\ 13 & 0 & 16 & 3 & 22 & 5 & 0 \\ 20 & 21 & 0 & 5 & 16 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 11 & 3 & 23 & 29 & 8 \\ 14 & 22 & 2 & 16 & 5 & 1 & 20 \\ 0 & 17 & 10 & 9 & 0 & 29 & 20 \\ 8 & 9 & 14 & 12 & 13 & 6 & 21 \\ 3 & 28 & 3 & 10 & 29 & 9 & 21 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 29 & 0 & 10 & 8 & 19 & 0 & 8 \\ 11 & 6 & 4 & 0 & 20 & 4 & 14 \\ 1 & 19 & 0 & 19 & 16 & 27 & 10 \\ 19 & 10 & 5 & 0 & 4 & 16 & 21 \\ 17 & 22 & 6 & 19 & 2 & 6 & 23 \\ 0 & 21 & 5 & 3 & 5 & 6 & 4 \\ 9 & 14 & 16 & 17 & 0 & 19 & 0 \\ 1 & 9 & 7 & 16 & 25 & 21 & 5 \end{matrix} \right], \left[\begin{matrix} 23 & 11 & 11 & 13 & 18 & 4 & 7 \\ 21 & 4 & 26 & 1 & 0 & 20 & 17 \\ 24 & 18 & 18 & 23 & 25 & 13 & 15 \\ 12 & 22 & 28 & 16 & 7 & 0 & 9 \\ 26 & 17 & 14 & 0 & 9 & 13 & 0 \\ 0 & 21 & 17 & 0 & 4 & 20 & 20 \\ 25 & 0 & 5 & 9 & 6 & 19 & 7 \\ 24 & 12 & 0 & 6 & 17 & 11 & 4 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 0 & 8 & 17 & 14 & 19 & 27 & 18 \\ 28 & 6 & 4 & 15 & 4 & 0 & 23 \\ 18 & 24 & 21 & 3 & 7 & 10 & 17 \\ 9 & 15 & 0 & 19 & 4 & 23 & 24 \\ 20 & 12 & 21 & 16 & 14 & 17 & 1 \\ 22 & 18 & 8 & 1 & 6 & 26 & 25 \\ 10 & 0 & 1 & 0 & 24 & 22 & 16 \\ 7 & 4 & 15 & 28 & 0 & 21 & 0 \end{matrix} \right] \right) \quad (12)$$

in respect of utility matrix (11), gives just a single optimal decision:

$$X^{*} = \arg \min_{x_i,\ i=\overline{1,\ 8}} \left\{ \max_{j=\overline{1,\ 14}} \max_{k=\overline{1,\ 2}} r_{ijk} \right\}$$

$$= \arg \min_{x_i,\ i=\overline{1,\ 8}} \{\max\{29,\ 27\},\ \max\{22,\ 28\},$$

$$\max\{27,\ 25\},\ \max\{29,\ 28\},\ \max\{23,\ 26\},$$

$$\max\{29,\ 26\},\ \max\{21,\ 25\},\ \max\{29,\ 28\}\}$$

$$= \arg \min_{x_i,\ i=\overline{1,\ 8}} \{29,\ 28,\ 27,\ 29,\ 26,\ 29,\ 25,\ 29\} = \{x_7\}.$$

This is an evidence of how much minimaximax regret criterion is better than using maximinimin without considering regrets.

Generally, a gain of minimaximax regret criterion may be not so big. The gain $g(X^{*})$ can be interpreted as a ratio of a number of optimal decisions by the without-regret maximinimin/minimaximax to a number of optimal decisions by the minimaximax regret criterion decreased by 1:

$$g(X^{*}) = \frac{|X^{(\mathrm{M3})}|}{|X^{*}|} - 1. \qquad (13)$$

Of course, gain (13) fundamentally depends on whether sets X, S, M are finite or not. If they all are finite, then gain (13) depends on values in matrix $\mathbf{R}$ and integers N, Q, K. It is surprising but there are many combinations of those integers at which gain (13) may be negative for an optimal decisions' subset by (5), when $|X^{*}| > |X^{(\mathrm{M3})}|$ and regrets are non-effective.

Conclusions

Instability of the decision function forces to introduce the third dimension. However, finding regrets over a generalized decision function of three variables differs from classically finding regrets only with operating across that third dimension. Similar additional operation is executed when maximal regrets are minimized (a process of minimaximaxing). The suggested minimaximax regret criterion allows finding an optimal decisions' subset by either (5) or (6) with not only regarding instability of the decision function, but also with reducing the initial set of decisions X more, unlike the ultimate pessimism criterion without regrets (minimaximax/maximinimin). This especially concerns nonnegative utility matrices with many zeros, where examples with matrices (7), (8) and (11), (12) seem quite convincing. Thus, the research can be furthered in dealing rationally with sparse decision matrices, where sparsity is believed to influence on the gain (13) much severer. Ascertaining a connection between them and decision trees is going to be a promising goal.

List of literature

1. *A revised* method for robust optimal design of energy supply systems based on minimax regret criterion / R. Yokoyama, K. Fujiwara, M. Ohkura, T. Wakui // Energy Conversion and Management. – 2014. – **84**. – P. 196–208.
2. *Minimax* regret 1-sink location problem in dynamic path networks / Y. Higashikawa, J. Augustine, S.-W. Cheng et al. // Theor. Comp. Sci. – 2015. – **588**. – P. 24–36.
3. *Li Y.P., Huang G.H., Nie S.L.* A robust interval-based minimax-regret analysis approach for the identification of optimal water-resources-allocation strategies under uncertainty // Resources, Conservation and Recycling. – 2009. – **54**, iss. 2. – P. 86–96.
4. *Stoye J.* Minimax regret treatment choice with covariates or with limited validity of experiments // J. Econometrics. – 2012. – **166**, iss. 1. – P. 138–156.
5. *Romanuke V.V.* Multiple state problem reduction and decision making criteria hybridization // Naukovi Visti NTUU KPI. – 2016. – № 2. – P. 51–59.
6. *Wang C.-Y., Chen S.-M.* An improved multiattribute decision making method based on new score function of interval-valued intuitionistic fuzzy values and linear programming methodology // Inform. Sci. – 2017. – **411**. – P. 176–184.
7. *Yager R.R., Alajlan N.* On the measure based formulation of multi-criteria decision functions // Inform. Sci. – 2016. – **370-371**. – P. 256–269.
8. *Zinodiny S., Rezaei S., Nadarajah S.* Bayes minimax estimation of the mean matrix of matrix-variate normal distribution under balanced loss function // Stat. Probab. Lett. – 2017. – **125**. – P. 110–120.
9. *Optimal* actions in problems with convex loss functions / J.P. Arias-Nicolás, J. Martín, F. Ruggeri, A. Suárez-Llorens // Int. J. Approximate Reasoning. – 2009. – **50**, iss. 2. – P. 303–314.
10. *Romanuke V.V.* Meta-minimax approach for optimal alternatives subset regarding the change of the risk matrix in ensuring industrial and manufacturing labor safety // Herald of Khmelnytskyi National University. Tech. Sci. – 2015. – № 6. – P. 97–99.
11. *Romanuke V.V.* Minimaximax approach for finding optimal decisions' subset regarding changes of the loss function // Вісник Харків. нац. ун-ту ім. В.Н. Каразіна. Сер. Мат. моделювання. Інформ. технології. Автоматизовані системи управління. – 2017. – Вип. 33. – С. 81–89.

References

[1] R. Yokoyama *et al.*, "A revised method for robust optimal design of energy supply systems based on minimax regret criterion", *Energy Conversion and Management*, vol. 84, pp. 196–208, 2014. doi: 10.1016/j.enconman.2014.03.045

[2] Y. Higashikawa *et al.*, "Minimax regret 1-sink location problem in dynamic path networks", *Theor. Comp. Sci.*, vol. 588, pp. 24–36, 2015. doi: 10.1016/j.tcs.2014.02.010

[3] Y.P. Li *et al.*, "A robust interval-based minimax-regret analysis approach for the identification of optimal water-resources-allocation strategies under uncertainty", *Resources, Conservation and Recycling*, vol. 54, iss. 2, pp. 86–96, 2009. doi: 10.1016/j.resconrec.2009.06.011

[4] J. Stoye, "Minimax regret treatment choice with covariates or with limited validity of experiments", *J. Econometrics*, vol. 166, iss. 1, pp. 138–156, 2012. doi: 10.1016/j.jeconom.2011.06.012

[5] V.V. Romanuke, "Multiple state problem reduction and decision making criteria hybridization", *Naukovi Visti NTUU KPI*, no. 2, pp. 51–59, 2016. doi: 10.20535/1810-0546.2016.2.61603

[6] C.-Y. Wang and S.-M. Chen, "An improved multiattribute decision making method based on new score function of interval-valued intuitionistic fuzzy values and linear programming methodology", *Inform. Sci.*, vol. 411, pp. 176–184, 2017. doi: 10.1016/j.ins.2017.05.022

[7] R.R. Yager and N. Alajlan, "On the measure based formulation of multi-criteria decision functions", *Inform. Sci.*, vol. 370-371, pp. 256–269, 2016. doi: 10.1016/j.ins.2016.07.045

[8] S. Zinodiny *et al.*, "Bayes minimax estimation of the mean matrix of matrix-variate normal distribution under balanced loss function", *Stat. Probab. Lett.*, vol. 125, pp. 110–120, 2017. doi: 10.1016/j.spl.2017.02.003

[9] J.P. Arias-Nicolás *et al.*, "Optimal actions in problems with convex loss functions", *Int. J. Approximate Reasoning*, vol. 50, iss. 2, pp. 303–314, 2009. doi: 10.1016/j.ijar.2008.03.014

[10] V.V. Romanuke, "Meta-minimax approach for optimal alternatives subset regarding the change of the risk matrix in ensuring industrial and manufacturing labor safety", *Herald of Khmelnytskyi National University. Tech. Sci.*, no. 6, pp. 97–99, 2015.

[11] V.V. Romanuke, "Minimaximax approach for finding optimal decisions' subset regarding changes of the loss function", *Bulletin of V.N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematical Modelling. Information Technology. Automated Control Systems*, iss. 33, pp. 81–89, 2017.

В.В. Романюк

ВИЗНАЧЕННЯ ПІДМНОЖИНИ ОПТИМАЛЬНИХ РІШЕНЬ ЗА МІНІМАКСИМАКСНИМ КРИТЕРІЄМ ВТРАТ З УРАХУВАННЯМ НЕСТАБІЛЬНОСТІ ФУНКЦІЇ РІШЕНЬ

Проблематика. Представляється узагальнення мінімаксного критерію втрат, оскільки навіть мінімаксний критерій втрат із найкращим гарантуванням результату стає непридатним за нестабільних оцінок ситуацій рішень.

Мета дослідження. Метою статті є формулювання мінімаксимаксного критерію втрат.

Методика реалізації. На відміну від класичного, узагальнений критерій втрат є мінімаксимаксом, що оперує над узагальненими втратами. Ці втрати знаходяться із узагальненої функції рішень, яка визначається на декартовому добутку множини рішень, множини станів і множини метастанів. Метастан описує нестабільність функції рішень, значення якої змінюються по множині метастанів. Ця нестабільність руйнує гарантований результат знайдених за класичним правилом втрат, до яких застосовується мінімакс, тому втрати знаходяться за узагальненою функцією рішень. Для цього оцінки корисності віднімаються від корисності, максимізованої на множині рішень, або втрати/ризики, мінімізовані на множині рішень, віднімаються від оцінок втрати/ризику. Тоді втрати мінімізуються за умов невизначеності за двома вимірами станів і метастанів, тобто до них застосовується мінімаксимакс.

Результати дослідження. Пропонований мінімаксимаксний критерій втрат дає змогу знаходити підмножину оптимальних рішень, не тільки враховуючи нестабільність функції рішень, але також і зменшуючи вихідну множину рішень більше, на відміну від критерію крайнього песимізму без втрат (мінімаксимакс/максимінімін).

Висновки. Співвідношення числа оптимальних рішень за критерієм максимініміну/мінімаксимаксу без урахування втрат до числа оптимальних рішень за мінімаксимаксним критерієм втрат, зменшене на 1, може бути інтерпретованим як деякий виграш застосування представленого узагальнення мінімаксного критерію втрат. Цей виграш принципово залежить від того, є множини рішень, станів і метастанів скінченними чи ні. Якщо вони всі є скінченними, то виграш залежить від значень у тривимірній матриці втрат та її розмірів. Вражає те, що цей виграш може виявитись і негативним, тобто знаходження втрат може стати неефективним.

Ключові слова: функція рішень; мінімаксний критерій втрат; підмножина оптимальних рішень; метастан; мінімаксимаксний критерій втрат.

В.В. Романюк

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОДМНОЖЕСТВА ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ПО МИНИМАКСИМАКСНОМУ КРИТЕРИЮ ПОТЕРЬ С УЧЕТОМ НЕСТАБИЛЬНОСТИ ФУНКЦИИ РЕШЕНИЙ

Проблематика. Представляется обобщение минимаксного критерия потерь, поскольку даже минимаксный критерий потерь с наилучшим гарантированием результата становится неподходящим при нестабильных оценках ситуаций решений.

Цель исследования. Целью статьи является формулирование минимаксимаксного критерия потерь.

Методика реализации. В отличии от классического, обобщенным критерием потерь является минимаксимакс, оперирующий над обобщенными потерями. Эти потери находятся из обобщенной функции решений, определяемой на декартовом произведении множества решений, множества состояний и множества метасостояний. Метасостояние описывает нестабильность функции решений, значения которой изменяются по множеству метасостояний. Эта нестабильность разрушает гарантированный результат найденных по классическому правилу потерь, к которым применяется минимакс, поэтому потери находятся по обобщенной функции решений. Для этого оценки полезности вычитаются из максимизированной на множестве решений полезности или минимизированные на множестве решений потери/риски вычитаются из оценок потери/риска. Тогда потери минимизируются в условиях неопределенности по двум измерениям состояний и метасостояний, то есть к ним применяется минимаксимакс.

Результаты исследования. Предлагаемый минимаксимаксный критерий потерь позволяет находить подмножество оптимальных решений, не только учитывая нестабильность функции решений, но также и уменьшая исходное множество решений больше, в отличии от критерия крайнего пессимизма без потерь (минимаксимакс/максиминимин).

Выводы. Соотношение числа оптимальных решений по критерию максиминимина/минимаксимакса без учета потерь к числу оптимальных решений по минимаксимаксному критерию потерь, уменьшаемое на 1, может быть интерпретировано как некий выигрыш применения представленного обобщения минимаксного критерия потерь. Этот выигрыш принципиально зависит от того, являются ли множества решений, состояний и метасостояний конечными или нет. Если они все конечны, то выигрыш зависит от значений в трехмерной матрице потерь и ее размеров. Поразительно, но этот выигрыш может оказаться и негативным, то есть нахождение потерь может стать неэффективным.

Ключевые слова: функция решений; минимаксный критерий потерь; подмножество оптимальных решений; метасостояние; минимаксимаксный критерий потерь.

Рекомендована Радою
факультету прикладної математики
КПІ ім. Ігоря Сікорського

Надійшла до редакції
27 червня 2017 року