УДК 519.21

Щестюк Н. Ю.

ГАММА-ОБЕРНЕНІ ДИФУЗІЙНІ МОДЕЛІ ЦІНОУТВОРЕННЯ АКЦІЙ

Розглянуто деякі моделі ціноутворення акцій, що використовують «ринковий» «активний» час. Конструкція процесу ринкового часу базується на використанні дифузійних процесів з наперед заданою маргінальною гамма-оберненою щільністю і веде до Стюдент — розподілу лог-дохідностей. Показано, що процес «ринкового часу» є асимптотично самоподібним.

Ключові слова: лог-дохідності, геометричний броунівський рух, дифузійний процес, обернений гамма-розподіл, розподіл Стюдента.

Вступ

У сучасній фінансовій математиці основною парадигмою ціноутворення акцій на фінансовому ринку та розрахунку справедливої ціни опціонів продовжує залишатись модель Блека–Шоулза–Мертона. Проте на «чорні діри» цієї моделі, яка дуже спрощує реальність, вказував сам Ф. Блек : «У простоті є і своя сила. Люди сприймають цю модель, оскільки легко можуть зрозуміти закладені у ній припущення. Ця модель досить гарна як перше наближення, а якщо Ви бачите "діри" у зроблених припущеннях, то Ви можете цю модель удосконалити, замінюючи її на більш витончену» [1].

Викриттю «чорних дір» та пошуку більш витончених моделей, альтернативних до моделі Блека–Шоулза, присвячено чимало статтей.

Не зупиняючись на аналізі всіх альтернативних моделей, розглянемо лише модель, запропоновану у 1999 році С. Хейді [2] і надалі модифіковану С. Хейді та М. Леоненком ([3], 2005)

$$S_t = S_0 e^{\mu t+\theta T_t+\sigma W(T_t)},\ t \geq 0, \tag{1}$$

де μ, θ, і $\sigma > 0$ — константи, $W(t), t \geq 0$, є стандартний броунівський рух і ця модель Хейді–Леоненка відрізняється від відомої формули Блека–Шоулза лише тим, що броунівський рух залежить не від фізичного часу $t \geq 0$, а від деякого випадкового процесу $T_t, t \geq 0$, що означає «ринковий» («операційний», «активний») час і є додатним, неспадним стохастичним процесом із стаціонарними, але не обов'язково незалежними приростами. Ідея введення «стохастичного» часу інтуїтивно зрозуміла. Адже зміна ціни акцій на фондовому ринку відбувається не у певний, строго визначений, час, а цілком випадково. У контексті цієї моделі, «activity time» процес $\{T_t\}$ асоціюється саме з часом таких змін та з потоком нової сенсаційної інформації. Зауважимо, що ідея використання нового «операційного» часу зустрічається і в дослідженнях інших авторів. Так, у праці [4] та в деяких інших «новий операційний» час вводиться як спосіб «деволатилізації», що дає змогу «схопити» властивості періодичності та відтворює більш «гладку» картину поведінки кореляційної функції для лог-дохідностей цін акцій.

Для конструкції процесу «ринкового» «активного часу» у [3] було використано процес χ^2, а саме $\tau_t = (\frac{2}{\nu}\chi^2_\nu)^{-1}$. Тоді маргінальним розподілом для $\{T_t\}$ виявився гамма-обернений розподіл $\mathfrak{RG}(\nu/2, \nu/2)$, а розподілом для лог-дохідностей — розподіл Стюдента. Проте кореляційна структура цієї моделі могла бути визначеною лише для цілих $\nu \geq 4$.

Цей недолік подолано за допомогою нового підходу до конструкції стохастичного активного часу $\{T_t\}$, що був запропонований М. Леоненком. Новий підхід базувався на ідеї представлення τ_t через суперпозицію процесів дифузії та спирався на статтю Біблі [6] про побудову процесів дифузії з наперед заданими властивостями.

У статті [5] (2012) М. М. Леоненко разом із співавторами розглянули два випадки, коли τ_t є стаціонарними процесами дифузії та мають обернену гаусівську щільність і коли τ_t мають гамма щільність. У цій замітці розглянемо ще один випадок для конструкції активного часу

$$T_t^m = \sum_{i=1}^{t} \tau_i^m. \tag{2}$$

Для гамма-оберненої щільності приростів τ_t і запропонуємо дві нові моделі, що утворюються при $m = 1$ та $m = 2$. Для обох моделей розглядається теорія розподілів лог-дохідностей та доводиться асимптотична самободібність процесу $\{T_t\}$.

Недоліки моделі Блека–Шоулза

За моделею Блека–Шоулза, лог-дохідності $X_t = \log(S_t/S_{t-1}) = \mu+\sigma(W(t)-W(t-1)), t = 1, 2, \ldots$, є незалежними та однаково розподіленими гауссівськими випадковими величинами з середнім μ і дисперсією σ^2. Проте ці припущення про нормальність розподілу та незалежність величин лог-дохідностей досить часто порушуються для реальних емпіричних даних. Для прикладу були розглянуті ціни акцій таких фірм, як Stock Index S&P 500 (США), Stock Index MICEX O&G (Росія), MICEX TLC (Росія), MICEX M&M (Росія), Kraft Food Inc., Coca-Cola Inc., Google Inc. та деяких інших. Загалом досліджено більше 20 масивів щоденних цін закриття протягом року.

Тестування незалежності та нормальності розподілу для лог-ретунсів було реалізовано засобами STATISTICA 8.0. Для отримання лог-дохідностей використано такі трансформації до цін акцій як логарифмування та взяття різниці з лагом (кроком) 1. Емпіричні щільності розподілу виявилися видовженішими, а «хвости» важчими, ніж за нормального розподілу.

Для перевірки нульової гіпотези H_0 про нормальність розподілу X_t застосовувались опції Probability-Probability plot, тести Kolmogorov–Smirnov, Shapiro–Wilks і тест Lilliefors. У переважній більшості цих випадків не було підстав прийняти гіпотезу про відповідність емпіричного розподілу нормальному на рівні значущості $0,05$. Крім того, знайдено дескриптивні характеристики лог-дохідностей, а саме коефіцієнти асиметрії та ексцесу, що суттєво відрізнялись від 0. Для перевірки наступного припущення моделі Блека–Шоулза, а саме припущення про незалежність розподілу, засобами пакету STATISTICA було побудовано автокореляційну функцію (АКФ) та часткову автокореляційну функцію (ЧАКФ) для значень лог-дохідностей X_t, $t = 0, 1, \ldots, N-k$, $k \geq 1$, а також для їхніх абсолютних значень та їхніх квадратів. Виявилось, що значення АКФ і ЧАКФ швидко згасали й ставали статистично незначущими, що підтверджувало висновок про їх некорельованість. Проте некорельованість ще не означає — незалежність. І справді, АКФ та ЧАКФ для значень $|X_t|^d$, де d — ціле й $\sqrt{|X_t|}$, згасають досить повільно зі збільшенням лагу. Всі ці невідповідності підтверджують недосконалість моделі Блека–Шоулза, невиконання основних припущень моделі для реальних даних і спонукають до пошуку нових альтернативних моделей.

Теорія розподілів для альтернативних моделей ціноутворення акцій

Для моделі (1) розглянемо послідовність приростів «нового» часу за одиничний проміжок: $\tau_t = T_t - T_{t-1}$, $t = 1, 2, \ldots$. Тоді лог-дохідності виражаються як

$$X_t = \log(S_t/S_{t-1}) \overset{d}{=} \mu + \theta\tau_t + \sigma\tau_t^{\frac{1}{2}} W(1), \quad (3)$$

де $\overset{d}{=}$ означає еквівалентність випадкових величин за розподілом. Не зменшуючи загальності, покладемо $E\tau_t = 1$, бо будь-яка зміна масштабу може відбуватись за рахунок параметрів θ і σ (за умови $E\tau_t < \infty$). Дослідимо дві моделі, що утворюються при $m = 1$ і $m = 2$.

Модель 1

Нехай $m = 1$ у конструкції нового ринкового часу (2) T_t

$$T_t = T_t^1 = \sum_{i=1}^{t} \tau_i,$$

де стаціонарний розподіл τ_t є оберненим гамма розподілом

$$\mathfrak{RG}(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} x^{-\beta-1} e^{-\frac{\alpha}{x}} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x \leq 0 \end{cases} \quad (4)$$

із параметрами α і β. Нагадаємо, що випадкові величини, які мають гамма $\mathfrak{G}(\alpha, \beta)$, та обернений гамма $\mathfrak{RG}(\alpha, \beta)$ розподіли, пов'язані між собою відношенням

$$\mathfrak{RG}(\alpha, \beta) = \frac{1}{\mathfrak{G}(\alpha, \beta)} = \frac{\alpha}{\mathfrak{G}(1, \beta)} = \alpha \cdot \mathfrak{RG}(1, \beta).$$

Характеристична функція випадкової величини, розподіленої за оберненим гамма розподілом з параметрами α та β має вигляд (див. [7] або [10]):

$$\varphi_{\mathfrak{RG}}(t) = E[e^{itX}] =$$
$$= \frac{2\alpha^\beta \cdot (-it\alpha^{-1})^{\beta/2} \cdot K_\beta[2\alpha(-i\alpha^{-1})^{1/2}]}{\Gamma(\beta)}, \quad t \in \mathbb{R},$$

де $K_\beta(\cdot)$ означає модифіковану функцію Беселя другого роду.

Нехай τ_t розподілені як $\mathfrak{RG}(\frac{\nu}{2}, \frac{\delta^2}{2})$, де $\delta, \nu > 0$ з щільністю

$$f_{\mathfrak{RG}}(x) = \frac{(\frac{\delta^2}{2})^{\frac{\nu}{2}}}{\Gamma(\frac{\nu}{2})} x^{-\frac{\nu}{2}-1} e^{-\delta^2/2x}, \; x > 0, \quad (5)$$

тоді моменти k-го порядку для τ_t такі [10]:

$$E[\tau_t^k] = \nu^k \frac{\Gamma(\frac{\delta^2}{2} - k)}{4\Gamma(\frac{\delta^2}{2})}, \quad \frac{\delta^2}{2} > k.$$

Зокрема, математичне сподівання і дисперсія τ_t мають вигляд:

$$E[\tau_t] = \frac{\nu}{\delta^2 - 2}, \quad \delta^2 > 2,$$

$$Var[\tau_t] = \frac{2\nu^2}{(\delta^2-2)^2(\delta^2-4)}. \qquad (6)$$

Якщо розглянути характеристичну функцію випадкової величини $X \stackrel{d}{=} \mu + b\varepsilon$, де ε має стандартний нормальний розподіл $N(0,1)$, а b^2 — обернений гамма-розподіл $\mathfrak{RG}(\frac{\nu}{2}, \frac{\delta^2}{2})$, то можна показати (див. [7] або [10]), що лог-дохідності X_t є випадковими величинами Стюдент — типу $T(\mu,\delta,\nu)$ зі щільністю розподілу

$$f(x) = c(\nu,\delta)\frac{1}{[1+(\frac{x-\mu}{\delta})^2]^{\frac{\nu+1}{2}}}\ , \quad x\in\mathbb{R}, \qquad (7)$$

де $\mu\in\mathbb{R}$ — параметр зсуву (*location parameter*), $\delta>0$ — параметр масштабування або стиску (*scaling parameter*), $\nu>0$ — число ступенів свободи та $c(\delta,\nu) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\delta\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{\nu}{2})}$.

Характеристична функція для лог-дохідностей X_t, що є характеристичною функцією розподілу Стюдента, може бути виражена через функцію Беселя третього роду:

$$\phi_X(t) = e^{it\mu}K_{\nu/2}(\delta\,|t|)(\delta\,|t|)^{\nu/2}2^{1-(\nu/2)}/\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right).$$

Моменти для X_t мають вигляд $EX_t=\mu$,

$$E(X_t-\mu)^n =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\Gamma(\frac{n+1}{2})\Gamma(\frac{\nu-n}{2})}{\Gamma(\frac{\nu+1}{2}))}\delta^{n+1}c(\nu,\delta), & n=2k,\\ 0, & n=2k-1.\end{cases}$$

Отже,

$$\mu_2 = E(X_t-\mu)^2 = \frac{\delta^2}{\nu-2}, \nu>2,$$

$$\mu_3 = E(X_t-\mu)^3 = 0,$$

$$\mu_4 = E(X_t-\mu)^4 = \frac{3\delta^4}{(\nu-4)(\nu-2)}, \nu>4.$$

Емпіричний матеріал підтверджує узгодженість розподілу лог-дохідностей реальних фінансових даних теоретичному розподілу Стюдента (7).

Модель 2

Нехай $m=2$, тобто $\tau_i^2 = Y_t^{(1)} + Y_t^{(2)}, t=0,1,2,...,$ де $Y_t^{(1)}$ та $Y_t^{(2)}$ — незалежні процеси такі, що $Y_t^{(1)} \sim \mathfrak{RG}(\alpha_1,\beta_1)$, $Y_t^{(2)} \sim \mathfrak{RG}(\alpha_2,\beta_2)$ як (4).

Ф. Джирон і К. Кастиліо [8] показали, що за деяких обмежень на параметр форми, а саме за умови, що він напівцілий, згортка гамма-обернених розподілів розподілена як суміш скінченної кількості гамма-обернених розподілів, що всі мають однаковий параметр масштабу. Характеристична функція згортки $Y_t^{(1)} \sim \mathfrak{RG}(\alpha_1, n+\frac{1}{2})$, $Y_t^{(2)} \sim \mathfrak{RG}(\alpha_2, m+\frac{1}{2}),\ n,m\in N, m>n$ має вигляд:

$$\phi_{Y_1+Y_2}(\zeta) = E\left[\exp\{i\zeta Y_1\}\right]E\left[\exp\{i\zeta Y_2\}\right] =$$
$$= 2\alpha_1^{\frac{2n+1}{4}}\alpha_2^{\frac{2m+1}{4}}(-i\zeta)^{n+m+\frac{1}{2}}K_{n+\frac{1}{2}}(2\sqrt{\alpha_1}\sqrt{-i\zeta})\times$$
$$\times K_{m+\frac{1}{2}}(2\sqrt{\alpha_2}\sqrt{-i\zeta})/(\Gamma(n+\frac{1}{2})\Gamma(m+\frac{1}{2})).$$

Згортка $Y_t^{(1)}$ та $Y_t^{(2)}$ розподілена як наступна суміш

$$Y_t^{(1)} + Y_t^{(2)} \sim \sum_{i=1}^{m+1} p_i f_{R\Gamma}((\sqrt{\alpha_1}+\sqrt{\alpha_2})^2, n-\frac{1}{2}+i), \qquad (8)$$

де вагові коефіцієнти $p_i\ge 0$, $\sum_{i=1}^{m+1}p_i = 1$ можуть бути обчислені як рекурсія

$$p_{m+1} = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(n+m+\frac{1}{2})}{\Gamma(n+\frac{1}{2})\Gamma(m+\frac{1}{2}))}\frac{(\sqrt{\alpha_1})^n(\sqrt{\alpha_2})^m}{(\sqrt{\alpha_1}+\sqrt{\alpha_2})^{n+m}}, \qquad (9)$$

$$p_{j+1} = 2^{2j+2}\Gamma(n+\frac{1}{2}+j)(\frac{c\gamma_{n+j}}{2^{2j+2}\sqrt{\pi}(\sqrt{\alpha_1}+\sqrt{\alpha_2})^{n+j}} -$$
$$-\sum_{i=j+2}^{m+1}\frac{p_i}{2^{2j}\Gamma(n-\frac{1}{2}+i)}\frac{(n+2j-2-j)!}{(n+j)!(i-1-j)!}), \qquad (10)$$
$$j=0,1,2,...m-1,$$

де $$c = \frac{\pi}{2^{2(n+m)}\Gamma(n+\frac{1}{2})\Gamma(m+\frac{1}{2})},$$

$$\gamma_k = 2^{2k}\sum_{i=0}^{k}\frac{(2n-i)!}{(i)!(n-i)!}\frac{(2m-k+i)!}{(k-i)!(m-k+i)!}\times$$
$$\times(\sqrt{\alpha_1})^i(\sqrt{\alpha_2})^{k-i},$$

$$\gamma_{n+k} = 2^{n+k}\sum_{i=0}^{n}\frac{(2n-i)!}{(i)!(n-i)!}\times$$
$$\times\frac{(2m-n-k+i)!}{(n+k-i)!(m-n-k+i)!}(\sqrt{\alpha_1})^i(\sqrt{\alpha_2})^{n+k-i},$$

$$\gamma_{m+k} = 2^{m+k}\sum_{i=0}^{n}\frac{(2n-i)!}{(i)!(n-i)!}\frac{(m-k+i)!}{(m+k-i)!(i-k)!}\times$$
$$\times(\sqrt{\alpha_1})^i(\sqrt{\alpha_2})^{m+k-i}, k=0,1,..,n.$$

Оскільки лог-дохідності альтернативної моделі (1) можуть бути представлені як (3), то для визначення характеру їхнього розподілу знайдемо характеристичну функцію випадкової величини $X \stackrel{d}{=} \mu + b\varepsilon$, де ε має стандартний нормальний розподіл $N(0,1)$, а b^2 розподілено як суміш (8–10):

$$\phi_X(\zeta) = E\left[\exp\{i\zeta X\}\right] =$$

$$= e^{i\zeta\mu}\int_0^\infty e^{-(\frac{\zeta^2}{2})x} f_{b^2}(x)dx = e^{i\zeta\mu}\int_0^\infty e^{-(\frac{\zeta^2}{2})x} \times$$

$$\times \sum_{i=1}^{m+1} p_i f_{R\Gamma}(((\sqrt{\alpha_1}+\sqrt{\alpha_2})^2, n-\frac{1}{2}+i))dx.$$

Нехай $(\sqrt{\alpha_1}+\sqrt{\alpha_2})^2 = \frac{\nu}{2}$ та $n - \frac{1}{2} + i = \frac{\delta_i^2}{2}$, $i = 1, 2, ..., m+1$, тоді

$$\phi_X(\zeta) = e^{i\zeta\mu}\sum_{i=1}^{m+1} p_i \int_0^\infty e^{-(\zeta^2/2)x} f_{R\Gamma}(\frac{\nu}{2}, \frac{\delta_i^2}{2})dx =$$

$$= e^{i\zeta\mu}\sum_{i=1}^{m+1} p_i K_{\nu/2}(\delta\,|\zeta|)(\delta\,|\zeta|)^{\nu/2} 2^{1-(\nu/2)} / \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right).$$

Отже, маємо

$$\phi_X(\zeta) = e^{i\zeta\mu}\sum_{i=1}^{m+1} p_i \phi_T(\zeta, \delta_i, \nu), \qquad (11)$$

де $\phi_T(\zeta, \delta_i, \nu)$, $i = 1, 2, ..., m+1$ є характеристичними функціями симетричного розподілу Стюдента. (11) визначає розподіл для моделі 2. Моменти X_t можуть бути обчислені.

Побудова процесу «ринкового» часу

Розглянемо спочатку побудову процесу «ринкового» часу (2) для моделі 1. Конструкція «ринкового» часу полягає у побудові процесу дифузії з наперед заданими властивостями для одиничних приростів τ_i. Нехай $\tau_i = \tau_i^1 = Y_t, t = 0, 1, 2, ...$, де

$$dY_t = -\theta\left(Y_t - \mu\right)dt + \sqrt{v(Y_t)}\;dW_t, \quad t \geq 0, \; (12)$$

де $\theta > 0$, $l < \mu < r$, $\beta > 1$ і $W = \{W_t, t \geq 0\}$ — є стандартний броунівський рух (вінерівський процес), а функцію v можна вибрати, що дифузійний процес $Y = \{Y_t, t \geq 0\}$, який є розв'язком (12), буде ергодичним і таким, що має інваріантну ймовірностну щільність, яка дорівнює наперед заданій функції щільності f [6].

Розглянемо стаціонарний гамма-обернений дифузійний процес із щільністю f, що задана (5). Коефіцієнти v і μ стохастичного диференціального рівняння (12) визначимо через f [6]. Для цього розподілу $Y \sim \Re\mathfrak{G}(\frac{\nu}{2}, \frac{\delta^2}{2})$ коефіцієнти мають вигляд:

$$\mu(x) = \nu/(\frac{\delta^2}{2} - 2), \quad v(y) = \frac{4\theta}{\delta^2 - 2}\,y^2.$$

Якщо $Y_0 \sim \Re\mathfrak{G}(\frac{\nu}{2}, \frac{\delta^2}{2})$, то Y, як показано у [6], — стаціонарний процес, тобто

$$E\left[Y_{s+t}|Y_s = y\right] = ye^{-\theta t} + \mu(1 - e^{-\theta t}),$$

де $\mu = \nu/(\frac{\delta^2}{2} - 2)$ — математичне сподівання гама-оберненої випадкової величини $Y \sim \Re\mathfrak{G}(\frac{\nu}{2}, \frac{\delta^2}{2})$. Автокореляційна функція для Y(див. [6]) має вигляд

$$\rho(t) = \mathrm{Corr}(Y_{s+t}, Y_s) = e^{-\theta t},\; t \geq 0,\; s \geq 0.$$

Лог-дохідності розподілено за типом Стюдента. Розглянемо тепер модель 2. Тоді $m = 2$, та

$$\tau_i^2 = Y_t^{(1)} + Y_t^{(2)}, t = 0, 1, 2, ...$$

де $Y_t^{(1)}$ і $Y_t^{(2)}$ — такі незалежні процеси, що

$$dY_t^{(j)} = -\theta^{(j)}\left(Y_t^{(1)} - \frac{\nu^{(j)}}{\delta^{(j)2} - 2}\right)dt +$$

$$+\sqrt{\frac{4\theta^{(j)}}{\delta^{(j)2} - 2} Y_t^{(j)2}}\;dW_t^{(j)}, j = 1, 2, \quad t \geq 0. \quad (13)$$

Процес $Y_t^{(1)} + Y_t^{(2)}, t \geq 0$ — стаціонарний як суперпозиція двох незалежних дифузійних гамма-обернених процесів. Він має ергодичну маргінальну щільність, що є згорткою двох незалежних гамма-обернених щільностей з різними параметрами, кожна з яких визначає коефіцієнти рівняння (13).

Дослідимо конструкцію процесу «ринкового» часу T_t^m. Нехай D[0,1] — простір Скорохода, для $t \in [0, 1]$ розглянемо випадкову функцію $T_{[Nt]}$.

Твердження 1. Для $m = 1, 2$ та $t \in [0, 1]$

$$\frac{1}{c_m\sqrt{N}}(T_{[Nt]} - ET_{[Nt]}) \xrightarrow{d} B(t), \text{ для } N \to \infty \quad (14)$$

в сенсі слабкої збіжності на D[0,1].

Доведення. Для m=1 кожен $\tau_t = \tau_t^{(1)} = Y_t, t = 0, 1, 2, ...$ є процесом φ-перемішування (φ- *mixing process*), що задовольняє умову φ-перемішування [6] з константою $\varphi_y(t) = O(e^{-\alpha t})$, та центральна функціональна теорема 20.1 [9] справджується з константою нормування, що обчислюється так:

$$c_1^2 = Var\sum_{i=1}^{N}\tau_i = Var(\tau_1) + 2\sum_{i=1}^{\infty} cov(\tau_1, \tau_{i+1}),$$

де τ_t мають в цьому випадку гамма-обернений $R\Gamma(\frac{\nu}{2}, \frac{\delta^2}{2})$ розподіл. Дисперсія визначається за формулою (6), а коваріаційна функція задається формулою

$$cov(\tau_s, \tau_{s+t}) = cov(Y_s, Y_{s+t}) = e^{-\theta t},\ t \geq 0,\ s \geq 0,$$

Отже, константа нормування

$$c_1^2 = \frac{2\nu^2}{(\delta^2-2)^2(\delta^2-4)} + \frac{2}{e^\theta - 1}, m = 1.$$

Для моделі m=2 прирости $\tau_t^{(1)}, \tau_t^{(2)} t = 0, 1, 2, ...$ є також процесами φ-перемішування з коефіцієнтами перемішування експонентного типу. Сума двох процесів φ-перемішування є знову процесом φ-перемішування, умови теореми 20.1 виконуються та слабка збіжність (14) на $D[0,1]$ справджується. Константа нормування може бути обчислена аналогічно за допомогою використання теорії розподілу до моделі 2. Твердження 1 про асимптотичну самоподібність для процесу активного часу доведено.

Висновки

Розглянуто нові різновиди моделі Хейді–Леоненка для ціноутворення ризикованих активів, що використовують «ринковий» час. Конструкція процесу ринкового часу базується на використанні дифузійних процесів із наперед заданою маргінальною гамма-оберненою щільністю і веде до Стюдент — розпоілу лог-дохідностей. Показано, що процес «ринкового часу» є асимптотично самоподібним. У подальших дослідженнях для розглянутих моделей доцільно запропонувати формулу для обчислення справедливої ціни опціонів та перевірити її узгодженість з реальними статистичними даними.

На завершення статті висловлюємо подяку проф. М. М. Леоненку, без співпраці з яким ця стаття була б неможлива.

Список літератури

1. Black F. The holes in Black-Scholes / F. Black // RISK-magazin. — 1988. — V. 26. — P. 47–51.
2. Heyde C. C. A risky asset model with strong dependence through fractal activity time / C. C. Heyde // Journal Applied Probability. — 1999. — V. 36. — P. 1234–1239.
3. Heyde C. C. Student Processes / C. C. Heyde, N. N. Leonenko // Journal Applied Probability. — 2005. — V. 37. — P. 342–365.
4. Muller U. A. Statistical study of foreign exchange rates, empirical evidence of a price change scaling law, and intra-day analysis/ U.A. Muller, M. Dacorogna // J. of Bancing and Finance. — 1990. — V. 14. — P. 1189–1208.
5. Leonenko N. N. Normal Inverse Gaussian model for risky asset with dependence / N. N. Leonenko, S. Petherick and A. Sikorskii // Statistics and Probability Letters. — 2012. — V. 82. — N. 1. — P. 109–115.
6. Bibly B. M. Diffusion-type models with given marginal distribution and autocorrelation function / B. M. Bibly, M. I. Skowgaard, M. Sorensen // Bernoulli. — 2005. — V. 11. — N. 2. — P. 191–200.
7. Witkovsky V. Exact distribution of positive linear combinations of inverted chi-square random variables with odd degrees of freedom / V. Witkovsky // Statist. Probability Letters. — 2005. — V. 11. — P. 45–50.
8. Giron F. J. A note on the convolution of inverted-gamma distributions with applications to the Behrens-Fisher distribution / F. J. Giron and C. del Castillo // Statistic and Operations Research. — 2001. — V. 95. — N. 1. — P. 39–44.
9. Billingsley P. Convergence of Probability Measures / P. Billingsley. — New York : Wiley, 1968. — 262 p.
10. Leonenko N. N. Statistical inference for reciprocal gamma diffusion process / N. N. Leonenko, N. Šuvak // J. of Statistical Planning and Inference. — 2010. — V. 140. — P. 30–51.

N. Shchestyuk

RECIPROCAL GAMMA DIFFUSION PROCESSES FOR RISKY ASSET MODELS

Risky asset models of the stock price with the dependence through activity time are described. The construction of activity time uses superpositions of diffusion processes with given marginal reciprocal gamma distribution and allows for Student distributions of the log-returns. The activity time is asymptotically self-similar.
Keywords: log-returns, GBM, diffusion processes, reciprocal gamma distribution, Student distribution.

Матеріал надійшов 14.03.2012