

## ХТО НАСПРАВДІ АВТОР ІДЕЇ ПРО КВАНТИ СВІТЛА

*Проаналізовано погляди М. Планка та А. Ейнштейна на проблему квантування електромагнітного випромінювання. На підставі цього аналізу стверджується, що саме Планк першим розглядав світло як сукупність квантів і спирався на цю гіпотезу при виведенні формули для спектральної густини енергії теплового випромінювання (формули Планка).*

**Ключові слова:** теплове випромінювання, формула Планка, кванти світла.

### 1. Вступ

Створення квантової теорії — видатний інтелектуальний прорив фізичної науки, що стався на початку ХХ століття. Історики науки і професійні фізики ще неодноразово звертатимуться до праць основоположників цієї теорії, уважно вчитуючись у кожне речення і намагаючися реконструювати хід думки, міркування і гіпотези, які інколи залишалися «поза кадром».

Квантові властивості матерії проявляються у багатьох макроскопічних явищах, доступних для спостереження і вимірювання засобами класичної фізики. Серед них — явище теплового випромінювання нагрітих тіл. Аналіз цього явища на основі класичної фізики призводить до парадоксального висновку: нагріті до кімнатної температури тіла мають випромінювати як завгодно великі частоти і густина енергії цього високочастотного випромінювання має збільшуватися зі зростанням частоти. Цей парадоксальний висновок дістав назву «ультрафіолетової катастрофи».

Правильну формулу для спектральної густини енергії теплового випромінювання запропонував Макс Планк у грудні 1900 року [1, 2]. Ключовою у виведенні цієї формули була гіпотеза про те, що енергія нагрітого тіла й водночас енергія електромагнітного випромінювання не можуть змінюватися неперервно: приріст енергії не може бути меншим за величину  $\varepsilon_0 = \hbar\omega$ , де  $\hbar = h/(2\pi)$ ,  $h = 6.626176(36) \cdot 10^{-34}$  Дж·с — стала Планка.

У багатьох підручниках з квантової механіки та атомної фізики стверджують, що Планк приписував квантування енергії лише нагрітим матеріальним тілам, а енергію електромагнітного поля вважав неперервною величиною. Авторство гіпотези про квантування електромагнітного випромінювання традиційно приписують А. Ейнштейну маючи на увазі відому працю «Про одну евристичну точку зору, що стосується виникнення та перетворення світла» [4], опубліковану у 1905 році. Але уважне прочитання праць Планка [1, 2] неспростовно свідчить, що гіпотезою про кванти теплового випромінювання задовго до Ейнштейна

послугувався Планк, виводячи свою знамениту формулу для спектральної густини енергії. З пріоритетом Планка погоджувався Ейнштейн, про що свідчить фраза в одній із наступних після [4] статей: «Теорія Планка насправді неявно використовує згадану вище гіпотезу квантів» [5].

Мета нашого розгляду — на основі аналізу текстів статей [1, 2] показати, що гіпотезою про кванти світла Планк послуговувався цілком «явно». Твердження про те, що під квантом Планк розумів лише дискретні рівні нагрітої речовини, очевидно, нав'язане його доповіддю на Першому Сольвейвському конгресі у 1911 році [6], де, справді, акцент зроблено на квантуванні енергії мікроскопічних осциляторів, які моделюють нагріву речовину. Після доповіді Планка відбулася цікава дискусія з учасниками конгресу, зокрема з А. Ейнштейном, яка виявляє різне розуміння квантів світла цими видатними науковцями. Цікавими є також коментарі А. Пуанкаре, який зауважив, що існування мінімального кванта дії  $h$  не сумісне з законами класичної механіки, які формулюються в термінах диференціальних рівнянь [7].

### 2. Ентропія теплового випромінювання і формула Планка

Розглянемо теплове випромінювання в об'ємі  $V$  за температури  $T$  як рівноважну термодинамічну систему. Повну енергію такої системи, очевидно, можна можна вважати рівною

$$U(T, V) = u(T) \cdot V,$$

де  $u(T)$  — густина енергії теплового випромінювання. З точки зору класичної електродинаміки теплове випромінювання — це сукупність плоских електромагнітних хвиль різної частоти, які задовольняють певні граничні умови (наприклад, умови періодичності). Густина енергії  $u(T)$  усієї сукупності частот можна подати як

$$u(T) = \int_0^{\infty} u(\omega, T) d\omega.$$

Функцію  $u(\omega, T)$  називають спектральною густиною енергії теплового випромінювання. Її явний вигляд знайшов Планк:

$$u(\omega, T) = \frac{\omega^3}{c^3 \pi^2} \frac{\hbar}{e^{\hbar\omega/(k_B T)} - 1}. \quad (1)$$

Центральним пунктом у планківському виводі (1) була формула для ентропії теплового випромінювання, а точніше для ансамблю хвиль фіксованої частоти. Статистичні властивості такої сукупності Планк цілком слушно пов'язував із випадковістю амплітуди і фаз окремих хвиль [3], а ентропію обчислював за формулою Больцмана:

$$S(\omega, T) = k_B \ln W(\omega, T), \quad (2)$$

де  $W(\omega, T)$  — кількість станів (конфігурацій) поля випромінювання, за яких енергія системи залишається фіксованою (фіксованим є також об'єм, тому залежність від цього параметра ми опускаємо). Під час обчислення величини  $W(\omega, T)$  важливим було припущення про дискретність енергії випромінювання і про її мінімальну порцію  $\varepsilon_0 = \hbar\omega$  (елемент енергії, за термінологією Планка, або квант, за сучасною термінологією). Очевидно, що в міркуваннях Планка йдеться про *квант енергії поля, а не речовини!* За цих припущень задача обчислення  $W(\omega, T)$  зводиться до комбінаторної задачі про розподіл  $P$  квантів сукупної енергії  $U(\omega, T)$  серед  $N$  резонаторів в об'ємі  $V$  (під резонатором можна розуміти нормальні моди коливань електромагнітного поля в об'ємі  $V$ ). Цю комбінаторну задачу не складно розв'язати:

$$W(\omega, T) = \frac{(N + P - 1)!}{(N - 1)! P!}. \quad (3)$$

Оскільки  $N$  і  $P$  — великі числа, то для обчислення факторіалів можна скористатися наближеною формулою Стірлінга  $n! \approx \sqrt{2\pi n} e^{-n} n^n$ . Тоді ентропію (2) запишемо так:

$$\begin{aligned} S(\omega, T) \approx k_B & \left[ (N + P - \frac{1}{2}) \ln(N + P - 1) - \right. \\ & \left. - (N - \frac{1}{2}) \ln(N - 1) - (P + \frac{1}{2}) \ln P - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \ln(2\pi) \right] = k_B N \left[ \left( 1 + \frac{P}{N} \right) \ln \left( 1 + \frac{P}{N} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{P}{N} \ln \left( \frac{P}{N} \right) \right]. \quad (4) \end{aligned}$$

Якщо через  $\langle \varepsilon \rangle_T$  позначити середню енергію одного резонатора або однієї моди електромагнітних коливань, то можна написати очевидні співвідношення:

$$U(\omega, T) = N \langle \varepsilon \rangle_T = P \varepsilon_0, \quad \frac{P}{N} = \frac{\langle \varepsilon \rangle_T}{\varepsilon_0}.$$

Підставивши ці вирази у (4), матимемо:

$$\begin{aligned} S(\omega, T) = k_B N & \left[ \left( 1 + \frac{\langle \varepsilon \rangle_T}{\varepsilon_0} \right) \ln \left( 1 + \frac{\langle \varepsilon \rangle_T}{\varepsilon_0} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{\langle \varepsilon \rangle_T}{\varepsilon_0} \ln \left( \frac{\langle \varepsilon \rangle_T}{\varepsilon_0} \right) \right]. \quad (5) \end{aligned}$$

Простим наслідком закону збереження енергії термодинамічної системи (при сталому об'ємі) є рівняння:

$$\frac{\partial S(\omega, T)}{\partial U(\omega, T)} = \frac{1}{T}.$$

Оскільки у нашому випадку  $U(\omega, T) = N \langle \varepsilon \rangle_T$ , то

$$\frac{\partial S(\omega, T)}{\partial \langle \varepsilon \rangle_T} = \frac{N}{T}. \quad (6)$$

Позначимо через  $x$  відношення  $\langle \varepsilon \rangle_T / \varepsilon_0$ . Тоді рівняння (6) з урахуванням формули (5) матиме вигляд:

$$\ln \frac{1+x}{x} = \frac{\varepsilon_0}{k_B T},$$

звідки

$$x = \frac{\langle \varepsilon \rangle_T}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\exp(\varepsilon_0 / (k_B T)) - 1}.$$

Домножимо цю величину на число мод (резонаторів) в одиниці об'єму

$$n = \frac{N}{V} = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^2}$$

й отримаємо формулу (1). Зауважимо, що число  $n$ , яке в сучасній науковій літературі називають фактором Джінса, Планк обчислив іще у 1899 році.

Отже, наведене виведення формули Планка ґрунтується на гіпотезі про кванти електромагнітного випромінювання. Інше доведення, яке спирається на аналіз процесів випромінювання і поглинання заряджених осциляторів, Планк презентував у доповіді на Сольвевському конгресі з фізики в 1911 році — більше ніж через 10 років після його першої доповіді (і першого доведення) на засіданні Німецького фізичного товариства 14 грудня 1900 року у Берліні.

### 3. Кванти світла з точки зору А. Ейнштейна

Для зіставлення точок зору М. Планка й А. Ейнштейна наведемо основні твердження з праці [4] останнього. Розглянемо услід за Ейнштейном ансамбль хвиль фіксованої, але достатньо великої частоти. Тобто вважатимемо, що

$$\exp\left(-\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) \ll 1.$$

У цьому випадку формула Планка переходить у формулу Віна, а для ентропії отримаємо спрощену формулу:

$$S(\omega, T, V) = -k_B V \frac{\omega^2}{\pi^2 c^2} \frac{\langle \varepsilon \rangle_T}{\varepsilon_0} \left[ \ln \frac{\langle \varepsilon \rangle_T}{\varepsilon_0} - 1 \right], \quad (7)$$

де

$$\frac{\langle \varepsilon \rangle_T}{\varepsilon_0} \approx e^{-\hbar\omega/(k_B T)}.$$

Домножимо праву та ліву частину рівності (7) на малий інтервал частот. Відповідно до принципу адитивності за частотами величина  $S_\omega(T, V) = S(\omega, T, V)\Delta\omega$  є ентропією ансамблю хвиль з частотами в інтервалі  $[\omega, \omega + \Delta\omega]$ , а величина  $U_\omega(T, V) = V u(\omega, T)\Delta\omega$  — енергією цієї сукупності хвиль. З рівняння (7) отримуємо формулу, яка пов'язує ентропію з енергією:

$$S_\omega(T, V) = -k_B \frac{U_\omega(T, V)}{\pi\omega} \ln \left[ \frac{\pi^2 c^2 U_\omega(T, V)}{\hbar\omega^2 V \Delta\omega} - 1 \right]. \quad (8)$$

Далі Ейнштейн пропонує розглянути термодинамічний процес, у початковій стадії якого випромінювання з вузьким набором частот  $\Delta\omega$  зосереджене в об'ємі  $V_1$ , а потім спонтанно локалізується в меншому об'ємі  $V_2$ . При цьому енергія залишається незмінною, а ентропія зменшується. Відповідно до формули (8), маємо:

$$S_\omega(T, V_2) - S_\omega(T, V_1) = k_B \frac{U_\omega(T, V_1)}{\hbar\omega} \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (9)$$

Якщо послуговатися визначенням ентропії за Больцманом, то

$$S_\omega(T, V_2) - S_\omega(T, V_1) = k_B \ln P, \quad (10)$$

де  $P$  — ймовірність переходу зі стану (1) у стан (2). Порівнюючи формули (9) і (10), бачимо, що

$$P(1 \rightarrow 2) = \left( \frac{V_2}{V_1} \right)^{\frac{U_\omega(T, V_1)}{\hbar\omega}}.$$

Цей вираз подібний до формули відносної ймовірності локалізації  $N$  частинок ідеального газу з об'єму  $V_1$  в об'єм  $V_2$

$$P(V_1 \rightarrow V_2) = \left( \frac{V_2}{V_1} \right)^N.$$

Отже, робить висновок Ейнштейн, величина  $U_\omega(T, V_1)/\hbar\omega$  має сенс «кількості частинок».

Але чи виправдано ототожнювати кванти електромагнітного випромінювання з матеріальними частинками? Напевно, ні. Кванти світла, як їх розумів Планк, — це електромагнітні хвилі, які мають

задовольняти певні граничні умови. Така хвиля не може бути спонтанно локалізована в об'ємі меншому за початковий. Якщо скористатися відомою з електродинаміки формулою для енергії електромагнітного випромінювання

$$U = \frac{1}{8\pi} \int (E^2 + H^2) d^3x,$$

то можна оцінити амплітуду хвилі, що відповідає енергії  $\hbar\omega$ , тобто одному квантові:

$$A^2 \sim \frac{\hbar\omega}{V} 4\pi.$$

Для частот видимого спектру це дуже мала величина.

Імпульс  $\mathbf{p}$  плоскої електромагнітної хвилі визначається вектором Пойнтінга:

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}] = c u \mathbf{n}, \quad \mathbf{p} = \frac{\mathbf{S}}{c^2},$$

де  $\mathbf{n}$  — одиничний вектор у напрямку поширення хвилі,  $u$  — густина енергії. Отже, одному кванту електромагнітного випромінювання з енергією  $u = \hbar\omega$  слід приписати імпульс

$$\mathbf{p} = \frac{\hbar\omega}{c} \mathbf{n} = \hbar |k| \mathbf{n} = \hbar \mathbf{k}, \quad (11)$$

де  $\mathbf{k}$  — хвильовий вектор.

Як бачимо, гіпотеза про кванти світла стверджує, що теплове і будь-яке інше електромагнітне випромінювання існує як сукупність елементарних квантів (названих згодом фотонами). Кожен елементарний квант — це плоска хвиля з енергією  $\hbar\omega$  та імпульсом  $\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$ . Але зауважимо, що *про локалізацію квантів світла не йдеться!*

Відмінності точок зору Планка й Ейнштейна в тому, що Планк вважав квантування світла і його «термалізацію» (перетворення у статистичний ансамбль) наслідком поглинання і випромінювання світла речовиною. Точка зору Ейнштейна полягала в тому, що будь-яке електромагнітне випромінювання завжди існує як сукупність квантів. Очевидно, така точка зору не може бути узгоджена з класичною електродинамікою. Гіпотеза про кванти світла в інтерпретації Ейнштейна була предтечею створення квантової електродинаміки.

## Список літератури

1. Планк М. К теории распределения энергии излучения нормального спектра // М. Планк. Избранные труды / М. Планк. — М., 1975.— С. 251–257.
2. Планк М. О законе распределения энергии в нормальном спектре // М. Планк. Избранные труды / М. Планк. — М., 1975.— С. 258–267 (Ann. Phys. 4 (1901), P. 553–563).
3. Планк М. Энтропия и температура лучистой энергии // М. Планк. Избранные труды / М. Планк. — М., 1975.— С. 234–248 (Ann. Phys. 1 (1900), P. 719–737).
4. Эйнштейн А. Об одной эвристической точке зрения, касающейся возникновения и превращения света // Собрание научных трудов. Т.3 / А. Эйнштейн. — М., 1966.— С. 92–107 (Ann. Phys. 17 (1905), P. 132–148).
5. Эйнштейн А. К теории возникновения и поглощения света // Собрание научных трудов. Т.3 / А. Эйнштейн. — М., 1966.— С. 128–133 (Ann. Phys. 20 (1906), P. 199–206.)
6. Планк М. Законы теплового излучения и гипотеза элементарного кванта действия // (Доклад на Первом Сольвеевском конгрессе по физике, Брюссель, 1911 г.) М. Планк // М. Планк. Избранные труды. — М., 1975.— С. 282–310.
7. Пуанкаре А. О теории квантов // А. Пуанкаре. Избранные труды / А. Пуанкаре. — М., 1974. — Т.3. — С. 516–520 (Comptes Rendus 153 (1911), P. 1103–1108)

*P. Holod*

### WHO WAS THE FIRST SUGGESTING THE IDEA OF LIGHT QUANTUMS

*M. Planck's and A. Einstein's views to the problem of quantization of the electromagnetic radiation are investigated. The investigation proves that Planck is who was the first considering the light as a collection of quanta, he used this hypothesis when derived the formula for the energy spectral density of heat radiation (Planck formula).*

**Keywords:** heat radiation, Planck formula, light quanta.

Матеріал надійшов 22.03.2012