МАТЕМАТИКА

УДК 512.54

Вавдіюк Д. О.

АБЕЛЕВІ ДВОПОРОДЖЕНІ САМОПОДІБНІ ГРУПИ

Встановлено критерій, коли двопороджена самоподібна група автоморфізмів регулярного бінарного кореневого дерева є абелевою. У випадку, коли така група є абелевою, в термінах її твірних визначено, якій з чотирьох груп $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}$ та $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ вона ізоморфна.

Ключові слова: абелеві групи, самоподібні групи, системи твірних.

Проблема класифікації є однією з ключових і разом з тим громіздких при вивченні самоподібних груп. У попередніх роботах для дослідження виділявся, як правило, якийсь окремий природний клас таких груп. Так, наприклад, у [1] розглядався клас груп, породжених двостановими автоматами над бінарним алфавітом.

Цю роботу присвячено двопородженим самоподібним групам автоморфізмів бінарного кореневого дерева. Теорема 20 встановлює критерій абелевості для таких груп залежно від станів її твірних елементів (див. також [2]). Твердження 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 13, 14, 15, 18, 19 формують повний набір необхідних і достатніх умов, що дозволяють визначити, якій з можливих абелевих груп вони ізоморфні. Зокрема, твердження 3, 5, 8, 13, 14 включають умови для неабелевих груп, твердження 4 є критерієм для циклічної групи порядку 2, твердження 6 є критерієм для четверної групи Клейна, твердження 12, 15, 18 включають умови для нескінченної циклічної групи, а твердження 10 та 19 включають умови для декартового добутку двох нескінченних циклічних груп.

Нехай T_d $(d \geq 2)$ — d-арне кореневе дерево. Зафіксуємо для нього нумерацію вершин, що з'єднані з коренем. Тоді довільний автоморфізм g кореневого дерева T_d можна представити таким чином:

$$g = (g_1, \ldots, g_d)\pi_g, \tag{1}$$

де $g_1, \ldots, g_d$ — автоморфізми кореневого дерева T_d, π_g — підстановка з симетричної групи S_d. Таке представлення називається *вінцевою рекурсією*.

Усі автоморфізми відносно дії суперпозиції утворюють групу, що називається *групою автоморфізмів кореневого дерева* T_d і позначається $\mathrm{Aut}\, T_d$. Множення в такій групі визначається таким чином. Нехай $g, h \in \mathrm{Aut}\, T_d$, тобто:

$$g = (g_1, \ldots, g_d)\pi_g, \quad h = (h_1, \ldots, h_d)\pi_h,$$

тоді їх добутком буде елемент:

$$g \cdot h = (g_1 \cdot h_{\pi_g(1)}, \ldots, g_d \cdot h_{\pi_g(d)})(\pi_g \cdot \pi_h). \tag{2}$$

Автоморфізми $g_1, \ldots, g_d$ у представленні (1) називаються *станами першого рівня автоморфізму g*. *Станами n-го рівня автоморфізму g* називаються стани першого рівня станів $(n-1)$-го рівня автоморфізму g, де $n \geq 2$.

Підгрупа $G < \mathrm{Aut}\, T_d$ називається *самоподібною* [1; 3], якщо всі стани довільного автоморфізму з цієї підгрупи також до неї належать.

Далі розглядаємо лише групи $G = \langle a, b \rangle$, що є підгрупами $\mathrm{Aut}\, T_2$. Такі групи називаються *двопородженими самоподібними групами над бінарним алфавітом*. Твірні таких груп можна представити як:

$$\begin{aligned} a &= (a_0, a_1)\sigma, \\ b &= (b_0, b_1), \end{aligned} \tag{3}$$

де $a_0, a_1, b_0, b_1 \in G$, $\sigma = (01)$.

Нехай F — вільна група рангу 2 з базою $\{a, b\}$. Кожний елемент w цієї групи можна єдиним чином записати у вигляді редукованого слова, тобто:

$$w = a^{p_{a,1}} b^{p_{b,1}} \cdots a^{p_{a,m}} b^{p_{b,m}}, \tag{4}$$

де $m \in \mathbb{N}$, $p_{a,2}, \ldots, p_{a,m}, p_{b,1}, \ldots, p_{b,m-1} \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ та $p_{a,1}, p_{b,m} \in \mathbb{Z}$. Довільний елемент групи G можна розглядати як значення деякого редукованого слова w від її твірних.

Означення 1. *Кількістю входжень твірного* $h \in \{a, b\}$ *у елемент* $g \in G$ назвемо число:

$$r_h(g) = p_{h,1} + \ldots + p_{h,m}.$$

Якщо G — абелева, то її твірні можна переписати таким чином:

$$\begin{aligned} a &= \left(a^{r_a(a_0)} b^{r_b(a_0)}, a^{r_a(a_1)} b^{r_b(a_1)}\right)\sigma, \\ b &= \left(a^{r_a(b_0)} b^{r_b(b_0)}, a^{r_a(b_1)} b^{r_b(b_1)}\right). \end{aligned} \tag{5}$$

Нехай n_h — порядок елемента h в групі G, $h \in \{a, b\}$. За цих умов мають місце такі твердження:

Лема 1. $n_a = 2$ *або* $n_a = \infty$.

Доведення. Нехай $n_a \neq 2$ і $n_a \neq \infty$, тоді n_a — непарне, оскільки a має σ. Тобто $n_a = 2k$, де $k > 1$, тоді:

$$a^{2k} = \left((a_0 a_1)^k, (a_1 a_0)^k\right) = 1.$$

З обох проекцій отримаємо:

$$a^{k \cdot r_a(a_0 a_1)} b^{k \cdot r_b(a_0 a_1)} = 1.$$

Можливі два випадки:
1) Якщо $r_a(a_0 a_1)$ *— парне, тоді:*

$$b^{k \cdot r_b(a_0 a_1)} = 1.$$

Обмеження будуть виглядати таким чином:

$$a^{k \cdot r_b(a_0 a_1) \cdot r_a(b_0)} = 1,$$

$$a^{k \cdot r_b(a_0 a_1) \cdot r_a(b_1)} = 1.$$

Тоді повинні виконуватись дві такі умови:

$$r_b(a_0 a_1) \cdot r_a(b_0) \text{ — парне;}$$

$$r_b(a_0 a_1) \cdot r_a(b_1) \text{ — парне.}$$

Розглянемо елемент $g \in G$, $g = a^{r_a(g)} b^{r_b(g)}$. У проекціях він буде мати:

$$g = (a^{p_{a,0}} b^{p_{b,0}}, a^{p_{a,1}} b^{p_{b,1}}),$$

де

$$p_{a,0} = \frac{r_a(g) r_a(a_0 a_1)}{2} + r_b(g) r_a(b_0),$$

$$p_{b,0} = \frac{r_a(g) r_b(a_0 a_1)}{2} + r_b(g) r_b(b_0),$$

$$p_{a,1} = \frac{r_a(g) r_a(a_1 a_0)}{2} + r_b(g) r_a(b_1),$$

$$p_{b,1} = \frac{r_a(g) r_b(a_1 a_0)}{2} + r_b(g) r_b(b_1).$$

Знову можливі два випадки:
1.1) Якщо $r_b(a_0 a_1)$ *— непарне, то* $r_a(b_0)$ *і* $r_a(b_1)$ *— парні. Нехай* $r_a(g)$ *— парне, тоді* $p_{a,0}$ *і* $p_{a,1}$ *— парні. Це також означає, що будь-яка проекція* g *не має* σ*, отже,* $g = 1$*. Оскільки* a^2 *підходить під умови* g*, то* $a^2 = 1$*, причому* $a \neq 1$*, отже,* $n_a = 2$*, що суперечить початковому припущенню.*
1.2) Якщо $r_b(a_0 a_1)$ *— парне. Нехай* $r_a(g)$ *і* $r_b(g)$ *— парні, тоді* $p_{a,0}$*,* $p_{b,0}$*,* $p_{a,1}$ *і* $p_{b,1}$ *— парні. Це також означає, що будь-яка проекція* g *не має* σ*, отже,* $g = 1$*. Оскільки* a^2 *підходить під умови* g*, то* $a^2 = 1$*, причому* $a \neq 1$*, отже,* $n_a = 2$*, що суперечить початковому припущенню.*
2) Якщо $r_a(a_0 a_1)$ *— непарне, тоді доведемо, що:*

$$a^{k \cdot r_a(a_0 a_1)} b^{k \cdot r_b(a_0 a_1)} \neq 1.$$

Будь-яке число можна розкласти на добуток двох цілих чисел: найбільшого степеня двійки, на який воно ділиться, і непарного числа. Доведемо більш сильне твердження

$$a^{2^n (2m+1)} b^{2^n l} \neq 1. \tag{6}$$

Доведемо (6) індукцією за n.
База індукції: $n = 0$.

$$a^{2m+1} b^l \neq 1.$$

Виконується, оскільки $2m + 1$ — непарне.
Припустимо, що виконується для всіх від 0 *до* n*.*
Доведемо, що виконується для $n + 1$*, тобто:*

$$a^{2^{n+1} (2m+1)} b^{2^{n+1} l} \neq 1.$$

У проекціях будемо мати:

$$(a^{p_{a,0}} b^{p_{b,0}}, a^{p_{a,1}} b^{p_{b,1}}),$$

де

$$p_{a,0} = 2^n ((2m + 1) \cdot r_a(a_0 a_1) + 2l \cdot r_a(b_0)),$$

$$p_{b,0} = 2^n ((2m + 1) \cdot r_b(a_0 a_1) + 2l \cdot r_b(b_0)),$$

$$p_{a,1} = 2^n ((2m + 1) \cdot r_a(a_1 a_0) + 2l \cdot r_a(b_1)),$$

$$p_{b,1} = 2^n ((2m + 1) \cdot r_b(a_1 a_0) + 2l \cdot r_b(b_1)).$$

Отже, за припущенням індукції $a^{p_{a,0}} b^{p_{b,0}} \neq 1$ та $a^{p_{a,1}} b^{p_{b,1}} \neq 1$, а тому і початкове твердження справедливе.

Лема 2. $n_b = 1$ *або* $n_b = n_a$.

Доведення. З попереднього твердження $n_a = 2$ або $n_a = \infty$. Розглянемо два випадки:
1) Якщо $n_a = 2$*, то:*

$$b^2 = \left(a^{2 r_a(b_0)} b^{2 r_b(b_0)}, a^{2 r_a(b_1)} b^{2 r_b(b_1)}\right),$$

$$b^2 = \left(b^{2 r_b(b_0)}, b^{2 r_b(b_1)}\right) = 1.$$

Отже, $n_b = 1$ або $n_b = 2$.
2) Якщо $n_a = \infty$*, то нехай* $n_b = k$*, де* $k > 1$*. Тоді будемо мати:*

$$b^k = \left(a^{k \cdot r_a(b_0)} b^{k \cdot r_b(b_0)}, a^{k \cdot r_a(b_1)} b^{k \cdot r_b(b_1)}\right),$$

$$b^k = \left(a^{k \cdot r_a(b_0)}, a^{k \cdot r_a(b_1)}\right).$$

Оскільки $n_a = \infty$, то $r_a(b_0) = r_a(b_1) = 0$. Тоді $n_b = 1$ і маємо суперечність.

Твердження 3. *Якщо число $r_a(b_0b_1)$ — непарне, то G — не абелева.*

Доведення. Нехай це не так, тоді $ab = ba$, тобто:

$$(a_0b_1, a_1b_0)\sigma = ab = ba = (b_0a_0, b_1a_1)\sigma,$$

звідки $a_0b_1 = b_0a_0$, тобто $b_0b_1^{-1} = 1$. З іншого боку, якщо $r_a(b_0b_1)$ — непарна, то і $r_a(b_0b_1^{-1})$ — непарна, тому $b_0b_1^{-1} \neq 1$. Отже, маємо суперечність.

Твердження 4. *Число $r_a(a_0a_1)$ — парне, число $r_a(b_0)$ — парне, число $r_a(b_1)$ — парне тоді і лише тоді, коли $G \simeq \mathbb{Z}_2$.*

Доведення. Необхідність. Якщо $G \simeq \mathbb{Z}_2$, то $a^2 = 1$ та $b = 1$, і тоді:

$$a^2 = (a_0a_1, a_1a_0) = 1,$$
$$b = (b_0, b_1) = 1.$$

Визначивши кількість входжень твірних у проекції, отримаємо:

$$r_a(a_0a_1) \bmod 2 = r_a(a_1a_0) \bmod 2 = 0,$$
$$r_b(a_0a_1) \bmod 1 = r_b(a_1a_0) \bmod 1 = 0,$$
$$r_a(b_0) \bmod 2 = r_a(b_1) \bmod 2 = 0,$$
$$r_b(b_0) \bmod 1 = r_b(b_1) \bmod 1 = 0,$$

отже, всі пункти твердження виконуються.

Достатність. Нехай виконуються умови. Візьмемо елемент $g \in G$, такий, що $r_a(g)$ — парна, і покажемо, що тоді $r_a(g|_0), r_a(g|_1)$ — парні. Нехай g визначено (4), тоді для будь-якого $i = 1, \ldots, m$ визначимо:

$$g_i = a^{s_i} b^{p_{b,i}} a^{-s_i},$$
$$s_i = p_{a,1} + \ldots + p_{a,i}$$

і зазначимо, що кожен g_i не має σ. Отримаємо, що:

$$g = g_1 \cdot \ldots \cdot g_m \cdot a^{r_a(g)}.$$

Тоді:

$$g|_i = g_1|_i \cdot \ldots \cdot g_m|_i \cdot a^{r_a(g)}|_i, \quad i = 0, 1$$

$$r_a(g|_0) = \sum_{i=1}^{m} p_{b,i} r_a(b|_{s_i \bmod 2}) + \frac{r_a(g)}{2} r_a(a_0a_1)$$

$$r_a(g|_0) \bmod 2 = 0,$$

$$r_a(g|_1) = \sum_{i=1}^{m} p_{b,i} r_a(b|_{1-s_i \bmod 2}) + \frac{r_a(g)}{2} r_a(a_1a_0)$$

$$r_a(g|_1) \bmod 2 = 0.$$

Отже, $g = 1$, а тоді $a^2 = 1$ та $b = 1$.

Твердження 5. *Якщо число $r_a(a_0a_1)$ — парне, число $r_a(b_0)$ — непарне, число $r_a(b_1)$ — непарне, число $r_b(a_0a_1)$ — парне, число $r_b(b_0b_1)$ — непарне, то G — не абелева.*

Доведення. Нехай це не так, тоді $ab = ba$, тобто:

$$(a_0b_1, a_1b_0)\sigma = ab = ba = (b_0a_0, b_1a_1)\sigma,$$

звідки $a_0b_1 = b_0a_0$, тобто $b_0b_1^{-1} = 1$. Тоді $b_0b_1^{-1}|_0 = 1$, але:

$$r_a(b_0b_1^{-1}|_0) = \underbrace{\frac{\overbrace{r_a(a_0a_1)}^{\text{парна}} \cdot (\overbrace{r_a(b_0)}^{\text{непарна}} - \overbrace{r_a(b_1)}^{\text{непарна}})}{2}}_{\text{парна}} +$$

$$+ \underbrace{\overbrace{r_a(b_0)}^{\text{непарна}} \cdot \overbrace{(r_b(b_0) - r_a(b_1))}^{\text{непарна}}}_{\text{непарна}} \text{ — непарна.}$$

Отже, $b_0b_1^{-1}|_0 \neq 1$, тому маємо суперечність.

Твердження 6. *Число $r_a(a_0a_1)$ — парне, число $r_a(b_0)$ — непарне, число $r_a(b_1)$ — непарне, число $r_b(a_0a_1)$ — парне, число $r_b(b_0b_1)$ — парне тоді і лише тоді, коли $G \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.*

Доведення. Необхідність. Якщо $G \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, то $a^2 = 1$, $b^2 = 1$ та $(ab)^2 = 1$, і тоді:

$$a^2 = (a_0a_1, a_1a_0) = 1.$$

Визначивши кількість входжень твірних у проекції, отримаємо:

$$r_a(a_0a_1) \bmod 2 = r_a(a_1a_0) \bmod 2 = 0,$$
$$r_b(a_0a_1) \bmod 2 = r_b(a_1a_0) \bmod 2 = 0.$$

Також з першого випливає, що:

$$r_a(b_0) \bmod 2 = r_a(b_1) \bmod 2 = 1,$$

оскільки інакше група або не є абелевою (за твердженням 3), або ізоморфна $\mathbb{Z}_2$ (за твердженням 4). Крім того, $ab = ba$, а тому:

$$(a_0b_1, a_1b_0)\sigma = (b_0a_0, b_1a_1)\sigma,$$
$$r_b(b_0) \bmod 2 = r_b(b_1) \bmod 2,$$
$$r_b(b_0b_1) \bmod 2 = 0,$$

отже, всі пункти твердження виконуються.

Достатність. Нехай виконуються умови. Візьмемо елемент $g \in G$, такий, що $r_a(g)$ та $r_b(g)$ — парні, і покажемо, що тоді $r_a(g|_0)$, $r_a(g|_1)$, $r_b(g|_0)$ та $r_b(g|_1)$ — парні. Нехай g визначено (4), тоді для будь-якого $i = 1, \ldots, m$ визначимо:

$$g_i = a^{s_i} b^{p_{b,i}} a^{-s_i},$$
$$s_i = p_{a,1} + \ldots + p_{a,i}$$

і зазначимо, що кожен g_i не має σ. Отримаємо, що:

$$g = g_1 \cdot \ldots \cdot g_m \cdot a^{r_a(g)}.$$

Тоді:

$$g|_i = g_1|_i \cdot \ldots \cdot g_m|_i \cdot a^{r_a(g)}|_i, \quad i = 0, 1$$

$$r_a(g|_0) = \sum_{i=1}^{m} p_{b,i} r_a(b|_{s_i \bmod 2}) + \frac{r_a(g)}{2} r_a(a_0a_1)$$

$$r_a(g|_0) \bmod 2 = \sum_{i=1}^{m} p_{b,i} \bmod 2 = 0,$$

$$r_a(g|_1) = \sum_{i=1}^{m} p_{b,i} r_a(b|_{1-s_i \bmod 2}) + \frac{r_a(g)}{2} r_a(a_1a_0)$$

$$r_a(g|_1) \bmod 2 = \sum_{i=1}^{m} p_{b,i} \bmod 2 = 0,$$

$$r_b(g|_0) = \sum_{i=1}^{m} p_{b,i} r_b(b|_{s_i \bmod 2}) + \frac{r_a(g)}{2} r_b(a_0a_1)$$

$$r_b(g|_0) \bmod 2 = r_a(b_k) \sum_{i=1}^{m} p_{b,i} \bmod 2 = 0, \quad k = 0, 1,$$

$$r_b(g|_1) = \sum_{i=1}^{m} p_{b,i} r_b(b|_{1-s_i \bmod 2}) + \frac{r_a(g)}{2} r_b(a_1a_0)$$

$$r_b(g|_1) \bmod 2 = r_a(b_k) \sum_{i=1}^{m} p_{b,i} \bmod 2 = 0, \quad k = 0, 1.$$

Отже, $g = 1$, а тоді $a^2 = 1$, $b^2 = 1$ та $(ab)^2 = 1$.

Лема 7. *Якщо G — абелева і число $r_a(a_0a_1)$ — парне, число $r_a(b_0)$ — непарне, число $r_a(b_1)$ — непарне, число $r_b(a_0a_1)$ — непарне, то кожний нетривіальний елемент групи має нескінченний порядок.*

Доведення. Для цього доведемо, що кожний елемент $g \in G$ — нетривіальний, якщо $r_a(g) \neq 0$ або $r_b(g) \neq 0$. Доведення розділимо на три частини.
I. $r_a(g) \neq 0$ і $r_b(g) \neq 0$.
У цьому випадку g можна представити у вигляді:

$$g = a^{2^{k_a}(2q_a+1)} b^{2^{k_b}(2q_b+1)},$$

де $k_a, k_b \in \mathbb{N}_0$, $q_a, q_b \in \mathbb{Z}$.

Доведемо індукцією за k_a, що $g \neq 1$.
База індукції: $k_a = 0$.

$$g = a^{2q_a+1} b^{2^{k_b}(2q_b+1)} \neq 1,$$

оскільки g має σ.
Індуктивна гіпотеза:

$$g = a^{2^k(2q_a+1)} b^{2^{k_b}(2q_b+1)} \neq 1,$$

для всіх $0 \leq k \leq k_a$.
Індуктивний крок:

$$g = a^{2^{k_a+1}(2q_a+1)} b^{2^{k_b}(2q_b+1)},$$

$$g|_0 = (a_0a_1)^{2^{k_a}(2q_a+1)} b_0^{2^{k_b}(2q_b+1)} = a^{\alpha_0} b^{\beta_0},$$

де

$$\alpha_0 = 2^{k_a} \underbrace{(2q_a+1) r_a(a_0a_1)}_{\alpha_{a,0} \text{ — парне}} + 2^{k_b} \underbrace{(2q_b+1) r_a(b_0)}_{\alpha_{b,0} \text{ — непарне}},$$

$$\beta_0 = 2^{k_a} \underbrace{(2q_a+1) r_b(a_0a_1)}_{\beta_{a,0} \text{ — непарне}} + 2^{k_b} \underbrace{(2q_b+1) r_b(b_0)}_{\beta_{b,0}}.$$

Розглянемо два випадки:
1) $k_b \leq k_a$, тоді:

$$\alpha_0 = 2^{k_b}(2^{k_a-k_b}\alpha_{a,0} + \alpha_{b,0}) = 2^{k_b}(2q+1).$$

Оскільки $k_b \leq k_a < k_a + 1$, то за індуктивною гіпотезою $g|_0 \neq 1$, тоді і $g \neq 1$.
2) $k_b > k_a$, тоді:

$$\alpha_0 = 2^{k_a+1}\Big(\frac{\alpha_{a,0}}{2} + 2^{k_b-k_a-1}\alpha_{b,0}\Big).$$

Оскільки степінь двійки не зменшився і не можна застосувати індуктивну гіпотезу, то розглянемо таку проекцію:

$$g|_{00} = (a_0a_1)^{\frac{\alpha_0}{2}} b_0^{\beta_0} = a^{\alpha_{00}} b^{\beta_{00}},$$

де

$$\alpha_{00} = r_a(a_0a_1)\frac{\alpha_0}{2} + r_a(b_0)\beta_0,$$

$$\beta_{00} = r_b(a_0a_1)\frac{\alpha_0}{2} + r_b(b_0)\beta_0.$$

Розглянемо $\frac{\alpha_{00}}{2^{k_a}}$:

$$\frac{\alpha_{00}}{2^{k_a}} = \underbrace{\overbrace{r_a(a_0a_1)}^{\text{парне}} \overbrace{\Big(\frac{\alpha_{a,0}}{2} + 2^{k_b-k_a-1}\alpha_{b,0}\Big)}^{\text{ціле}}}_{\text{парне}} +$$

$$+ \underbrace{\overbrace{r_a(b_0)}^{\text{непарне}}(\overbrace{\beta_{a,0}}^{\text{непарне}} + \overbrace{2^{k_b-k_a}\beta_{b,0})}^{\text{парне}}}_{\text{непарне}} \text{ — непарне.}$$

Отже, $\alpha_{00} = 2^{k_a}(2q+1)$, а тому за індуктивною гіпотезою $g|_{00} \neq 1$, звідки $g \neq 1$.

Першу частину доведено.
II. $r_a(g) = 0$ і $r_b(g) \neq 0$.
У цьому випадку g можна представити у вигляді:

$$g = b^{2^{k_b}(2q_b+1)},$$

де $k_b \in \mathbb{N}_0$, $q_b \in \mathbb{Z}$.

Доведемо індукцією за k_b, що $g \neq 1$.
База індукції: $k_b = 0$.

$$g = b^{2q_b+1} \neq 1,$$

оскільки $g|_0$ має σ:

$$g|_0 = b_0^{2q_b+1} = a^{\alpha_0} b^{\beta_0},$$

де

$$\alpha_0 = r_a(b_0)(2q_b + 1) \text{ — непарне},$$
$$\beta_0 = r_b(b_0)(2q_b + 1).$$

Індуктивна гіпотеза:

$$g = b^{2^k(2q_b+1)} \neq 1,$$

для всіх $0 \leq k \leq k_b$.
Індуктивний крок:

$$g = b^{2^{k_b+1}(2q_b+1)},$$

$$g|_0 = b_0^{2^{k_b+1}(2q_b+1)} = a^{\alpha_0} b^{\beta_0},$$

де

$$\alpha_0 = r_a(b_0) 2^{k_b+1}(2q_b + 1),$$
$$\beta_0 = r_b(b_0) 2^{k_b+1}(2q_b + 1).$$

Розглянемо два випадки:
1) $r_b(b_0) \neq 0$, *тоді:*
З **I** випливає, що $g|_0 \neq 1$, а отже, і $g \neq 1$.
2) $r_b(b_0) = 0$, *тоді:*

$$g|_0 = a^{\alpha_0}.$$

Розглянемо таку проекцію:

$$g|_{00} = (a_0 a_1)^{\frac{\alpha_0}{2}} = a^{\alpha_{00}} b^{\beta_{00}},$$

де

$$\alpha_{00} = r_a(a_0a_1)\frac{\alpha_0}{2} = 2^{k_b} \underbrace{\overbrace{r_a(a_0a_1)}^{\text{парне}}\overbrace{r_a(b_0)}^{\text{непарне}}\overbrace{(2q_b+1)}^{\text{непарне}}}_{\text{парне}},$$

$$\beta_{00} = r_b(a_0a_1)\frac{\alpha_0}{2} = 2^{k_b} \underbrace{\overbrace{r_b(a_0a_1)}^{\text{непарне}}\overbrace{r_a(b_0)}^{\text{непарне}}\overbrace{(2q_b+1)}^{\text{непарне}}}_{\text{непарне}}.$$

Знову можливі два випадки:
a) $r_a(a_0a_1) \neq 0$, *тоді:*
З **I** випливає, що $g|_{00} \neq 1$, а отже, і $g \neq 1$.
b) $r_a(a_0a_1) = 0$, *тоді:*

$$g|_{00} = b^{\beta_{00}} = b^{2^{k_b}(2q+1)}.$$

За індуктивною гіпотезою $g|_{00} \neq 1$, звідки $g \neq 1$.

Другу частину доведено.

III. $r_a(g) \neq 0$ і $r_b(g) = 0$.
У цьому випадку g можна представити у вигляді:

$$g = a^{2^{k_a}(2q_a+1)},$$

де $k_a \in \mathbb{N}_0$, $q_a \in \mathbb{Z}$.
Розглянемо два випадки:
1) $k_a = 0$, *тоді:*

$$g = a^{2q_a+1} \neq 1,$$

оскільки g має σ.
2) $k_a > 0$, *тоді:*

$$g|_0 = (a_0a_1)^{2^{k_a-1}(2q_a+1)} = a^{\alpha_0} b^{\beta_0},$$

де

$$\alpha_0 = r_a(a_0a_1) 2^{k_a-1}(2q_a + 1),$$

$$\beta_0 = r_b(a_0a_1) 2^{k_a-1}(2q_a + 1).$$

Знову можливі два випадки:
a) $r_a(a_0a_1) \neq 0$, *тоді:*
З **I** випливає, що $g|_0 \neq 1$, а отже, і $g \neq 1$.
b) $r_a(a_0a_1) = 0$, *тоді:*
З **II** випливає, що $g|_0 \neq 1$, а отже, і $g \neq 1$.

Третю частину і твердження доведено.

Твердження 8. *Якщо число* $r_a(a_0a_1)$ *— парне, число* $r_a(b_0)$ *— непарне, число* $r_a(b_1)$ *— непарне,* $r_b(a_0a_1)$ *— непарне і* $r_a(b_0) \neq r_a(b_1)$ *або* $r_b(b_0) \neq r_b(b_1)$*, то* G *— не абелева.*

Доведення. Нехай це не так, тоді з леми 7 випливає, що кожний нетривіальний елемент групи має нескінченний порядок і $ab = ba$, тобто:

$$(a_0b_1, a_1b_0)\sigma = ab = ba = (b_0a_0, b_1a_1)\sigma,$$

звідки $a_0b_1 = b_0a_0$, тобто $b_0b_1^{-1} = 1$. Тоді $b_0b_1^{-1}|_0 = 1$, звідки:

$$a^{r_a(b_0)-r_a(b_1)} b^{r_b(b_0)-r_b(b_1)} = 1.$$

Оскільки $r_a(b_0) \neq r_a(b_1)$ або $r_b(b_0) \neq r_b(b_1)$, то це не так. Отже, прийшли до суперечності, тому G — не абелева.

Означення 2. Нехай твірний $h \in \{a, b\}$ має порядок n_h. Два довільні елементи $g_1, g_2 \in G$ мають *рівну* кількість входжень твірного h, якщо:

$$\begin{aligned} &r_h(g_1) = r_h(g_2), && \text{коли } n_h = \infty; \\ &r_h(g_1) \equiv r_h(g_2) \pmod{n_h}, && \text{інакше.} \end{aligned}$$

Лема 9. *Якщо* b_0 *та* b_1 *мають рівну кількість входжень* a *та* b*, то* G *— абелева.*

Доведення. Візьмемо довільний елемент $g \in [G, G]$ і покажемо, що $g|_0, g|_1 \in [G, G]$. Тобто, якщо $r_a(g) = r_b(g) = 0$, то і $r_a(g|_0) = r_a(g|_1) = r_b(g|_0) = r_b(g|_0) = 0$. Нехай g визначено (4), тоді для будь-якого $i = 1, \ldots, m$ визначимо:

$$g_i = a^{s_i} b^{p_{b,i}} a^{-s_i},$$
$$s_i = p_{a,1} + \ldots + p_{a,i}$$

і зазначимо, що кожен g_i не має σ. Отримаємо, що:

$$g = g_1 \cdot \ldots \cdot g_m a^{r_a(g)}.$$

Тоді для a:

$$r_a(g|_0) = r_a(g_1|_0) + \ldots + r_a(g_m|_0),$$
$$r_a(g|_0) = p_{b,1} r_a(b_0) + \ldots + p_{b,m} r_a(b_0),$$
$$r_a(g|_0) = r_a(g) r_a(b_0) = 0.$$
$$r_a(g|_1) = r_a(g_1|_1) + \ldots + r_a(g_m|_1),$$
$$r_a(g|_1) = p_{b,1} r_a(b_1) + \ldots + p_{b,m} r_a(b_1),$$
$$r_a(g|_1) = r_a(g) r_a(b_1) = 0.$$

Так само для b:

$$r_b(g|_0) = r_b(g_1|_0) + \ldots + r_b(g_m|_0),$$
$$r_b(g|_0) = p_{b,1} r_b(b_0) + \ldots + p_{b,m} r_b(b_0),$$
$$r_b(g|_0) = r_b(g) r_b(b_0) = 0.$$
$$r_b(g|_1) = r_b(g_1|_1) + \ldots + r_b(g_m|_1),$$
$$r_b(g|_1) = p_{b,1} r_b(b_1) + \ldots + p_{b,m} r_b(b_1),$$
$$r_b(g|_1) = r_b(g) r_b(b_1) = 0.$$

Звідки $[G, G]$ — тривіальний, а G — абелева.

Твердження 10. *Якщо число $r_a(a_0 a_1)$ — парне, числа $r_a(b_0) = r_a(b_1)$ — непарні, число $r_b(a_0 a_1)$ — непарне і $r_b(b_0) = r_b(b_1)$, то $G \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.*

Доведення. З леми 9 випливає, що G — абелева. Залишилося довести, що інших співвідношень, крім $g = 1$, де $g \in [G, G]$, у G немає.

Нехай це не так. Тоді існує $g = a^\alpha b^\beta = 1$, причому або $\alpha \neq 0$, або $\beta \neq 0$, оскільки $g \notin [G, G]$. Тоді з леми 7 випливає, що $g \neq 1$. Маємо суперечність, отже, G дійсно, інших співвідношень у G немає.

Лема 11. *Якщо число $r_a(a_0 a_1)$ — непарне і G — абелева, то $n_a = \infty$.*

Доведення. З леми 1 випливає, що або $n_a = 2$, або $n_a = \infty$. Нехай $n_a \neq \infty$, тоді $n_a = 2$, звідки:

$$a^2 = (a_0 a_1, a_1 a_0) = 1.$$

Тоді $a_0 a_1 = 1$, але $r_a(a_0 a_1)$ — непарне, тому $a_0 a_1$ має σ, отже, $a_0 a_1 \neq 1$. Маємо суперечність, тому $n_a = \infty$.

Твердження 12. *Якщо число $r_a(a_0 a_1)$ — непарне і числа $r_a(b_0) = r_a(b_1) = 0$, то $G \simeq \mathbb{Z}$.*

Доведення. З леми 11 випливає, що $n_a = \infty$. Доведемо, що $n_b = 1$. Для цього візьмемо довільний елемент g такий, що $r_a(g) = 0$, і покажемо, що в проекціях він має елементи з такою ж властивістю. Нехай g визначено (4), тоді для будь-якого $i = 1, \ldots, m$ визначимо:

$$g_i = a^{s_i} b^{p_{b,i}} a^{-s_i},$$
$$s_i = p_{a,1} + \ldots + p_{a,i}$$

і зазначимо, що кожен g_i не має σ. Отримаємо, що:

$$g = g_1 \cdot \ldots \cdot g_m a^{r_a(g)} = g_1 \cdot \ldots \cdot g_m.$$

Тоді:

$$g|_0 = g_1|_0 \cdot \ldots \cdot g_m|_0,$$
$$r_a(g|_0) = \sum_{i=1}^{m} r_a(g_i|_0) = \sum_{i=1}^{m} r_a(b_{s_i \bmod 2}^{p_{b,i}}) =$$
$$= \sum_{i=1}^{m} p_{b,i} \cdot r_a(b_{s_i \bmod 2}) = 0,$$
$$g|_1 = g_1|_1 \cdot \ldots \cdot g_m|_1,$$
$$r_a(g|_1) = \sum_{i=1}^{m} r_a(g_i|_1) = \sum_{i=1}^{m} r_a(b_{1-s_i \bmod 2}^{p_{b,i}}) =$$
$$= \sum_{i=1}^{m} p_{b,i} \cdot r_a(b_{1-s_i \bmod 2}) = 0.$$

Маємо, що в проекціях g кількість входжень a також нульова. Крім того, елементи з такою властивістю не мають σ. Отже, $g = 1$, а тому і $b = 1$, оскільки також задовольняє цю властивість. Тому $G \simeq \mathbb{Z}$.

Твердження 13. *Якщо число $r_a(a_0 a_1)$ — непарне, $r_a(b_0) = r_a(b_1) \neq 0$ і $r_b(b_0) \neq r_b(b_1)$, то G — не абелева.*

Доведення. Нехай це не так, тоді $ab = ba$, тобто:

$$(a_0 b_1, a_1 b_0)\sigma = ab = ba = (b_0 a_0, b_1 a_1)\sigma,$$

звідки $a_0 b_1 = b_0 a_0$, тобто $b_0 b_1^{-1} = 1$. Тоді:

$$b_0 b_1^{-1} = b^{r_b(b_0) - r_b(b_1)} = 1.$$

Тоді з леми 2 випливає, що $n_b = 1$, тобто $b = 1$. Тому $b_0 = 1$ та $b_1 = 1$, оскільки $r_a(b_0) = r_a(b_1) \neq 0$, то:

$$a^{r_a(b_0)} b^{r_b(b_0)} = 1,$$
$$\left(a^{r_a(b_0)} b^{r_b(b_0)}\right)^{r_b(b_0) - r_b(b_1)} = 1,$$
$$a^{r_a(b_0) \cdot (r_b(b_0) - r_b(b_1))} = 1.$$

З леми 11 випливає, що $n_a = \infty$, що суперечить останній рівності, отже, G — не абелева.

Твердження 14. *Якщо число $r_a(a_0a_1)$ — непарне, $r_a(b_0) \neq r_a(b_1)$ і $r_a(b_0) = r_a(b_1)$, то G — не абелева.*

Доведення. Нехай це не так, тоді $ab = ba$, тобто:

$$(a_0b_1, a_1b_0)\sigma = ab = ba = (b_0a_0, b_1a_1)\sigma,$$

звідки $a_0b_1 = b_0a_0$, тобто $b_0b_1^{-1} = 1$. Тоді:

$$b_0b_1^{-1} = a^{r_a(b_0)-r_a(b_1)} = 1.$$

З леми 11 випливає, що $n_a = \infty$, що суперечить останній рівності, отже, G — не абелева.

Наступні твердження будуть використовувати такі позначення:

$$\begin{aligned} d_a &= r_a(b_0) - r_a(b_1), \\ d_b &= r_b(b_0) - r_b(b_1), \end{aligned}$$

а також для $i = 0, 1$:

$$\begin{aligned} A_i(\alpha, \beta) &= \frac{r_a(a_0a_1)}{2} + \frac{\beta}{\alpha} \cdot r_a(b_i), \\ B_i(\alpha, \beta) &= \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{r_b(a_0a_1)}{2} + r_b(b_i), \\ D_i(\alpha, \beta) &= A_i(\alpha, \beta) - B_i(\alpha, \beta). \end{aligned}$$

Помітимо, що $D_0(d_a, d_b) - D_1(d_a, d_b) = 0$.

Твердження 15. *Якщо число $r_a(a_0a_1)$ — непарне, $r_a(b_0) \neq r_a(b_1)$, $r_a(b_0) \neq r_a(b_1)$, $\frac{d_a}{(d_a,d_b)}$ — парне і $D_0(d_a, d_b) = 0$, то $G \simeq \mathbb{Z}$.*

Доведення. Візьмемо довільний елемент g такий, що $\frac{r_a(g)}{d_a} = \frac{r_b(g)}{d_b}$, і покажемо, що в проекціях він має елементи з такою ж властивістю. Нехай g визначено (4), тоді для будь-якого $i = 1, \ldots, m$ визначимо:

$$\begin{aligned} g_i &= a^{s_i} b^{p_{b,i}} a^{-s_i}, \\ s_i &= p_{a,1} + \ldots + p_{a,i} \end{aligned}$$

і зазначимо, що кожен g_i не має σ. Отримаємо, що:

$$g = g_1 \cdot \ldots \cdot g_m a^{r_a(g)}.$$

Оскільки $\frac{d_a}{(d_a,d_b)}$ — парне, то $r_a(g)$ — парне. Нехай $k := \sum\limits_{i=1}^{m} p_{b,i} \cdot (s_i \bmod 2)$, тоді для $g|_0$:

$$g|_0 = g_1|_0 \cdot \ldots \cdot g_m|_0 \cdot (a_0a_1)^{\frac{1}{2} \cdot r_a(g)}$$

знайдемо кількість входжень a:

$$r_a(g|_0) = \frac{r_a(g) \cdot r_a(a_0a_1)}{2} + \sum_{i=1}^{m} r_a(g_i|_0) =$$

$$= \frac{r_a(g) \cdot r_a(a_0a_1)}{2} + \sum_{i=1}^{m} r_a(b^{p_{b,i}}_{s_i \bmod 2}) =$$

$$= \frac{r_a(g) \cdot r_a(a_0a_1)}{2} + \sum_{i=1}^{m} p_{b,i} \cdot r_a(b_{s_i \bmod 2}) =$$

$$= \frac{r_a(g) \cdot r_a(a_0a_1)}{2} + k \cdot r_a(b_1) + (r_b(g) - k) \cdot r_a(b_0) =$$

$$= \frac{r_a(g) \cdot r_a(a_0a_1)}{2} + r_b(g) \cdot r_a(b_0) - k \cdot d_a$$

і кількість входжень b:

$$r_b(g|_0) = \frac{r_a(g) \cdot r_b(a_0a_1)}{2} + \sum_{i=1}^{m} r_b(g_i|_0) =$$

$$= \frac{r_a(g) \cdot r_b(a_0a_1)}{2} + \sum_{i=1}^{m} r_b(b^{p_{b,i}}_{s_i \bmod 2}) =$$

$$= \frac{r_a(g) \cdot r_b(a_0a_1)}{2} + \sum_{i=1}^{m} p_{b,i} \cdot r_b(b_{s_i \bmod 2}) =$$

$$= \frac{r_a(g) \cdot r_b(a_0a_1)}{2} + k \cdot r_b(b_1) + (r_b(g) - k) \cdot r_b(b_0) =$$

$$= \frac{r_a(g) \cdot r_b(a_0a_1)}{2} + r_b(g) \cdot r_b(b_0) - k \cdot d_b.$$

Тепер покажемо, що $\frac{r_a(g|_0)}{d_a} - \frac{r_b(g|_0)}{d_b} = 0$:

$$\frac{r_a(g|_0)}{d_a} - \frac{r_b(g|_0)}{d_b} = \frac{r_a(g)}{d_a} \cdot \frac{r_a(a_0a_1)}{2} +$$

$$+ \frac{r_b(g) \cdot r_a(b_0)}{d_a} - \frac{r_a(g)}{d_b} \cdot \frac{r_b(a_0a_1)}{2} - \frac{r_b(g) \cdot r_b(b_0)}{d_b}.$$

Віднявши $\frac{r_a(g)}{d_a} \cdot D_0(d_a, d_b)$ і скоротивши цей вираз, отримаємо:

$$\frac{r_a(g|_0)}{d_a} - \frac{r_b(g|_0)}{d_b} =$$

$$= -\frac{d_b \cdot r_a(g) \cdot r_a(b_0)}{d_a^2} + \frac{r_b(g) \cdot r_a(b_0)}{d_a} =$$

$$= \frac{r_a(b_0)}{d_a \cdot d_b} \cdot \left(\frac{r_b(g)}{d_b} - \frac{r_a(g)}{d_a} \right) = 0.$$

Міркування для $g|_1$ аналогічні.

Оскільки для будь-якого $g \in [G, G]$ ця властивість виконується також і $r_a(g)$ — парне, то G — абелева. Крім того, G — циклічна і породжується елементом:

$$g = a^{p_a} b^{p_b}, \text{ де } (p_a, p_b) = 1,$$

$$p_a \cdot \frac{d_b}{(d_a, d_b)} - p_b \cdot \frac{d_a}{(d_a, d_b)} = 1.$$

Для перевірки достатньо показати, що $g^{\frac{d_b}{(d_a,d_b)}} = a$ та $g^{\frac{d_a}{(d_a,d_b)}} = b$. В обох випадках використаємо співвідношення $a^{\frac{d_a}{(d_a,d_b)}} b^{\frac{d_b}{(d_a,d_b)}} = 1$.

$$g^{\frac{d_b}{(d_a,d_b)}} = a^{p_a\cdot\frac{d_b}{(d_a,d_b)}} b^{p_b\cdot\frac{d_b}{(d_a,d_b)}} =$$
$$= a^{p_a\cdot\frac{d_b}{(d_a,d_b)} - p_b\cdot\frac{d_a}{(d_a,d_b)}} = a,$$
$$g^{\frac{d_a}{(d_a,d_b)}} = a^{p_a\cdot\frac{d_a}{(d_a,d_b)}} b^{p_b\cdot\frac{d_a}{(d_a,d_b)}} =$$
$$= b^{p_a\cdot\frac{d_b}{(d_a,d_b)} - p_b\cdot\frac{d_a}{(d_a,d_b)}} = b.$$

Лема 16. *Якщо число $r_a(a_0a_1)$ — непарне, G — абелева і $g = a^\alpha b^\beta$ такий, що $\frac{\alpha}{(\alpha,\beta)}$ — непарне, то $g \neq 1$.*

Доведення. Нехай:

$$\alpha = 2^{k_a}\cdot(2q_a+1), \quad \beta = 2^{k_b}\cdot(2q_b+1),$$
$$k_a, k_b \in \mathbb{N}\cup\{0\}, \quad q_a, q_b \in \mathbb{Z}, \quad k_a \leq k_b.$$

Індукцією за k_a покажемо, що всі такі елементи — нетривіальні.
База індукції: $k_a = 0$, звідки g має σ, отже, $g \neq 1$.
Індуктивна гіпотеза: нехай виконується для всіх $0 \leq k \leq k_a$.
Індуктивний крок:

$$g = a^{2^{k_a+1}\cdot(2q_a+1)} b^{2^{k_b}\cdot(2q_b+1)}, \quad k_a < k_b.$$

Тоді:

$$g|_0 = (a_0a_1)^{2^{k_a}\cdot(2q_a+1)} b_0^{2^{k_b}\cdot(2q_b+1)} = a^{\alpha_0} b^{\beta_0},$$

де

$$\alpha_0 = 2^{k_a}\cdot(2q_a+1)\cdot r_a(a_0a_1) + 2^{k_b}\cdot(2q_b+1)\cdot r_a(b_0).$$
$$\frac{\alpha_0}{2^{k_a}} = \underbrace{(2q_a+1)\cdot r_a(a_0a_1)}_{\text{непарне}} +$$
$$+ \underbrace{2^{k_b-k_a}\cdot(2q_b+1)\cdot r_a(b_0)}_{\text{парне}} = 2q_{a,0}+1.$$
$$\beta_0 = 2^{k_a}\cdot(2q_a+1)\cdot r_b(a_0a_1) + 2^{k_b}\cdot(2q_b+1)\cdot r_b(b_0) =$$
$$= 2^{k_{b_0}}\cdot(2q_{b,0}+1), \text{ де } k_a \leq k_{b,0}.$$

За індуктивною гіпотезою $g|_0 \neq 1$, а тому $g \neq 1$.

$$\alpha = 2^{k_a}\cdot(2q_a+1), \quad \beta = 2^{k_b}\cdot(2q_b+1),$$
$$k_a, k_b \in \mathbb{N}\cup\{0\}, \quad q_a, q_b \in \mathbb{Z}, \quad k_a \leq k_b.$$

Індукцією за k_a покажемо, що всі такі елементи — нетривіальні.
База індукції: $k_a = 0$, звідки g має σ, отже, $g \neq 1$.
Індуктивна гіпотеза: нехай виконується для всіх $0 \leq k \leq k_a$.
Індуктивний крок:

$$g = a^{2^{k_a+1}\cdot(2q_a+1)} b^{2^{k_b}\cdot(2q_b+1)}, \quad k_a < k_b.$$

Тоді:

$$g|_0 = (a_0a_1)^{2^{k_a}\cdot(2q_a+1)} b_0^{2^{k_b}\cdot(2q_b+1)} = a^{\alpha_0} b^{\beta_0},$$

де

$$\alpha_0 = 2^{k_a}\cdot(2q_a+1)\cdot r_a(a_0a_1) + 2^{k_b}\cdot(2q_b+1)\cdot r_a(b_0).$$
$$\frac{\alpha_0}{2^{k_a}} = \underbrace{(2q_a+1)\cdot r_a(a_0a_1)}_{\text{непарне}} +$$
$$+ \underbrace{2^{k_b-k_a}\cdot(2q_b+1)\cdot r_a(b_0)}_{\text{парне}} = 2q_{a,0}+1.$$
$$\beta_0 = 2^{k_a}\cdot(2q_a+1)\cdot r_b(a_0a_1) + 2^{k_b}\cdot(2q_b+1)\cdot r_b(b_0) =$$
$$= 2^{k_{b_0}}\cdot(2q_{b,0}+1), \text{ де } k_a \leq k_{b,0}.$$

За індуктивною гіпотезою $g|_0 \neq 1$, а тому $g \neq 1$. Крім того, помітимо, що для будь-якого $p \in \mathbb{N}$, $g^p \neq 1$, отже, такі елементи мають нескінченний порядок.

Твердження 17. *Якщо число $r_a(a_0a_1)$ — непарне, $r_a(b_0) \neq r_a(b_1)$, $r_a(b_0) \neq r_a(b_1)$ і або $\frac{d_a}{(d_a,d_b)}$ — непарне, або $D_0(d_a,d_b) \neq 0$, то G — не абелева.*

Доведення. Нехай це не так і G — абелева.
I. $\frac{d_a}{(d_a,d_b)}$ — непарне.
Оскільки G — абелева, то $ab = ba$, тобто:

$$(a_0b_1, a_1b_0)\sigma = ab = ba = (b_0a_0, b_1a_1)\sigma,$$

звідки $a_0b_1 = b_0a_0$, тобто $b_0b_1^{-1} = 1$. Але з леми 16 випливає, що $b_0b_1^{-1} = a^{d_a}b^{d_b} \neq 1$, оскільки $\frac{d_a}{(d_a,d_b)}$ — непарне, тому маємо суперечність.
II. $\frac{d_a}{(d_a,d_b)}$ — парне.
Тоді для $i = 0, 1$, $D_i(d_a,d_b) \neq 0$ і $ab = ba$, тобто:

$$(a_0b_1, a_1b_0)\sigma = ab = ba = (b_0a_0, b_1a_1)\sigma,$$

звідки $a_0b_1 = b_0a_0$, тобто $b_0b_1^{-1} = 1$. Тоді:

$$b_0b_1^{-1} = a^{d_a}b^{d_b} = 1.$$

Для будь-яких $i = 0, 1$ будемо мати:

$$r_a(g|_i) = \frac{d_a}{2}\cdot r_a(a_0a_1) + d_b\cdot r_a(b_i),$$
$$r_b(g|_i) = \frac{d_a}{2}\cdot r_b(a_0a_1) + d_b\cdot r_b(b_i).$$

Розглянемо чотири випадки:
1) $r_a(g|_0) \neq 0$ і $r_b(g|_0) \neq 0$.
З $D_0(d_a,d_b) \neq 0$ випливає, що $\frac{r_a(g|_0)}{d_a} \neq \frac{r_b(g|_0)}{d_b}$.
Нехай:

$$\alpha = d_a\cdot r_b(g|_0) - d_a\cdot r_a(g|_0) \neq 0.$$

Тоді $a^\alpha \neq 1$, що суперечить лемі 11.
2) $r_a(g|_0) \neq 0$ і $r_b(g|_0) = 0$.
Нехай:

$$\alpha = r_a(g|_0) \neq 0.$$

Тоді $a^\alpha \neq 1$, що суперечить лемі 11.
3) $r_a(g|_0) = 0$ і $r_b(g|_0) \neq 0$.
Нехай:

$$\alpha = d_a \cdot r_b(g|_0) \neq 0.$$

Тоді $a^\alpha \neq 1$, що суперечить лемі 11.
4) $r_a(g|_0) = 0$ і $r_b(g|_0) = 0$.
Тоді $r_a(g|_1) \neq 0$ і $r_b(g|_1) \neq 0$, а з $D_1(d_a, d_b) \neq 0$ випливає, що $\frac{r_a(g|_1)}{d_a} \neq \frac{r_b(g|_1)}{d_b}$. Нехай:

$$\alpha = d_a \cdot r_b(g|_1) - d_a \cdot r_a(g|_1) \neq 0.$$

Тоді $a^\alpha \neq 1$, що суперечить лемі 11.

Твердження 18. *Якщо число $r_a(a_0a_1)$ — непарне, $r_a(b_0) = r_a(b_1) \neq 0$, $r_a(b_0) = r_a(b_1)$ і існують такі α, β, що $\frac{\alpha}{(\alpha,\beta)}$ — парне і $D_0(\alpha, \beta) = 0$, тоді $G \simeq \mathbb{Z}$.*

Доведення. Оскільки $r_a(b_0) = r_a(b_1) \neq 0$ і $r_a(b_0) = r_a(b_1)$, то з леми 9 випливає, що G — абелева. Візьмемо довільний елемент g такий, що $\frac{r_a(g)}{\alpha} = \frac{r_b(g)}{\beta}$, і покажемо, що в проекціях він має елементи з такою ж властивістю:

$$g = a^{r_a(g)} b^{r_b(g)}.$$

Оскільки $\frac{\alpha}{(\alpha,\beta)}$ — парне, то $r_a(g)$ — парне. Для $g|_0$ будемо мати:

$$g|_0 = (a_0a_1)^{\frac{1}{2}\cdot r_a(g)} \cdot b_0^{r_b(g)}.$$

Знайдемо кількість входжень a:

$$r_a(g|_0) = \frac{r_a(g)}{2} \cdot r_a(a_0a_1) + r_b(g) \cdot r_a(b_0)$$

і кількість входжень b:

$$r_b(g|_0) = \frac{r_a(g)}{2} \cdot r_b(a_0a_1) + r_b(g) \cdot r_b(b_0).$$

Тепер покажемо, що $\frac{r_a(g|_0)}{\alpha} - \frac{r_b(g|_0)}{\beta} = 0$:

$$\frac{r_a(g|_0)}{\alpha} - \frac{r_b(g|_0)}{\beta} = \frac{r_a(g)}{\alpha} \cdot \frac{r_a(a_0a_1)}{2} +$$

$$+ \frac{r_b(g) \cdot r_a(b_0)}{\alpha} - \frac{r_a(g)}{\beta} \cdot \frac{r_b(a_0a_1)}{2} - \frac{r_b(g) \cdot r_b(b_0)}{\beta}.$$

Віднявши $\frac{r_a(g)}{\alpha} \cdot D_0(\alpha, \beta)$ і скоротивши цей вираз, отримаємо:

$$\frac{r_a(g|_0)}{\alpha} - \frac{r_b(g|_0)}{\beta} =$$

$$= -\frac{\beta \cdot r_a(g) \cdot r_a(b_0)}{\alpha^2} + \frac{r_b(g) \cdot r_a(b_0)}{\alpha} =$$

$$= \frac{r_a(b_0)}{\alpha \cdot \beta} \cdot \left(\frac{r_b(g)}{\beta} - \frac{r_a(g)}{\alpha} \right) = 0$$

Міркування для $g|_1$ аналогічні.

Оскільки $r_a(g)$ — парне, то $g = 1$. Тепер доведемо, що G — циклічна і породжується елементом:

$$g = a^{p_a} b^{p_b}, \text{ де } (p_a, p_b) = 1,$$

$$p_a \cdot \frac{\beta}{(\alpha, \beta)} - p_b \cdot \frac{\alpha}{(\alpha, \beta)} = 1.$$

Для перевірки достатньо показати, що $g^{\frac{\beta}{(\alpha,\beta)}} = a$ та $g^{\frac{\alpha}{(\alpha,\beta)}} = b$. В обох випадках використаємо співвідношення $a^{\frac{\alpha}{(\alpha,\beta)}} b^{\frac{\beta}{(\alpha,\beta)}} = 1$.

$$g^{\frac{\beta}{(\alpha,\beta)}} = a^{p_a \cdot \frac{\beta}{(\alpha,\beta)}} b^{p_b \cdot \frac{\beta}{(\alpha,\beta)}} =$$

$$= a^{p_a \cdot \frac{\beta}{(\alpha,\beta)} - p_b \cdot \frac{\alpha}{(\alpha,\beta)}} = a,$$

$$g^{\frac{\alpha}{(\alpha,\beta)}} = a^{p_a \cdot \frac{\alpha}{(\alpha,\beta)}} b^{p_b \cdot \frac{\alpha}{(\alpha,\beta)}} =$$

$$= b^{p_a \cdot \frac{\beta}{(\alpha,\beta)} - p_b \cdot \frac{\alpha}{(\alpha,\beta)}} = b.$$

Твердження 19. *Якщо число $r_a(a_0a_1)$ — непарне, $r_a(b_0) = r_a(b_1) \neq 0$, $r_a(b_0) = r_a(b_1)$ і не існує таких α, β, що $\frac{\alpha}{(\alpha,\beta)}$ — парне і $D_0(\alpha, \beta) = 0$, тоді $G \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.*

Доведення. Оскільки $r_a(b_0) = r_a(b_1) \neq 0$ і $r_a(b_0) = r_a(b_1)$, то з леми 9 випливає, що G — абелева. Якби G була б ізоморфна $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, то це було б рівносильно тому, що інших співвідношень, крім $g = 1$, де $g \in [G, G]$, немає. Нехай це не так. Тоді існує $g = a^{p_a} b^{p_b} = 1$, причому p_a — парне і або $p_a \neq 0$, або $p_b \neq 0$. Будемо мати:

$$g|_0 = (a_0a_1)^{\frac{p_a}{2}} b_0^{p_b} = a^{\alpha_0} b^{\beta_0},$$

де

$$\alpha_0 = \frac{p_a}{2} \cdot r_a(a_0a_1) + p_b \cdot r_a(b_0),$$

$$\beta_0 = \frac{p_a}{2} \cdot r_b(a_0a_1) + p_b \cdot r_b(b_0).$$

Розглянемо три випадки:
1) $p_a \neq 0$ *і* $p_b \neq 0$.

Якщо $\frac{p_a}{(p_a, p_b)}$ — непарне, то з леми 16 випливає, що $g \neq 1$, і маємо суперечність.

Якщо $\frac{p_a}{(p_a, p_b)}$ — парне, то:

$$D_0(p_a, p_b) = \frac{\alpha_0}{p_a} - \frac{\beta_0}{p_b} \neq 0$$

і тоді маємо два різних співвідношення:

$$a^{p_a} b^{p_b} = 1 \text{ і } a^{\alpha_0} b^{\beta_0} = 1,$$

з яких отримаємо таке:

$$a^{p_a \cdot \beta_0 - \alpha_0 \cdot p_b} = 1,$$

що суперечить лемі 11.

2) $p_a \neq 0$ *і* $p_b = 0$.

Тоді маємо співвідношення:

$$a^{p_a} = 1,$$

що суперечить лемі 11.

3) $p_a = 0$ *і* $p_b \neq 0$.

Якщо $r_b(b_0) \neq 0$, то маємо два різних співвідношення:

$$b^{p_b} = 1 \text{ і } a^{\alpha_0} b^{\beta_0} = 1,$$

з яких отримаємо таке:

$$a^{\alpha_0 \cdot p_b} = 1,$$

що суперечить лемі 11.

Якщо $r_b(b_0) = 0$, то маємо співвідношення:

$$a^{\alpha_0} = 1,$$

що суперечить лемі 11.

Довільна абелева двопороджена самоподібна група може бути однією з таких:

1. $n_a = 2$, $n_b = 1$, $G \simeq \mathbb{Z}_2$;
2. $n_a = 2$, $n_b = 1$, $G \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$;
3. $n_a = \infty$, $n_b = 1$, $G \simeq \mathbb{Z}$;
4. $n_a = \infty$, $n_b = \infty$, $G \simeq \mathbb{Z}$;
5. $n_a = \infty$, $n_b = \infty$, $G \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

У кінці сформулюємо критерій абелевості двопородженої самоподібної групи.

Теорема 20. *Група G абелева тоді й лише тоді, коли:*

1. *або b_0 та b_1 мають рівну кількість входжень a та b;*
2. *або:*

$$\frac{d_a}{(d_a, d_b)} \text{ — парне,}$$

$$D_i(d_a, d_b) = 0, \quad i = 0, 1.$$

Доведення. Теорема має місце, оскільки твердження 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 13, 14, 15, 18, 19 формують повний набір необхідних і достатніх умов.

Список літератури

1. Grigorchuk R. I. Automata, dynamical systems and groups / R. I. Grigorchuk, V. V. Nekrashevich, V. I. Sushchanskii // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. — 2000. — Vol. 231. — P. 128–203.
2. Nekrashevych V. Automorphisms of the binary tree: state-closed subgroups and dynamics of 1/2-endomorphisms / V. Nekrashevych, S. Sidki // Groups: Topological, Combinatorial and Arithmetic Aspects / Ed. by Müller. — Cambridge : Cambridge University Press, 2004. — Vol. 311 of LMS Lecture Notes Series. — P. 375–404.
3. Nekrashevych V. Self-similar groups / V. Nekrashevych. — Vienna, Chapman : Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005. — Vol. 117 of Mathematical Surveys and Monographs.

D. Vavdiyuk

ABELIAN TWO-GENERATED SELF-SIMILAR GROUPS

A criterion for a two-generated self-similar group of automorphisms of a regular binary rooted tree to be abelian is established. In case, when the group is abelian, in terms of its generators it is defined to which one of the four groups $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}$ and $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ it is isomorphic.

Keywords: abelian groups, self-similar groups, generating systems.

Матеріал надійшов 15.09.2014