УДК 517.956.4

Дрінь Я. М.

ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ РІВНОМІРНО ПАРАБОЛІЧНИХ СИСТЕМ ПСЕВДОДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Встановлено розв'язність задачі Коші та побудовано її класичний розв'язок для рівномірно параболічних за Петровським систем псевдодиференціальних рівнянь з негладкими символами.

Ключові слова: параболічна система, псевдодиференціальні рівняння, негладкі символи, фундаментальна матриця розв'язків, задача Коші.

Упродовж останніх кількох десятиліть інтенсивно розвивається теорія псевдодиференціальних операторів (ПДО) та рівнянь з такими операторами (ПДР). ПДО формально можна подати у вигляді $F^{-1}_{\sigma\to x}[a(t,x;\sigma)F_{x\to\sigma}]$, $\{x,\sigma\}\subset\mathbb{R}^n$, $t>0$, де a — функція (символ), що задовольняє певні умови, F, F^{-1} — пряме та обернене перетворення Фур'є. До вказаного класу належать диференціальні оператори, оператори дробового диференціювання та інтегрування, оператори згортки тощо. Поширення результатів класичної теорії диференціальних рівнянь на випадок рівнянь з ПДО та одержання нових результатів дає змогу використовувати такі рівняння при розв'язуванні складних і важливих задач аналізу та математичної фізики, математичному моделюванні різноманітних природничих процесів.

На сьогодні значних результатів досягнуто в теорії задачі Коші та крайових задач для псевдодиференціальних рівнянь та систем таких рівнянь. Це теорія еліптичних рівнянь у згортках у просторах Соболєва — Слободецького та її застосування до дослідження загальних мішаних задач у циліндричних областях для параболічних рівнянь і систем рівнянь із частинними похідними (М. С. Агранович, М. Й. Вишик, Г. І. Ескін); коректна розв'язність задачі Коші в просторах Соболєва та їх аналогах для ПДР з аналітичними символами в області $G\subset\mathbb{R}^n$ (Ю. А. Дубинський); теореми про розв'язність диференціально-операторних рівнянь у шкалі банахових просторів цілих експоненціального типу векторів оператора рівняння, які дозволяють довести розв'язність задачі Коші для ПДР з аналітичними символами (Я. В. Радино, С. Р. Умаров); теорія граничних значень розв'язків абстрактних диференціально-операторних рівнянь (М. Л. Горбачук, В. І. Горбачук та їхні послідовники); класи аналітичних на $\mathbb{R}^n$ символів псевдодиференціювання з характерними для степеневих функцій властивостями та теореми про коректну розв'язність задачі Коші для відповідних ПДР та систем рівнянь з початковими умовами в просторах Лебега (японські математики M. Nagase, R. Shinkai, C. Tsutsumi); класи єдиності задачі Коші для систем рівнянь у згортках, які є псевдодиференціальними системами з цілими аналітичними символами (Б. Г. Гуревич) та ін.

У теорії задачі Коші для параболічних псевдодиференціальних рівнянь (ППДР) з ПДО, побудованими за точково-негладкими однорідними символами, відомі результати про структуру та оцінки фундаментальних розв'язків задачі Коші (ФРЗК). За допомогою цих результатів одержується зображення розв'язку у вигляді інтеграла Пуассона, досліджені якісні властивості розв'язків ППДР та систем таких рівнянь (зокрема, поведінка розв'язків при необмеженому зростанні часової змінної, їх невід'ємність, теореми типу Ліувілля). Відзначимо при цьому, що асимптотика ФРЗК для таких рівнянь уже не є експоненціальною, як у випадку параболічних рівнянь з частинними похідними, а степеневою. Випадок однорідних символів має важливі застосування в теорії випадкових процесів, зокрема, при побудові розривних марковських процесів за твірними інтегродиференціальними операторами, які відносять до псевдодиференціальних операторів; у сучасній теорії фракталів, яка останнім часом бурхливо розвивається. Якщо символ ПДО не залежить від просторових координат, то задача Коші для ППДР коректно розв'язна в просторі узагальнених функцій типу розподілів, при цьому розв'язок подається у вигляді згортки ФРЗК з початковою узагальненою функцією. Ці результати є науковим надбанням низки вітчизняних та зарубіжних математиків, зокрема, С. Д. Ейдельмана і Я. М. Дріня (які першими визначили ППДО з негладкими символами і розпочали дослідження задачі Коші для відповідних ППДР), М. В. Федорюка, А. Н. Кочубея, В. В. Городецького, В. А. Літовченка та ін.

Постановка задачі

Розглянемо задачу Коші для системи псевдодиференціальних рівнянь (ПДР) вигляду

$$D_t^1 u(t,x) + (A_0 u)(t,x) + \\ + \sum_{k=1}^{m} (A_k u)(t,x) = f(t,x), \quad (1)$$

$$(t,x) \in \Pi_T \equiv \{(t,x) \mid 0 < t \le T, x \in \mathbb{R}^n\},$$

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2)$$

де A_k — матричний псевдодиференціальний оператор (ПДО) з символом $a_k : \overline{\Pi}_T \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \to \mathbb{C}_{pp}$, $0 \le k \le m$. Тут і далі через $\mathbb{C}_{pq}$ позначається сукупність усіх матриць розміру $p \times q$, елементами яких є комплексні числа, а через S^{n-1} — одинична сфера в $\mathbb{R}^n$.

Нехай виконуються такі умови:

1) елементи матриць $a_k : \overline{\Pi}_T \times S^{n-1} \to \mathbb{C}_{pp}$, $0 \le k \le m$, є неперервними, а також однорідними по σ функціями, де числа γ_k такі, що $0 \le \gamma_1 < \gamma_2 < \ldots < \gamma_m < \gamma_0$;

2) система (1) рівномірно параболічна в $\overline{\Pi}_T$, тобто μ — корені многочлена $\det(A_0(t,x,\sigma) - \mu E)$, де E — одинична матриця, задовольняють нерівність $\operatorname{Re}\mu(t,x,\sigma) \le -\delta|\sigma|^{\gamma_0}$ з деякою сталою $\delta > 0$ для всіх $(t,x) \in \overline{\Pi}_T$ і $\sigma \in \mathbb{R}^n$;

3) елементи матриць a_k, $0 \le k \le m$, мають $N \ge 2n + 2[\gamma_k] + 1$, де $[\gamma_k]$ — ціла частина числа γ_k, неперервних похідних по σ при $\sigma \ne 0$, для яких правильні оцінки

$$\|D_\sigma^\chi a_k(t,x,\sigma)\| \le C_N |\sigma|^{\gamma_k - |\chi|},$$

$$\|D_\sigma^\chi [a_k(t,x,\sigma) - a_k(\tau,y,\sigma)]\| \le \\ \le C_N(|x-y|^\lambda + |t-\tau|^{\frac{\lambda}{\gamma_k}})|\sigma|^{\gamma_k - |\chi|},$$

$$|\chi| \le N, \quad \{x,y\} \subset \mathbb{R}^n,$$

$$\{t,\tau\} \subset [0,T], \quad \lambda \in (0,1];$$

4) функція $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}_{p1}$ неперервна й обмежена;

5) функція $f : \overline{\Pi}_T \to \mathbb{C}_{p1}$ неперервна, обмежена і задовольняє умову Гельдера по x з показником $\alpha \in (0,1]$ рівномірно відносно $t \in [0,T]$.

Зазначимо, що символи ПДО є негладкими при $\sigma = 0$. Рівняння з такими ПДО утворюють новий клас ПДР, визначений уперше С. Д. Ейдельманом і Я. М. Дрінем як ПДР з негладкими символами і для дослідження задачі (1), (2) не можна застосовувати стандартну техніку параболічних ПДО. Для одного рівняння перші результати про розв'язність задачі Коші були одержані в [1; 2; 3; 4]. Проте повністю коректні, а в деяких випадках і остаточні, результати були одержані для одного рівняння в [5], де вперше ПДО трактуються як гіперсингулярні інтеграли (ГСІ) [6]. Зазначимо також, що результати цієї статті анонсовані в [7; 8].

Гіперсингулярні інтеграли і псевдодиференціальні оператори

Нехай функції $f : \mathbb{R}^n \to \mathbf{C}_{p1}$ і $\Omega : \mathbb{R}^n \times S^{n-1} \to \mathbb{C}_{pp}$ є неперервними і обмеженими. Вираз вигляду

$$(D_\Omega^\alpha f)(x) \equiv d^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} \Omega\Big(x, \frac{h}{|h|}\Big) \times \\ \times \big(\Delta_h^l f\big)(x) |h|^{-(n+\alpha)} dh, \quad (3)$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $0 < \alpha < l \in \mathbb{N}$, d — деяка стала, яка залежить від чисел n, l, α і яку виберемо нижче, називається матричним ГСІ порядку α з характеристикою Ω.

Приклад 1. Нехай $f_\xi(x) = \big(e^{i(x,\xi)}\big)_{p1}$ — матриця-стовпчик висоти p. Тоді

$$(D_\Omega^\alpha f_\xi)(x) = d^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} \Omega\Big(x, \frac{h}{|h|}\Big) \times \\ \times \big(1 - e^{-i(\xi,h)}\big)^l \big(e^{i(x,\xi)}\big)_{p1} |h|^{-(n+\alpha)} dh \equiv \\ \equiv \tilde{\Omega}(x,\xi) f_\xi(x),$$

де матриця

$$\tilde{\Omega}(x,\xi) = d^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} \Omega\Big(x, \frac{h}{|h|}\Big) \times \\ \times \big(1 - e^{-i(\xi,h)}\big)^l |h|^{-(n+\alpha)} dh$$

називається символом матричного ГСІ D_Ω^α.

Якщо $\Omega(x,\sigma) \equiv E$, то сталу d можна вибрати так, щоб $\tilde{\Omega}(x,\xi) = E|\xi|^\alpha$.

Покладемо в (3)

$$d = d_{n,l}(\alpha) \equiv \int_{\mathbb{R}^n} (1 - e^{-i\xi_1})^l |\xi|^{-(n+\alpha)} d\xi, \\ \xi \equiv (\overline{e}_1, \xi), \quad \overline{e}_1 \equiv (1, 0, \ldots, 0). \quad (4)$$

Правильні такі твердження.

1°. Матричний ГСІ зі сталою характеристикою $\Omega \equiv E$

$$D_E^\alpha f = d^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} E(\Delta_y^l f)(x) |y|^{-(n+\alpha)} dy \quad (5)$$

не залежить від вибору $l > \alpha$ і є означенням операції

$$F_{\xi \to x}^{-1}[E|\xi|^\alpha F_{x \to \xi}[f]],$$

де

$$f(x) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,\xi)} \hat{f}(\xi) d\xi \equiv F^{-1}_{\xi\to x}[\hat{f}(\xi)],$$

$$\hat{f}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x,\xi)} f(x) dx \equiv F_{x\to\xi}[f(x)],$$

$f \in (S(\mathbb{R}^n))_{p1}$, $S(\mathbb{R}^n)$ — простір основних функцій.

2°. Функція $d_{n,l}(\alpha)$ є аналітичною функцією аргументу $\alpha > 0$ і обчислюється за формулою

$$d_{n,l}(\alpha) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}+1}}{2^\alpha \Gamma\big(1+\frac{\alpha}{2}\big)\Gamma\big(n+\frac{\alpha}{2}\big)\sin\frac{\alpha\pi}{2}} \times \\ \times \sum_{k=0}^{l} (-1)^{k-1} C_l^k k^\alpha$$

при непарних α і

$$d_{n,l}(\alpha) = \frac{(-1)^{\frac{\alpha}{2}} \pi^{\frac{n}{2}}}{2^{\alpha-1} \Gamma\big(1+\frac{\alpha}{2}\big)\Gamma\big(n+\frac{\alpha}{2}\big)\sin\frac{\alpha\pi}{2}} \times \\ \times \sum_{k=0}^{l} (-1)^{k-1} C_l^k k^\alpha$$

при парних α. Зокрема, $d_{n,l}(\alpha) = 0$ при $\alpha = 1, 2, \ldots, l-1$ [5; 6].

3°. Нехай α — неціле число. Матричний ГСІ (3) збігається абсолютно при $l > \alpha$ і за умови, що функція f має обмежені похідні до порядку $[\alpha]+1$ включно. Це твердження випливає із формули

$$(\Delta_h^l f)(x) = \sum_{|r|=\mu} \sum_{k=0}^{l} \frac{(-kh)^r (-1)^k}{r!} \times \\ \times C_l^k (D^r f)(x - \theta_k kh),$$

де $0 < \theta_k < 1$, $l \geq \mu$ [5; 6].

Якщо характеристика $\Omega(x,\sigma)$ парна по σ, то ГСІ (3) визначений і при $l > 2\big[\frac{\alpha}{2}\big]$, відповідно до формули із [5; 6]

$$(D^\alpha_\Omega f)(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} (D^\alpha_{\Omega,\varepsilon} f) = \\ = -\frac{1}{d_{n,l}(\alpha)} \sum_{k=1}^{\frac{l-1}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Omega\Big(x, \frac{h}{|h|}\Big) \frac{(\Delta_h^{l+1} f)(x+kh)dh}{|h|^{n+\alpha}} - \\ - \frac{1}{2d_{n,l}(\alpha)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Omega\Big(x, \frac{h}{|h|}\Big) \frac{(\Delta_h^{l+1} f)\big(x+\frac{l+1}{2}h\big)dh}{|h|^{n+\alpha}}, \quad (6)$$

де $l+1 > \alpha$.

Якщо α — ціле парне число, то матричний ГСІ $D^\alpha_\Omega f$, як і в скалярному випадку [5; 6], є матричним диференціальним оператором порядку α. Якщо α — непарне число, то при $l > \alpha$ інтеграл в (3) тотожно дорівнює нулю для довільної функції f [5; 6]. У цьому випадку ГСІ визначається лише для парної характеристики Ω формулою (6) при $l = \alpha$.

4°. Між ГСІ та ПДО існує такий зв'язок.

Якщо дано матричний ГСІ, то запишемо його у вигляді матричного ПДО, припустивши, що $f \in (S(\mathbb{R}^n))_{p1}$. Тоді

$$(D^\alpha_\Omega f)(\xi) = \frac{(2\pi)^{-n}}{d_{n,l}(\alpha)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Omega\Big(x, \frac{h}{|h|}\Big) |h|^{-(n+\alpha)} \times \\ \times \bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,\xi)} \big(1 - e^{-i(h,\xi)}\big)^l \hat{f}(\xi) d\xi \bigg) dh = \\ = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,\xi)} \tilde{\Omega}(x,\xi) \hat{f}(\xi) d\xi. \quad (7)$$

Розглянемо ПДО вигляду

$$(Au)(t,x) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,\xi)} a(t,x,\xi) \hat{u}(\xi,t) d\xi. \quad (8)$$

Зв'язок між ПДО та ГСІ здійснюється за допомогою зображення елементів матричного символу a через сферичні функції [5; 6].

Сферичною гармонікою порядку $\nu \geq 0$ називається звуження на сферу S^{n-1} фіксованого однорідного гармонічного полінома порядку ν. Множина всіх сферичних гармонік порядку ν утворює скінченновимірний підпростір H_ν в $L_2(S^{n-1})$. Нехай $\delta_\nu \equiv \dim H_\nu$. Для кожного ν виберемо в H_ν ортонормований базис $\{X_{\nu\mu} \,|\, \mu = 1, \ldots, \delta_\nu\}$. Функція $X_{\nu\mu}$ є парною при парному ν і непарною при ν непарному. Система функцій $X_{\nu\mu}$ повна в $L_2(S^{n-1})$ і правильні оцінки

$$\delta_\nu \leq c_1 \nu^{n-2}, \quad |X_{\nu\mu}(\sigma)| \leq c_2 \nu^{\frac{n-1}{2}}. \quad (9)$$

Якщо $\varphi \in C^{2r}(S^{n-1})$, то для її коефіцієнтів Фур'є

$$\varphi_{\nu,\mu} = \int\limits_{S^{n-1}} \varphi(\sigma) \overline{X_{\nu\mu}(\sigma)} d\sigma$$

правильна оцінка

$$|\varphi_{\nu\mu}| \leq c_{n,r} M \nu^{-2r}, \quad (10)$$

де $M \equiv \sup\{|D^x \varphi(\sigma)| : \sigma \in S^{n-1}, |x| \leq 2r\}$.

Позначимо через $\tilde{X}_{\nu\mu}(\sigma)$ символ скалярного ГСІ $D^\alpha_{X_{\nu\mu}}$. Якщо число α неціле або α ціле непарне і ν парне, то

$$\tilde{X}_{\nu\mu}(\sigma) = |\sigma|^\alpha \lambda(\nu,\alpha) X_{\nu\mu}\Big(\frac{\sigma}{|\sigma|}\Big),$$

де

$$\lambda(\nu,\alpha) \equiv E_{\nu,\alpha} i^\nu \frac{\Gamma\big(\frac{n+\alpha}{2}\big)\Gamma\big(1+\frac{\alpha}{2}\big)}{\Gamma\big(\frac{n+\alpha+\nu}{2}\big)\Gamma\big(1+\frac{\alpha-\nu}{2}\big)},$$

$$E_{\nu,\alpha} \equiv (-1)^{\nu} \frac{\cos \frac{\alpha+\nu}{2}\pi}{\cos \frac{\pi\alpha}{2}}$$

при нецілому α,

$$E_{\nu,\alpha} \equiv (-1)^{\frac{\nu}{2}}$$

при цілому непарному α.

Розкладемо матричний символ a_k в ряд за системою сферичних гармонік

$$a_k(t,x,\sigma) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\delta_\nu} c_{k\nu\mu}(t,x) X_{\nu\mu}(\sigma),$$
$$(t,x) \in \Pi_T, \quad \sigma \in S^{n-1}.$$

Розглянемо функції

$$\Omega_k(t,x,\sigma) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\delta_\nu} \frac{c_{k\nu\mu}(t,x)}{\lambda(\nu,\alpha)} X_{\nu\mu}(\sigma),$$
$$(t,x) \in \Pi_T, \quad \sigma \in S^{n-1}. \quad (11)$$

Перевіримо, що ряд з (11) рівномірно збігається. Згідно з оцінками (10) маємо, що

$$|c_{k\nu\mu}(t,x)| \le c\nu^{-N+1}.$$

Оскільки $\left|\cos\left(\frac{\alpha+\nu}{2}\right)\pi\right|$ дорівнює $\left|\cos \frac{\alpha\pi}{2}\right|$ або $\left|\sin \frac{\alpha\pi}{2}\right|$ залежно від парності ν, то

$$|\lambda^{-1}(\nu,\alpha)| \le C\left|\Gamma\left(\frac{n+\alpha+\nu}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{\nu-\alpha}{2}\right)\right|.$$

Якщо α — ціле непарне число, то $c_{k\nu\mu} = 0$ для непарних ν. Скористаємося формулою

$$\Gamma\left(1-\frac{\nu-\alpha}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\nu-\alpha}{2}\right)\pi\Gamma\left(\frac{\nu-\alpha}{2}\right)},$$

де величина $\left|\sin\left(\frac{\nu-\alpha}{2}\right)\pi\right|$ дорівнює $\left|\cos \frac{\alpha\pi}{2}\right|$ або $\left|\sin \frac{\alpha\pi}{2}\right|$ і відмінна від нуля, а

$$\left|\frac{\Gamma\left(\frac{n+\alpha+\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu-\alpha}{2}\right)}\right| \le C\nu^{\frac{n}{2}+\alpha},$$

то

$$|\lambda^{-1}(\nu,\alpha)| \le C\nu^{\frac{n}{2}+\alpha}.$$

Врахувавши оцінки (9), дістанемо нерівність

$$\left\|\sum_{\mu=1}^{\delta_\nu} \frac{c_{k\nu\mu}(t,x)}{\lambda(\nu,\alpha)} X_{\nu\mu}(\sigma)\right\| \le C\nu^{-N+2n+\alpha-2},$$

звідки випливає, що ряд з (11) рівномірно збігається.

Розглянемо ГСІ — оператор $D^{\alpha}_{\Omega_k}$. Його символ

$$\tilde{\Omega}(t,x,\sigma) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\delta_\nu} \frac{c_{k\nu\mu}(t,x)}{\lambda(\nu,\alpha)} \tilde{X}(\nu\mu)(\sigma) =$$
$$= |\sigma|^{\alpha} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=1}^{\delta_\nu} c_{k\nu\mu}(t,x) X_{\nu\mu}\left(\frac{\sigma}{|\sigma|}\right) = a_k(t,x,\sigma).$$

Отже, в класі $(S(\mathbb{R}^n))_{p1}$ ПДО A записується у вигляді матричного ГСІ з характеристикою Ω_k, а в класі обмежених функцій цей факт приймається за означення.

Основний результат

Вірною є така теорема.

Теорема 1. *1. За умов 1) – 3) існує фундаментальна матриця розв'язків задачі* (1)*,* (2)

$$\Gamma(t,x;\xi,\tau) = Z(t-\tau, x-\xi; \tau,\xi) + W(t,x;\tau,\xi),$$

для якої виконуються оцінки

$$\|D_x^{\varkappa} Z(t-\tau, x-\xi;\tau,\xi)\| \le$$
$$\le C(t-\tau)\left((t-\tau)^{\frac{1}{\gamma_0}} + |x-\xi|\right)^{-n-\gamma_0-|\varkappa|},$$
$$|\varkappa| \le N - 2n - [\gamma_0];$$
$$\|D_t^1 Z(t-\tau, x-\xi;\tau,\xi)\| \le$$
$$\le C\left((t-\tau)^{\frac{1}{\gamma_0}} + |x-\xi|\right)^{-n-\gamma_0},$$
$$\|W(t,x;\tau,\xi)\| \le$$
$$\le C\Big((t-\tau)^{\frac{\gamma_0+\lambda}{\gamma_0}}\left((t-\tau)^{\frac{1}{\gamma_0}} + |x-\xi|\right)^{-n-\gamma_0} +$$
$$+ (t-\tau)\sum_{k=1}^{m+1}\left((t-\tau)^{\frac{1}{\gamma_0}} + |x-\xi|\right)^{-n-\gamma_k}\Big),$$
$$\gamma_{m+1} \equiv \gamma_0 - \lambda.$$

2. За умов 1) – 5) розв'язок задачі (1)*,* (2) *існує і записується у вигляді*

$$u(t,x) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(t,x;\tau,\xi) f(\tau,\xi) d\xi +$$
$$+ \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(t,x;0,\xi)\varphi(\xi) d\xi, \quad (t,x) \in \Pi_T. \quad (12)$$

Доведення теореми проводиться поширенням міркувань із праць [3; 4; 5] на випадок матричних псевдодиференціальних операторів. Припущення про структуру системи, які забезпечують рівноправність усіх рівнянь системи і рівноправність усіх невідомих функцій, а також припущення про те, що система містить похідні по t лише першого порядку, істотно полегшує роботу.

Важливу роль відіграє точна оцінка матричного осцилюючого інтеграла вигляду

$$\Phi(p,z,\beta) \equiv \int\limits_{\mathbb{R}^n} P(\sigma)\exp\{i(z,\sigma)\} \times$$
$$\times \exp\{-a_k(\beta,p,\sigma)\}d\sigma,$$

де $P : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{C}_{pp}$ — матриця, елементами якої є однорідні многочлени степеня $\nu \in \mathbb{N}$, a_k — матричні символи ПДО A_k, що задовольняють умови 1) – 3), $0 \le k \le m$. Скалярний випадок наведено в [5].

Лема 2. *Якщо* $N \ge 2n + \nu + [\gamma_k]$, *то існує стала* $c > 0$ *така, що*

$$\|\Phi(p,z,\beta)\| \le c(1+|z|)^{-n-\gamma_k-\nu}, \quad 0 \le k \le m.$$

Доведення. Нехай функція $\eta_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ така, що $\eta_0(\sigma) = 1$ при $|\sigma| \le 1$, $\eta_0(\sigma) = 0$ при $|\sigma| \ge 2$, і нехай $\eta_1 \equiv 1 - \eta_0$,

$$\Phi_r(p,z,\beta) \equiv \int\limits_{\mathbb{R}^n} \eta_r(\sigma)P(\sigma)\exp\{i(z,\sigma)\} \times$$
$$\times \exp\{-a_k(\beta,p,\sigma)\}d\sigma, \quad r = 0,1;$$

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_1.$$

Розглянемо скалярну функцію $e^{-t} = 1 - t + t^2h(t)$, $t \ge 0$, де $h(t) = t^{-2}(e^{-t} - 1 + t)$. Функція h має обмежені похідні довільного порядку при всіх $t \in [0,\infty)$. При $0 \le t \le R$ це безпосередньо випливає з рівності

$$h(t) = t^{-2}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{t^k}{k!},$$

а при $t > R$ $h(t) = t^{-2}e^{-t} - t^{-2} + t^{-1}$ і обмеженість функції та всіх її похідних перевіряється безпосереднім обчисленням.

Розглянемо тепер аналогічні формули, коли замість t записана матриця $a_k(\beta,p,\sigma)$, яка задовольняє умови 1) – 3). У цьому випадку

$$h(a_k) = a_k^{-2}\sum_{q=2}^{\infty}\frac{a_k^q}{q!} \quad \text{при } \|a_k\| \le R,$$
$$h(a_k) = a_k^{-2}(e^{-a_k} - 1 + a_k) \quad \text{при } \|a_k\| > R.$$

З цих зображень і з того, що

$$\|e^{-a_k}\| \le ce^{-\delta_1|\sigma|^{\gamma_0}}, \quad 0 < \delta_1 < \delta,$$

де число δ з умови 2), за допомогою міркувань, проведених у скалярному випадку, випливає, що матрична функція $h(a_k)$ має стільки обмежених похідних по σ, скільки похідних по σ має матрична функція $a_k(p,\beta,\sigma)$. Отже,

$$\Phi_0(p,z,\beta) = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\eta_0(\sigma)P(\sigma)e^{i(z,\sigma)}d\sigma -$$
$$-\int\limits_{\mathbb{R}^n}\eta_0(\sigma)P(\sigma)a_k(\beta,p,\sigma)e^{i(z,\sigma)}d\sigma +$$
$$+\int\limits_{\mathbb{R}^n}\eta_0(\sigma)a_k^2(\beta,p,\sigma)h(a_k(\beta,p,\sigma))e^{i(z,\sigma)}d\sigma \equiv$$
$$\equiv \Phi_{01} - \Phi_{02} + \Phi_{03}.$$

Далі оцінки елементів матриць Φ_{0k}, $k = 1,2,3$, проводяться аналогічно оцінкам із праці [5] при $\gamma \ge 1$. Якщо $\gamma > 0$, то треба вимагати нескінченної гладкості матричних символів по σ при $\sigma \ne 0$ [9].

Лему доведено.

Приклад 2. Нехай $a(t,x,\sigma) \equiv E|\sigma|$, $\varphi(x) = EC_1$, $f(t,x) \equiv EC_2$. Тоді із (12) випливає, що $u(t,x) = EC_1 + tEC_2$. Рівняння і початкова умова задовольняються. ПДО трактується як ГСІ [10, с. 24]

$$A_1u(t,x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \times$$
$$\times \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ R\to\infty}}\int\limits_{\{\varepsilon\le h\le R\}} E(\Delta_h u(t,x))|h|^{-(n+1)}dh,$$
$$x \in \mathbb{R}^n, \quad t \ge 0.$$

Список літератури

1. Эйдельман С. Д. Необходимые и достаточные условия стабилизации решений задачи Коши для параболических псевдодифференциальных уравнений / С. Д. Эйдельман, Я. М. Дринь // Приближенные методы математического анализа. — К., 1974. — С. 60–69.
2. Дрінь Я. М. Вивчення одного класу параболічних псевдодиференціальних операторів у просторах гельдерових функцій / Я. М. Дрінь // Доп. АН УРСР. Сер. А. — 1974. — № 1. — С. 19–21.
3. Дринь Я. М. Фундаментальное решение задачи Коши для одного класса параболических псевдодифференциальных уравнений / Я. М. Дринь // Докл. АН УССР. Сер. А. — 1977. — № 3. — С. 198–202.
4. Эйдельман С. Д. Построение и исследование классических фундаментальных решений задачи Коши равномерно параболических псевдодифференциальных уравнений / С. Д. Эйдельман, Я. М. Дринь // Мат. исследования. — 1981. — Т. 63. — С. 18–33.
5. Eidelman S. D. Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type / S. D. Eidelman, S. D. Ivasyshen, A. N. Kochubei. — Basel-Boston-Berlin : Bizkhaser Verlag, 2004. — Vol. 152 of Operator Theory: Advances and Applications. — 390 p.
6. Самко Г. С. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / Г. С. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. — Минск : Наука и техника, 1987. — 688 с.

7. Ейдельман С. Д. До теорії систем параболічних псевдодиференціальних рівнянь / С. Д. Ейдельман, Я. М. Дрінь // Доп. АН УРСР. Сер. А. — 1989. — № 4. — С. 10–12.
8. Дрінь Я. М. Фундаментальні матриці розв'язків псевдодиференціальних параболічних систем з негладкими символами / Я. М. Дрінь, С. Д. Ейдельман // Крайові задачі з різними виродженнями і особливостями: Зб. наук. пр. / Відп. ред. С. Д. Івасишен. — Чернівці, 1990. — С. 21–31.
9. Городецький В. В. Дослідження поведінки осцилюючих інтегралів / В. В. Городецький, Я. М. Дрінь // Науковий вісник Чернівецького ун-ту. — Чернівці : Рута, 2011. — Т. 1, вип. 3. — С. 13–18.
10. Дрінь Р. Я. Дослідження якісних властивостей розв'язків параболічних псевдодиференціальних рівнянь з негладкими символами : дис. ... канд. фіз.-мат. наук : 01.01.02 / Р. Я. Дрінь. — Львів, 1997. — 115 с.

Ja. Drin'

THE CAUCHY PROBLEM FOR UNIFORMLY PARABOLIC PSEUDODIFFERENTIAL SYSTEMS

It was established the solvability of the Cauchy problem and was constructed the classical solutions for uniformly parabolic by Petrovsky systems of pseudodifferential equations with nonsmooth symbols.

Keywords: parabolic system, pseudodifferential equations, non-smooth symbols, the fundamental matrix of Cauchy problem solutions.

Матеріал надійшов 12.09.2014