ФІЗИКА

УДК 539.1

Агре М. Я., Просвірнова Д. Ю.

КІНЕМАТИКА КОМПТОН-ЕФЕКТУ НА ЗВ'ЯЗАНОМУ ЕЛЕКТРОНІ

В аналітичному виразі для диференціального перерізу комптон-ефекту на зв'язаному електроні із загальних міркувань симетрії відділено геометричну частину та залежність від динамічних параметрів. Отримано аналітичний вираз для кутового розподілу розсіяного випромінювання. На поляризацію фотона, що розсіюється, не накладається жодних обмежень і в загальному випадку часткова поляризація задається параметрами Стокса. Виявлено специфічну для розсіяння на зв'язаному електроні залежність інтенсивності комптонівського розсіяння від знака ступеня циркулярної поляризації падаючого фотона, що призводить до ефекту кругового дихроїзму — різної інтенсивності розсіяння право- і ліво- циркулярно поляризованих фотонів.

Ключові слова: диференціальний переріз, кутовий розподіл, незвідний тензор, поляризація, фотон, круговий дихроїзм.

Вступ

У дослідах А. Комптона з розсіяння рентгенівських променів вільними електронами, що відіграли вагому роль у розумінні квантової природи взаємодії світла з речовиною, атомний електрон вважався вільним через те, що енергія падаючої електромагнітної рентгенівської хвилі була на декілька порядків більша за енергію зв'язку електрона в атомі. Для прикладу Комптон використовував у своїх дослідах як джерело рентгенівського випромінювання K_α — лінію спектра випромінювання молібдену з довжиною хвилі $\lambda_0 = 0{,}7126$ Å. Енергія такого фотона сягає $10^{3\div4}$ еВ, а енергія зв'язку електрона в атомі ≤ 10 еВ. Теорія комптон-ефекту на вільному електроні розглядається в багатьох підручниках з квантової електродинаміки (див., наприклад, [1; 2]).

Але ніщо не заважає розглянути процес комптон-розсіяння на зв'язаному електроні, коли початкова енергія електрона до розсіяння належить дискретному спектру, а після розсіяння — неперервному. У такому випадку при розсіянні фотона електрон вилітає з атома, тобто атом іонізується.

Це явище в порівнянні з комптон-ефектом на вільному електроні має низку особливостей, не властивих розсіянню на вільному електроні, зокрема, в системі електрон — фотон зберігається енергія (процес розсіяння відбувається в статичному зовнішньому полі), якщо залишковий йон не збуджується, але не зберігається імпульс. Імпульс може передаватися залишковому йону, тому немає однозначного зв'язку між напрямком руху розсіяного фотона та електрона, як це було в комптон-ефекті на вільному електроні, а частота розсіяного фотона не пов'язана однозначно з кутом розсіяння.

Свої зауваження щодо того, як необхідно модифікувати квантово-механічну теорію розсіяння на випадок розсіяння на зв'язаному електроні, зробив Джессі ДюМонд ще у 1933 році [3]. Проте описати цей процес, хоча й наближено, вдалося лише у 70-х роках Л. П. Рапопорту зі співробітниками та, окремо, В. Г. Горшкову з колегами [4; 5]. Зокрема, розрахунки [5] були виконані для комптон-ефекту на зв'язаному електроні за умови, що енергія падаючого фотона значно більша за енергію іонізації атома. За такого припущення кулонівське притягання електрона атомом враховується в першому порядку теорії збурень, тобто застосовується борнівське наближення для знаходження перерізу процесу. Для складних атомів нещодавно вдалося також оцінити повний переріз комптон-розсіяння на зв'язаному електроні зі збудженням залишкового йона в різні кінцеві стани [6].

Принциповою відмінністю нашої роботи від попередніх праць, де досліджено розсіяння жорсткого фотона на зв'язаному електроні, є те, що ми зосередились на «м'якому» комптон-ефекті, коли:

- енергія електрона є нерелятивіською;
- працює дипольне наближення для взаємодії електромагнітного поля з атомом;
- кулонівська взаємодія не може бути врахована за теорією збурень (не працює борнівське наближення).

Метою цієї роботи, на відміну від праці [4], є докладне дослідження кінематики ефекту Комптона на зв'язаному електроні, тобто встановлення явної залежності диференціального перерізу процесу від усіх векторних величин, що його характеризують. Це, зокрема, дозволить виявити деякі цікаві кінематичні особливості комптон-ефекту на зв'язаному електроні, що мають загальний характер.

Відділення геометричної частини та динамічних параметрів у виразі для диференціального перерізу процесу

Диференціальний переріз розсіяння визначається відомою формулою Крамерса — Гейзенберга [1] із врахуванням того, що кінцевий стан електрона належить до неперервного спектра:

$$d\sigma = \left|\sum\left(\frac{(\boldsymbol{d}_{2n}\boldsymbol{e}'^{*})(\boldsymbol{d}_{n1}\boldsymbol{e})}{\omega_{n1}-\omega-i0} + \frac{(\boldsymbol{d}_{2n}\boldsymbol{e})(\boldsymbol{d}_{n1}\boldsymbol{e}'^{*})}{\omega_{n1}+\omega'-i0}\right)\right|^2 \frac{\omega\omega'^3}{\hbar^2 c^4} d\Omega' \frac{d\boldsymbol{P}}{(2\pi\hbar)^3} \tag{1}$$

$$\hbar\omega_{n1} = E_n - E_1, \qquad \omega' - \omega = \omega_{12},$$

де $\boldsymbol{d}$ — дипольний момент атома (застосовується дипольне наближення), $\boldsymbol{e}, \boldsymbol{e}'$ — вектори поляризації фотона до і після розсіяння відповідно, індексами 1, 2, n позначено початковий, кінцевий та проміжний стани електрона, $d\Omega'$ — елемент тілесного кута у напрямку руху розсіяного фотона, що задається одиничним вектором $\boldsymbol{k}'$, $\frac{d\boldsymbol{P}}{(2\pi\hbar)^3}$ — кількість станів електрона, що припадає на інтервал імпульсів $d\boldsymbol{P}$. Підсумовування ведеться за всіма можливими станами атома, включаючи стани неперервного спектра. Нескінченно малі добавки у знаменниках відповідають звичайному правилу обходу полюса в теорії збурень. Правила обходу мають вагоме значення в нашому випадку, коли полюси виразу (1) за змінною E_n потрапляють в область неперервного спектра [1].

Зазначимо, що імпульс електрона позначено $\boldsymbol{P}$, де $\boldsymbol{P} = P\boldsymbol{p}$ і $P \equiv |\boldsymbol{P}|$, а $\boldsymbol{p}$ — одиничний вектор у напрямку руху електрона. Врахувавши, що

$$d\boldsymbol{P} = P^2 dP d\Omega_{\boldsymbol{p}},$$

де $\Omega_{\boldsymbol{p}}$ — тілесний кут у напрямку руху електрона, і закон збереження енергії,

$$\frac{P^2}{2m} + \hbar\omega' = E_1 + \hbar\omega,$$

записаний для випадку, коли йон не збуджується, отримаємо, що абсолютні значення розкидів P та ω' пов'язані лінійним співвідношенням

$$PdP = m\hbar d\omega'.$$

У результаті, записавши в (1) $d\boldsymbol{P}$ як

$$d\boldsymbol{P} = m\hbar P d\omega' d\Omega_{\boldsymbol{p}},$$

отримаємо вираз, що визначає диференціальний переріз комптон-розсіяння, в інтервал частот $d\omega'$ розсіяного фотона.

Для подальших розрахунків запишемо $d\sigma$ з (1) таким чином:

$$d\sigma = \frac{d\sigma}{d\Omega' d\Omega_{\boldsymbol{p}} d\omega'} d\Omega' d\Omega_{\boldsymbol{p}} d\omega' \tag{2}$$

та будемо з'ясовувати кінематичну структуру саме

$$\frac{d\sigma}{d\Omega' d\Omega_{\boldsymbol{p}} d\omega'}.$$

Надалі користуватись виразом для досліджуваного нами перерізу процесу у вигляді (1) ми не будемо. Лише матимемо на увазі його структуру.

Встановимо структуру диференціального перерізу комптон-ефекту на зв'язаному електроні із загальних міркувань симетрії. Це дасть нам можливість виділити геометричну залежність у диференціальному перерізі процесу, тобто таку його частину, що складається лише з векторів, які визначають процес розсіяння. Розмірковуємо цілком аналогічно праці [7], де розглядається процес двофотонної іонізації.

Для початку врахуємо, що

$$\boldsymbol{de} = \sum_{q=-1}^{1} (-1)^q d_{-q} e_q,$$

де $q = 0, \pm 1$ — сферичні компоненти вектора, пов'язані з його декартовими компонентами:

$$e_{\pm 1} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}(e_x \pm i e_y), \quad e_0 = e_z \tag{3}$$

В (1) для відокремлення геометричної частини інтерес становитимуть добутки типу $e_q e'^{*}_{q'}$, $e^{*}_q e'_{q'}$. Маючи на увазі означення незвідного тензора рангу $L = (l+l'), \ldots, |l-l'|$, який можна утворити з двох незвідних тензорів A_{lq}, $B_{l'q'}$ рангів l, l' [8]:

$$\{A_l \otimes B_{l'}\}_{LQ} = \sum_{q,q'} C^{LQ}_{lql'q'} A_{lq} B_{l'q'}, \tag{4}$$

де $C^{LQ}_{lql'q'}$ — коефіцієнти Клебша — Гордона, та врахувавши, що сферичні компоненти вектора (3) утворюють незвідний тензор першого рангу [8], одержимо незвідні тензори:

$$\{\boldsymbol{e}\otimes\boldsymbol{e}'^{*}\}_{LQ}=\sum_{q_1q'}C^{LQ}_{1q1q'}e_qe'^{*}_{q'}. \qquad (5)$$

Отже, з векторів поляризації $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{e}'$ можна скласти незвідні тензори рангів $L=0,1,2$ за формулою (5), причому скаляр є пропорційний скалярному добутку:

$$\{\boldsymbol{e}\otimes\boldsymbol{e}'^{*}\}_{00}=-\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{e}\boldsymbol{e}'^{*},$$

а тензор першого рангу — пропорційний векторному добутку [8]:

$$\{\boldsymbol{e}\otimes\boldsymbol{e}'^{*}\}_{1Q}=\frac{i}{\sqrt{2}}[\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{e}'^{*}]_Q.$$

Обернувши (5), виражаємо добутки $e_qe'^{*}_{q'}$ в (1) через компоненти незвідних тензорів за формулою (5), де $L=0,1,2$. У виразі (1) з'являються добутки компонент згаданих тензорів:

$$\{\boldsymbol{e}\otimes\boldsymbol{e}'^{*}\}_{lQ}\{\boldsymbol{e}^{*}\otimes\boldsymbol{e}'\}_{l'Q'}$$

які аналогічним чином представляються через компоненти незвідних тензорів:

$$\{\{\boldsymbol{e}\otimes\boldsymbol{e}'^{*}\}_{l}\otimes\{\boldsymbol{e}\otimes\boldsymbol{e}'^{*}\}_{l'}\}_{LQ},$$

де $L=0,1,2,3,4$. Таким чином залежність від векторів поляризації початкового та кінцевого фотонів в (1) може бути виражена через незвідні тензори.

Знаючи, що ймовірність процесу розсіяння має бути скаляром, а також, що, як очевидно з (1), цей процес може залежати від векторів поляризації початкового та кінцевого фотонів $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{e}'$ та вектора, що вказує напрямок руху електрона $\boldsymbol{p}$ ($|\boldsymbol{p}|=1$), записуємо вираз для перерізу комптон-розсіяння в такому вигляді:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega'd\Omega_{\boldsymbol{p}}d\omega'}=\sum_L\sum_{l_1l_2}\big(A^{l_1l_2}_L(\boldsymbol{p})\times \\ \times\{\{\boldsymbol{e}\otimes\boldsymbol{e}'^{*}\}_{l_1}\otimes\{\boldsymbol{e}^{*}\otimes\boldsymbol{e}'\}_{l_2}\}_L\big). \qquad (6)$$

Тут $A^{l_1l_2}_L(\boldsymbol{p})$ — незвідний тензор L-го рангу, що характеризує атом-мішень, і введено скалярний добуток двох незвідних тензорів однакового рангу L:

$$(A_L\cdot B_L)=\sum_Q(-1)^QA_{L,Q}B_{L,-Q}= \\ =\frac{(-1)^L}{\sqrt{2L+1}}\{A_L\otimes B_L\}_{00}. \qquad (7)$$

Явний з точністю до сталого множника вигляд тензора $A^{l_1l_2}_L(\boldsymbol{p})$ можна встановити із наступних міркувань. Незвідний тензор L-го рангу, що залежить лише від одного одиничного вектора $\boldsymbol{p}$, — це, наприклад, [8]

$$\{\ldots\{\{\boldsymbol{p}\otimes\boldsymbol{p}\}_2\otimes\boldsymbol{p}\}_3\ldots\otimes\boldsymbol{p}\}_{LQ}. \qquad (8)$$

Якщо тензор є фунцією лише одного одиничного вектора (в нашому випадку $\boldsymbol{p}$), то він має бути пропорційним сферичній функції $Y_{LQ}(\boldsymbol{p})$, зокрема [8]

$$\{\ldots\{\{\boldsymbol{p}\otimes\boldsymbol{p}\}_2\otimes\boldsymbol{p}\}_3\ldots\otimes\boldsymbol{p}\}_{LQ}= \\ =\sqrt{\frac{4\pi L!}{(2L+1)!!}}Y_{LQ}(\boldsymbol{p}). \qquad (9)$$

Незвідний тензор $A^{l_1l_2}_{LQ}(\boldsymbol{p})$ рангу L, що входить у (6), також має бути пропорційним сферичній функції $Y_{LQ}(\boldsymbol{p})$. Врахувавши тотожність (9), можемо записати, що

$$A^{l_1l_2}_{LQ}(\boldsymbol{p})= \\ =a^{l_1l_2}_L\{\ldots\{\{\boldsymbol{p}\otimes\boldsymbol{p}\}_2\otimes\boldsymbol{p}\}_3\ldots\otimes\boldsymbol{p}\}_{LQ}, \qquad (10)$$

де ми ввели так звані динамічні параметри мішені — сталі коефіцієнти $a^{l_1l_2}_L$. Значення динамічних параметрів залежать від структури атома, а також від його початкового стану. Розрахункові формули для $a^{l_1l_2}_L$ можна одержати, зводячи початковий вираз (1) до форми (6). У кожному конкретному випадку це можна зробити, застосовуючи стандартні методи теорії атома.

Отже, ми встановили для диференціального перерізу комптон-ефекту залежність від геометричних параметрів — векторів $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{e}'$ та $\boldsymbol{p}$ (див. (6), (10)).

Кінематична структура диференціального перерізу комптон-ефекту на зв'язаному електроні

Користуючись виразом (6), випишемо переріз комптон-ефекту на зв'язаному електроні у явному вигляді. Насамперед слід врахувати, що оскільки ліва частина цього виразу не змінює знак при операції просторової інверсії (адже є скаляром), то, відповідно, й права частина (6) має задовольняти ту саму властивість. Це можливо лише за умови, що $L=0,2,4$. Індекси підсумовування l_1, l_2 в (6), що приймають значення $0,1,2$, зв'язані з L умовою трикутника $\Delta(l_l,l_2,L)$ ($|l_1-l_2|\le L\le l_1+l_2$). Далі, врахувавши, що

$$Y_{00}(\boldsymbol{p})=\frac{1}{\sqrt{4\pi}},$$

$$Y_{2Q}(\boldsymbol{p})=\sqrt{\frac{5!!}{4\pi 2!}}\,\{\boldsymbol{p}\otimes\boldsymbol{p}\}_{2Q},$$

$$Y_{4Q}(\boldsymbol{p})=\sqrt{\frac{9!!}{4\pi 4!}}\,\{\{\{\boldsymbol{p}\otimes\boldsymbol{p}\}_2\otimes\boldsymbol{p}\}_3\otimes\boldsymbol{p}\}_{4Q},$$

(див. (9)), а також, скориставшись тотожностями ((28)–(34)), наведеними в додатку, запишемо скалярні добутки незвідних тензорів у (6), побудовані з векторів $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{e}'$ та $\boldsymbol{p}$, через скалярні та векторні добутки цих векторів.

Перш ніж записати шуканий нами вираз, зупинимось детальніше на такому моменті. У ході вирахування скалярних добутків незвідних тензорів через скалярні та векторні добутки їх складових виявилося, що

$$\begin{aligned}&\big(Y_2(\boldsymbol{p})\cdot\{\{\boldsymbol{e}\otimes\boldsymbol{e}'^*\}_0\otimes\{\boldsymbol{e}^*\otimes\boldsymbol{e}'\}_2\}_2\big)=\\&\quad=-\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\big((\boldsymbol{pe})(\boldsymbol{pe}'^*)(\boldsymbol{e}^*\boldsymbol{e}')-\frac{1}{3}|(\boldsymbol{ee}'^*)|^2\big)\end{aligned}$$

та

$$\begin{aligned}&\big(Y_2(\boldsymbol{p})\cdot\{\{\boldsymbol{e}\otimes\boldsymbol{e}'^*\}_2\otimes\{\boldsymbol{e}^8\otimes\boldsymbol{e}'\}_0\}_2\big)=\\&\quad=-\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\big((\boldsymbol{pe}^*)(\boldsymbol{pe}')(\boldsymbol{ee}'^*)-\frac{1}{3}|(\boldsymbol{ee}'^*)|^2\big).\end{aligned}$$

Отже, ці вирази є комплексними і до того ж комплексно спряженими один до одного. Але диференціальний переріз є дійсною величиною. Тому мають бути комплексними динамічні параметри, що стоять як множники перед наведеними виразами у (6), причому

$$a_2^{02}=(a_2^{20})^*.$$

Позначаючи далі $z=(\boldsymbol{pe}'^*)(\boldsymbol{e}^*\boldsymbol{e}')(\boldsymbol{pe})$, маємо дійсну величину

$$\begin{aligned}&a_2^{02}z+a_2^{20}z^*=2\operatorname{Re}(a_2^{02}z)=\\&\quad=2\operatorname{Re}(a_2^{02})\operatorname{Re}(z)-2\operatorname{Im}(a_2^{02})\operatorname{Im}(z).\end{aligned}$$

Знайдемо $\operatorname{Im}(z)=\operatorname{Im}(\boldsymbol{pe}'^*)(\boldsymbol{e}^*\boldsymbol{e}')(\boldsymbol{pe})$; $z-z^*=2i\operatorname{Im}(z)$, отже,

$$\begin{aligned}&2i\operatorname{Im}(z)=\\&\quad=(\boldsymbol{pe}'^*)(\boldsymbol{e}^*\boldsymbol{e}')(\boldsymbol{pe})-(\boldsymbol{pe}^*)(\boldsymbol{pe}')(\boldsymbol{ee}'^*),\end{aligned}\tag{11}$$

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{e}'^*(\boldsymbol{e}^*,\boldsymbol{e}')=[[\boldsymbol{e}',\boldsymbol{e}'^*],\boldsymbol{e}^*]+\boldsymbol{e}'(\boldsymbol{e}'^*,\boldsymbol{e}^*)=\\&\quad=-i\xi'[\boldsymbol{k}',\boldsymbol{e}^*]+(\boldsymbol{e}'^*,\boldsymbol{e}^*)\boldsymbol{e}',\end{aligned}\tag{12}$$

де введено ступінь циркулярної поляризації ξ':

$$[\boldsymbol{e}',\boldsymbol{e}'^*]=-i\xi'\boldsymbol{k}'\quad\Rightarrow\quad\xi'=i(\boldsymbol{k}',[\boldsymbol{e}',\boldsymbol{e}'^*])$$

$\xi'=\pm1$ для правої (лівої) поляризації фотона.

Тотожність (12) дозволяє записати другий доданок у (11) у такому вигляді:

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{p},\boldsymbol{e})(\boldsymbol{e}'^*,\boldsymbol{p})(\boldsymbol{e}^*,\boldsymbol{e}')=\\&\quad=-i\xi'(\boldsymbol{p},\boldsymbol{e})(\boldsymbol{p},[\boldsymbol{k}',\boldsymbol{e}^*])+\\&\quad\quad+(\boldsymbol{p},\boldsymbol{e})(\boldsymbol{p},\boldsymbol{e}')(\boldsymbol{e}'^*,\boldsymbol{e}^*).\end{aligned}\tag{13}$$

Далі застосовуємо тотожність

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{e}(\boldsymbol{e}'^*,\boldsymbol{e}^*)=[[\boldsymbol{e}^*,\boldsymbol{e}],\boldsymbol{e}'^*]+\boldsymbol{e}^*(\boldsymbol{e},\boldsymbol{e}'^*)=\\&\quad=i\xi[\boldsymbol{k}',\boldsymbol{e}'^*]+\boldsymbol{e}'^*(\boldsymbol{ee}'^*),\end{aligned}\tag{14}$$

де $\xi=i(\boldsymbol{k},[\boldsymbol{e},\boldsymbol{e}^*])$ — ступінь циркулярної поляризації фотона з вектором поляризації $\boldsymbol{e}$. Для правої (лівої) циркулярної поляризації $\xi=\pm1$, за лінійної поляризації $\xi=0$. У загальному ж випадку еліптичної поляризації $0<|\xi|<1$. Тотожність (14) дозволяє записати другий доданок з (13) у такому вигляді:

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{p},\boldsymbol{e})(\boldsymbol{p},\boldsymbol{e}')(\boldsymbol{e}'^*,\boldsymbol{e}^*)=\\&\quad=i\xi(\boldsymbol{p},\boldsymbol{e}')(\boldsymbol{p},[\boldsymbol{k},\boldsymbol{e}'^*])+\\&\quad\quad+(\boldsymbol{p},\boldsymbol{e}')(\boldsymbol{p},\boldsymbol{e}^*)(\boldsymbol{e},\boldsymbol{e}'^*).\end{aligned}\tag{15}$$

Підставляючи цей вираз у (13) і далі в (11), знаходимо $\operatorname{Im}(z)$:

$$\begin{aligned}&2\operatorname{Im}(z)=\xi'(\boldsymbol{p},\boldsymbol{e})(\boldsymbol{p},\boldsymbol{k}',\boldsymbol{e}^*)-\\&\quad-\xi(\boldsymbol{p},\boldsymbol{e}')(\boldsymbol{p},\boldsymbol{k},\boldsymbol{e}'^*).\end{aligned}\tag{16}$$

Вираз (16) є дійсним, у чому можна переконатися безпосередньо, застосовуючи тотожності, аналогічні (13) і (14). Через дійсність (16) можна також записати, що

$$\begin{aligned}&2\operatorname{Im}(z)=\xi'\operatorname{Re}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{e})(\boldsymbol{p},\boldsymbol{k}',\boldsymbol{e}^*)-\\&\quad-\xi\operatorname{Re}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{e}')(\boldsymbol{p},\boldsymbol{k},\boldsymbol{e}'^*).\end{aligned}\tag{17}$$

Комплексно спряженими є також доданки

$$\begin{aligned}&\big(Y_2(\boldsymbol{p})\cdot\{\{\boldsymbol{e}\otimes\boldsymbol{e}'^*\}_1\otimes\{\boldsymbol{e}^*\otimes\boldsymbol{e}'\}_2\}_2\big)=\\&=\frac{\sqrt{5}}{4\sqrt{2\pi}}\big(2i\operatorname{Im}(\boldsymbol{pe}^*)(\boldsymbol{pe}'^*)(\boldsymbol{ee}')-|\boldsymbol{pe}'|^2+|\boldsymbol{pe}|^2\big)\end{aligned}$$

та

$$\begin{aligned}&\big(Y_2(\boldsymbol{p})\cdot\{\{\boldsymbol{e}\otimes\boldsymbol{e}'^*\}_2\otimes\{\boldsymbol{e}^*\otimes\boldsymbol{e}'\}_1\}_2\big)=\\&=-\frac{\sqrt{5}}{4\sqrt{2\pi}}\big(2i\operatorname{Im}(\boldsymbol{pe})(\boldsymbol{pe}')(\boldsymbol{e}^*\boldsymbol{e}'^*)-|\boldsymbol{pe}'|^2+|\boldsymbol{pe}|^2\big),\end{aligned}$$

тому для динамічних параметрів a_2^{12}, $(a_2^{21})^*$ має виконуватись така залежність:

$$a_2^{12}=-(a_2^{21})^*.$$

У результаті маємо тотожності

$$\begin{aligned}&|\boldsymbol{pe}|^2(a_2^{12}-a_2^{21})=|\boldsymbol{pe}|^2(a_2^{12}+a_2^{12*})=\\&\quad=|\boldsymbol{pe}|^2 2\operatorname{Re}a_2^{12},\end{aligned}\tag{18}$$

$$\begin{aligned}&2i\operatorname{Im}(\boldsymbol{pe})(\boldsymbol{pe}')(\boldsymbol{e}^*\boldsymbol{e}'^*)(a_2^{12}+a_2^{21})=\\&\quad=2i\operatorname{Im}(\boldsymbol{pe})(\boldsymbol{pe}')(\boldsymbol{e}^*\boldsymbol{e}'^*)(a_2^{12}-a_2^{12*})=\\&\quad=2i\operatorname{Im}(\boldsymbol{pe})(\boldsymbol{pe}')(\boldsymbol{e}^*\boldsymbol{e}'^*)2i\operatorname{Im}a_2^{12}.\end{aligned}\tag{19}$$

Цілком аналогічно виведенню (15) отримаємо для $2i\,\mathrm{Im}(\boldsymbol{pe})(\boldsymbol{pe}')(\boldsymbol{e}^*\boldsymbol{e}'^*)$ таку тотожність:

$$2i\,\mathrm{Im}(\boldsymbol{pe})(\boldsymbol{pe}')(\boldsymbol{e}^*\boldsymbol{e}'^*) = \\ = i\xi'\,\mathrm{Re}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{e})(\boldsymbol{p},\boldsymbol{k}',\boldsymbol{e}^*) - \\ - i\xi\,\mathrm{Re}(\boldsymbol{pe}'^*)(\boldsymbol{p},\boldsymbol{k},\boldsymbol{e}').$$

Враховуючи все сказане вище, запишемо остаточний вираз для диференціального перерізу комптон-ефекту на зв'язаному електроні з виділеною геометричною частиною та динамічними параметрами $a_L^{l_1l_2}$, що визначаються характеристиками мішені, у такому вигляді:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega' d\Omega_p d\omega'} = a_4^{22}\frac{3}{4}\sqrt{\frac{35}{2\pi}}\Big\{|(\boldsymbol{pe})|^2|(\boldsymbol{pe}')|^2 - \\ - \frac{1}{7}\big(|(\boldsymbol{pe})|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\boldsymbol{pe})(\boldsymbol{pe}')(\boldsymbol{e}'^*\boldsymbol{e}^*) + \\ + |(\boldsymbol{pe}')|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\boldsymbol{pe})(\boldsymbol{pe}'^*)(\boldsymbol{e}^*\boldsymbol{e}')\big)\Big\} + \\ + \frac{1}{35}(1 + |(\boldsymbol{ee}')|^2 + |(\boldsymbol{ee}'^*)|^2) - \\ - a_2^{22}\frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{14\pi}}\Big\{\mathrm{Re}(\boldsymbol{pe})(\boldsymbol{pe}')(\boldsymbol{e}^*\boldsymbol{e}'^*) + \\ + \frac{1}{2}|(\boldsymbol{pe})|^2 + \frac{1}{2}|(\boldsymbol{pe}')|^2 - \frac{1}{3}\big(|(\boldsymbol{ee}')|^2 + \\ + 4(\mathrm{Re}(\boldsymbol{pe})(\boldsymbol{pe}^*)(\boldsymbol{ee}'^*) + 1)\big)\Big\} - \\ - a_2^{11}\frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\Big(|(\boldsymbol{p},[\boldsymbol{e},\boldsymbol{e}'^*])|^2 - \frac{1}{3}|(\boldsymbol{ee}'^*)|^2\Big) - \\ - \mathrm{Re}\,a_2^{20}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big(\mathrm{Re}(\boldsymbol{pe})(\boldsymbol{pe}'^*)(\boldsymbol{e}^*\boldsymbol{e}') - \frac{1}{3}|(\boldsymbol{ee}'^*)|^2\Big) + \\ + \mathrm{Im}\,a_2^{20}\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\big(\xi'\,\mathrm{Re}((\boldsymbol{p},\boldsymbol{e})(\boldsymbol{p},\boldsymbol{k}',\boldsymbol{e}^*)) - \\ - \xi\,\mathrm{Re}(\boldsymbol{p},\boldsymbol{e}')(\boldsymbol{p},\boldsymbol{k},\boldsymbol{e}'^*)\big) + \\ + \frac{\sqrt{5}}{4\sqrt{2\pi}}\Big(2\,\mathrm{Im}\,a_2^{12}\big(i\xi'\,\mathrm{Re}(\boldsymbol{pe})(\boldsymbol{p},\boldsymbol{k}',\boldsymbol{e}^*) - \\ - i\xi\,\mathrm{Re}(\boldsymbol{pe}'^*)(\boldsymbol{p},\boldsymbol{k},\boldsymbol{e}')\big) + 2\,\mathrm{Re}\,a_2^{12}(|\boldsymbol{pe}'|^2 - |\boldsymbol{pe}|^2)\Big) + \\ + a_0^{22}\frac{1}{2\sqrt{5\pi}}\Big(1 + |(\boldsymbol{ee}')|^2 - \frac{2}{3}|(\boldsymbol{ee}'^*)|^2\Big) + \\ + a_0^{11}\frac{1}{4\sqrt{3\pi}}|[\boldsymbol{ee}']|^2 + a_0^{00}\frac{1}{6\sqrt{\pi}}|(\boldsymbol{ee}'^*)|^2, \quad (20)$$

де $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{e}'$ — початкова та кінцева поляризація фотона, $\boldsymbol{p}$ — одиничний вектор у напрямку руху електрона.

Для того щоб практично скористатися формулою (20), експеримент потрібно поставити таким чином, щоб фіксувати фотон, що розсіявся, та електрон одночасно; причому необхідно використовувати поляризатор, щоб виділити розсіяний фотон певної поляризації $\boldsymbol{e}'$. Початкова поляризація фотона й динамічні параметри атома вважаються відомими експериментатору. Якщо електрон, який вилітає з атома, в експерименті не реєструється, експериментатору необхідно знати переріз, проінтегрований за напрямками руху цього електрона. Отже, проінтегруємо вираз (20) за всіма $\boldsymbol{p}$. Для цього врахуємо такі співвідношення:

$$\int d\Omega_{\boldsymbol{p}} = 4\pi, \qquad \int p_i p_j d\Omega_{\boldsymbol{p}} = \frac{4\pi}{3}\delta_{ij},$$

$$\int p_i p_j p_m p_n d\Omega_{\boldsymbol{p}} = \frac{4\pi}{15}(\delta_{ij}\delta_{mn} + \delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{in}\delta_{jm}).$$

Унаслідок інтегрування за напрямками вектора $\boldsymbol{p}$ доданки з динамічними параметрами $a_L^{l_1l_2}$ при $L \neq 0$ обнуляються через ортогональність сферичних функцій:

$$\int Y_L(\boldsymbol{p})d\Omega_{\boldsymbol{p}} = 0, \quad L \neq 0.$$

Отже,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega' d\omega'} = \int \frac{d\sigma}{d\Omega' d\Omega_{\boldsymbol{p}} d\omega'}d\Omega_{\boldsymbol{p}} = \\ = a_0^{22}\sqrt{\frac{\pi}{5}}\Big(1 + |(\boldsymbol{ee}')|^2 - \frac{2}{3}|(\boldsymbol{ee}'^*)|^2\Big) + \\ + a_0^{11}\frac{\pi}{3}(1 - |(\boldsymbol{ee}')|^2) + a_0^{00}\frac{2\sqrt{\pi}}{3}|(\boldsymbol{ee}'^*)|^2. \quad (21)$$

Одержана нами формула (21) за структурою збігається з формулою Плачека [1] для диференціального перерізу некогерентного розсіяння на вільно орієнтованій атомарно-молекулярній системі. Вона відрізняється від формули Плачека коефіцієнтами при виразах у дужках, що визначаються для кожної атомарної системи окремо.

Кутовий розподіл розсіяного випромінювання

Щоб знайти кутовий розподіл розсіяного випромінювання (поляризація кінцевого фотона не вимірюється), просумуємо (20) по двох незалежних поляризаціях λ кінцевого фотона.

Користуючись відомою тотожністю для суми за двома взаємно ортогональними поляризаціями [1]:

$$\sum_{\lambda=\pm1}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{e}'_\lambda)(\boldsymbol{b}\boldsymbol{e}'^*_\lambda) = [\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{k}'][\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{k}'], \qquad (22)$$

де $\boldsymbol{k}'$ — одиничний вектор, спрямований у напрямку поширення розсіяного фотона, а також врахувавши, що

$$\sum_\lambda \xi'_\lambda = 0,$$

запишемо кутовий розподіл розсіяного випромінювання у такому вигляді:

$$\frac{d\sigma_a}{d\Omega' d\Omega_{\boldsymbol{p}} d\omega'} = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{35}{2\pi}} a_4^{22}\Big\{\frac{1}{7}|(\boldsymbol{pe})|^2 - |(\boldsymbol{pe})|^2(\boldsymbol{k'p})^2 + \frac{1}{7}(\boldsymbol{k'p})^2 + \frac{4}{7}(\boldsymbol{k'p})\,\mathrm{Re}(\boldsymbol{pe})(\boldsymbol{k'e}^*) - \frac{2}{35}|(\boldsymbol{k'e})|^2 - \frac{1}{35}\Big\} - \frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{14\pi}} a_2^{22}\Big\{\frac{2}{3}|(\boldsymbol{pe})|^2 - (\boldsymbol{k'p})\,\mathrm{Re}(\boldsymbol{pe})(\boldsymbol{k'e}^*) + \frac{4}{3}(\boldsymbol{k'p})\,\mathrm{Re}(\boldsymbol{pe}^*)(\boldsymbol{k'e}) - \frac{1}{9}|(\boldsymbol{k'e})|^2 - \frac{1}{2}(\boldsymbol{k'p})^2 - \frac{1}{18}\Big\} - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{2\pi}} a_2^{11}\Big\{(\boldsymbol{k'p})^2 - 2(\boldsymbol{k'p})\,\mathrm{Re}(\boldsymbol{pe})(\boldsymbol{k'e}) + \frac{2}{3}|(\boldsymbol{k'e})|^2 - \frac{1}{3}\Big\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{Re}\,a_2^{20}\Big\{|(\boldsymbol{pe})|^2 - (\boldsymbol{k'p})\,\mathrm{Re}(\boldsymbol{pe})(\boldsymbol{k'e}^*) - \frac{1}{3}|[\boldsymbol{k'e}]|^2\Big\} + \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{Im}\,a_2^{20}\xi(\boldsymbol{pk'})(\boldsymbol{p},\boldsymbol{k},\boldsymbol{k'}) + \frac{\sqrt{5}}{4\sqrt{2\pi}}\big(\mathrm{Re}\,a_2^{12}(|[\boldsymbol{pk'}]|^2 - 2|\boldsymbol{pe}|^2) - 2\,\mathrm{Im}\,a_2^{12}\xi\,\mathrm{Re}(\boldsymbol{pk'})(\boldsymbol{p},\boldsymbol{k},\boldsymbol{k'})\big) + \frac{1}{12\sqrt{5\pi}} a_0^{22}\big\{7 - |(\boldsymbol{k'e})|^2\big\} + \frac{1}{4\sqrt{3\pi}} a_0^{11}\big\{1 + |(\boldsymbol{k'e})|^2\big\} + \frac{1}{6\sqrt{\pi}} a_0^{00}|[\boldsymbol{k'e}]|^2, \quad (23)$$

де індекс a («angular») вказує на те, що це є кутовий розподіл.

У формулі (23) є доданки, лінійні за ступенями циркулярної поляризації ξ. Таким чином, кутовий розподіл розсіяного випромінювання при комптон-ефекті на зв'язаному електроні залежить від того, ліво- чи право- циркулярно поляризованим був початковий фотон ($\xi = \mp 1$). Це явище так званого кругового (циркулярного) дихроїзму. При комптон-ефекті на вільному електроні зазначене явище відсутнє [1; 2].

Розсіяння частково поляризованого фотона

Узагальнимо вираз (23) на випадок, коли початковий фотон є частково поляризованим. Для опису поляризації плоскої монохроматичної хвилі використовують, як добре відомо, три параметри Стокса [9]: ступінь циркулярної поляризації ξ_2 та два ступені лінійної поляризації ξ_1, ξ_3. Якщо $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 1$, то фотон є повністю поляризованим і його поляризацію можна задавати вектором $\boldsymbol{e}$, як це й було зроблено в попередніх розділах цієї роботи, причому параметр ξ в (23) збігається з ξ_2. Частковій поляризації відповідає $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 < 1$, а для неполяризованого фотона $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$.

У роботі [10] було показано, що перехід від повної до часткової поляризації фотона в перерізі будь-якого елементарного фотопроцесу виконується таким способом:

$$d\sigma = d\sigma_{np} + \frac{1}{2}\xi_1\big[d\sigma(\boldsymbol{e}_{\frac{\pi}{4}}) - d\sigma(\boldsymbol{e}_{\frac{3\pi}{4}})\big] + \frac{1}{2}\xi_2\big[d\sigma(\boldsymbol{e}_{+1}) - d\sigma(\boldsymbol{e}_{-1})\big] + \frac{1}{2}\xi_3\big[d\sigma(\boldsymbol{e}_x) - d\sigma(\boldsymbol{e}_y)\big]. \quad (24)$$

Тут $d\sigma(\boldsymbol{e})$ — відповідний переріз для повністю поляризованого фотона з вектором поляризації $\boldsymbol{e}$,

$$d\sigma_{np} = \frac{1}{2}\sum_{\lambda} d\sigma(\boldsymbol{e}_\lambda)$$

— переріз для неполяризованого фотона (підсумовування ведеться за двома взаємно ортогональними поляризаціями за формулою, аналогічною (22)), $\boldsymbol{e}_{\pm 1}$ — вектори правої (лівої) циркулярної поляризації, $\boldsymbol{e}_{x,y}$ — дійсні вектори лінійної поляризації вздовж осей OX та OY; $\boldsymbol{e}_\varphi$ — дійсний вектор лінійної поляризації під кутом φ до осі OX (вісь OZ — спрямована вздовж поширення хвилі, тобто вздовж вектора $\boldsymbol{k}$).

Для запису кутового розподілу розсіяного випромінювання у випадку розсіяння частково поляризованого фотона виходимо з (23) та відповідно до (24) спочатку знаходимо кутовий розподіл для розсіяння неполяризованого фотона:

$$\frac{d\sigma_{a;np}}{d\Omega' d\Omega_{\boldsymbol{p}} d\omega'} = \frac{1}{2}\Bigg[\frac{3}{4}\sqrt{\frac{35}{2\pi}} a_4^{22}\Big\{\frac{1}{7}|[\boldsymbol{kp}]|^2 - \frac{1}{7}(\boldsymbol{k'p})^2 + (\boldsymbol{k'p})^2(\boldsymbol{kp})^2 - \frac{4}{7}(\boldsymbol{k'p})(\boldsymbol{kp})(\boldsymbol{kk'}) - \frac{2}{35}\big(|[\boldsymbol{k'k}]|^2 + 1\big)\Big\} - \frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{14\pi}} a_2^{22}\Big\{\frac{2}{3}|[\boldsymbol{kp}]|^2 - \frac{2}{3}(\boldsymbol{k'p})^2 - \frac{1}{3}(\boldsymbol{k'p})(\boldsymbol{kp})(\boldsymbol{k'k})\Big\} - \frac{1}{9}\big(|[\boldsymbol{k'k}]|^2 + 1\big) - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}} a_2^{11}\Big\{(\boldsymbol{k'p})(\boldsymbol{kp})(\boldsymbol{k'k}) + \frac{1}{3}|[\boldsymbol{k'k}]|^2 - \frac{1}{3}\Big\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{Re}\,a_2^{20}\Big\{|[\boldsymbol{kp}]|^2 - (\boldsymbol{k'p})^2 + (\boldsymbol{k'p})(\boldsymbol{kp})(\boldsymbol{k'k}) - \frac{1}{3}\big(2 - |[\boldsymbol{k'k}]|^2\big)\Big\} + \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{Re}\,a_2^{12}\big(|[\boldsymbol{pk}]|^2 + |\boldsymbol{pk'}|^2\big) + \frac{1}{12\sqrt{5\pi}} a_0^{22}\big(14 - |[\boldsymbol{k'k}]|^2\big) + \frac{1}{4\sqrt{3\pi}} a_0^{11}\big(2 - |[\boldsymbol{k'k}]|^2\big) + \frac{1}{6\sqrt{\pi}} a_0^{00}\big(2 - |[\boldsymbol{k'k}]|^2\big)\Bigg]. \quad (25)$$

Далі виписуємо вираз для так званого першого лінійного дихроїзму:

$$\frac{d\sigma_a(\boldsymbol{e}_{\frac{\pi}{4}})}{d\Omega' d\Omega_{\boldsymbol{p}} d\omega'} - \frac{d\sigma_a(\boldsymbol{e}_{\frac{3\pi}{4}})}{d\Omega' d\Omega_{\boldsymbol{p}} d\omega'} =$$
$$= \frac{3}{4}\sqrt{\frac{35}{2\pi}} a_4^{22} \Big\{ \frac{1}{7}\big(|(\boldsymbol{p}\boldsymbol{e}_{\frac{\pi}{4}})|^2 - |(\boldsymbol{p}\boldsymbol{e}_{\frac{3\pi}{4}})|^2\big) -$$
$$- (\boldsymbol{k}'\boldsymbol{p})^2\big(|(\boldsymbol{p}\boldsymbol{e}_{\frac{\pi}{4}})|^2 - |(\boldsymbol{p}\boldsymbol{e}_{\frac{3\pi}{4}})|^2\big) +$$
$$+ \frac{4}{7}(\boldsymbol{k}'\boldsymbol{p})\big((\boldsymbol{k}'\boldsymbol{e}^*_{\frac{\pi}{4}})(\boldsymbol{p}\boldsymbol{e}_{\frac{\pi}{4}}) - (\boldsymbol{k}'\boldsymbol{e}^*_{\frac{3\pi}{4}})(\boldsymbol{p}\boldsymbol{e}_{\frac{3\pi}{4}})\big) -$$
$$- \frac{2}{35}\cdot\big(|(\boldsymbol{k}'\boldsymbol{e}_{\frac{\pi}{4}})|^2 - |(\boldsymbol{k}'\boldsymbol{e}_{\frac{3\pi}{4}})|^2\big)\Big\} -$$
$$- \frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{14\pi}} a_2^{22} \Big\{ \frac{2}{3}\big(|(\boldsymbol{p}\boldsymbol{e}_{\frac{\pi}{4}})|^2 - |(\boldsymbol{p}\boldsymbol{e}_{\frac{3\pi}{4}})|^2\big) -$$
$$- (\boldsymbol{k}'\boldsymbol{p})\big((\boldsymbol{p}\boldsymbol{e}_{\frac{\pi}{4}})(\boldsymbol{k}'\boldsymbol{e}^*_{\frac{\pi}{4}}) - (\boldsymbol{p}\boldsymbol{e}_{\frac{3\pi}{4}})(\boldsymbol{k}'\boldsymbol{e}^*_{\frac{3\pi}{4}})\big) +$$
$$+ \frac{4}{9}(\boldsymbol{k}'\boldsymbol{p})\big(\mathrm{Re}(\boldsymbol{p}\boldsymbol{e}^*_{\frac{\pi}{4}})(\boldsymbol{k}'\boldsymbol{e}_{\frac{\pi}{4}}) - \mathrm{Re}(\boldsymbol{p}\boldsymbol{e}^*_{\frac{3\pi}{4}})(\boldsymbol{k}'\boldsymbol{e}_{\frac{3\pi}{4}})\big)\Big\} -$$
$$- \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}} a_2^{11} \Big\{ \frac{2}{3}\big(|(\boldsymbol{k}'\boldsymbol{e}_{\frac{\pi}{4}})|^2 - |(\boldsymbol{k}'\boldsymbol{e}_{\frac{3\pi}{4}})|^2\big) -$$
$$- 2(\boldsymbol{k}'\boldsymbol{p})\big((\boldsymbol{p}\boldsymbol{e}_{\frac{\pi}{4}})(\boldsymbol{k}'\boldsymbol{e}_{\frac{\pi}{4}}) - (\boldsymbol{p}\boldsymbol{e}_{\frac{3\pi}{4}})(\boldsymbol{k}'\boldsymbol{e}_{\frac{3\pi}{4}})\big)\Big\} +$$
$$+ \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{Re}\,a_2^{12}\big(|(\boldsymbol{p}\boldsymbol{e}_{\frac{\pi}{4}})|^2 - |(\boldsymbol{p}\boldsymbol{e}_{\frac{3\pi}{4}})|^2\big) +$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{Re}\,a_2^{20}\big\{(|(\boldsymbol{p}\boldsymbol{e}_{\frac{\pi}{4}})|^2 - |(\boldsymbol{p}\boldsymbol{e}_{\frac{3\pi}{4}})|^2) -$$
$$- (\boldsymbol{k}'\boldsymbol{p})((\boldsymbol{p}\boldsymbol{e}_{\frac{\pi}{4}})(\boldsymbol{k}'\boldsymbol{e}^*_{\frac{\pi}{4}}) - (\boldsymbol{p}\boldsymbol{e}_{\frac{3\pi}{4}})(\boldsymbol{k}'\boldsymbol{e}^*_{\frac{3\pi}{4}})) -$$
$$- 3(|(\boldsymbol{k}\boldsymbol{e}_{\frac{\pi}{4}})|^2 - |(\boldsymbol{k}\boldsymbol{e}_{\frac{3\pi}{4}})|^2)\big\} -$$
$$- \big(|(\boldsymbol{k}'\boldsymbol{e}_{\frac{\pi}{4}})|^2 - |(\boldsymbol{k}'\boldsymbol{e}_{\frac{3\pi}{4}})|^2\big) \times$$
$$\times \Big(\frac{1}{12\sqrt{5\pi}}a_0^{22} - \frac{1}{4\sqrt{3\pi}}a_0^{11} - \frac{1}{6\sqrt{\pi}}a_0^{00}\Big). \quad (26)$$

Аналогічно (26) записується вираз для $[d\sigma(\boldsymbol{e}_x) - d\sigma(\boldsymbol{e}_y)]$.

Вираз для так званого кругового дихроїзму в кутовому розподілі розсіяного випромінювання має зовсім простий вигляд, як випливає з (23):

$$\frac{d\sigma_a(\boldsymbol{e}_{+1})}{d\Omega' d\Omega_{\boldsymbol{p}} d\omega'} - \frac{d\sigma_a(\boldsymbol{e}_{-1})}{d\Omega' d\Omega_{\boldsymbol{p}} d\omega'} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(\boldsymbol{p}\boldsymbol{k}')(\boldsymbol{p},\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}')\Big(\mathrm{Im}\,a_2^{20} + \frac{\sqrt{5}}{2}\,\mathrm{Im}\,a_2^{12}\Big). \quad (27)$$

Шуканий вираз для кутового розподілу розсіяного випромінювання тепер легко записується за допомогою (25)–(27) і відповідно до загальної формули (24).

Наступним кроком у теоретичному дослідженні комптон-розсіяння на зв'язаному електроні є знаходження динамічних параметрів $a_L^{l_1 l_2}$ для конкретної атомної системи, але в цій роботі ця задача не розглядається.

Одержані в роботі вирази для диференціального перерізу процесу комптон-ефекту на зв'язаному електроні і кутового розподілу розсіяного випромінювання в межах застосовності дипольного наближення мають загальний характер, не залежать від типу атомарної мішені та можуть використовуватись для подальших теоретичних розрахунків процесу розсіяння фотона, що супроводжується іонізацією атома, а також для аналізу експерименту.

Додаток

Для того щоб переписати скалярні добутки незвідних тензорів, утворених з векторів $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{e}$ та $\boldsymbol{e}'$ у (6), через скалярні і векторні добутки цих векторів, у роботі використано такі корисні співвідношення, наведені нижче.

Якщо $L = l_1 = l_2 = 0$, то добутки двох незвідних тензорів нульового рангу $\{\boldsymbol{e}\otimes\boldsymbol{e}'^*\}_{00}$ та $\{\boldsymbol{e}^*\otimes\boldsymbol{e}'\}_{00}$ у (6) записуються через скалярні добутки векторів [8]:

$$\{\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}'^*\}_{00} = -\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}'^*. \quad (28)$$

Коли $L = 0$, $l_1 = l_2 = 1$, то використовується правило для запису незвідного тензора першого рангу через векторні добутки [8]:

$$\{\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}\}_1 = \frac{i}{\sqrt{2}}[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}]. \quad (29)$$

Коли $L = 0$, $l_1 = l_2 = 2$, то маємо [8]

$$\{\{\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}\}_2\otimes\{\boldsymbol{c}\otimes\boldsymbol{d}\}_2\}_0 =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\Big[\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\boldsymbol{d}) +$$
$$+ \frac{1}{2}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}) - \frac{1}{3}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b})(\boldsymbol{c}\boldsymbol{d})\Big]. \quad (30)$$

Скаляр, що входить у (6), при $L = 2$, $l_1 = 0$, $l_2 = 2$ із врахуванням виразів (4), (7), можна записати за допомогою тотожностей (28), (30).

$$\big(\{\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}\}_2\cdot\{\{\boldsymbol{c}\otimes\boldsymbol{d}\}_0\otimes\{\boldsymbol{e}\otimes\boldsymbol{f}\}_2\}_2\big) =$$
$$= \{\boldsymbol{c}\otimes\boldsymbol{d}\}_0\{\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}\}_2\cdot\{\boldsymbol{e}\otimes\boldsymbol{f}\}_2. \quad (31)$$

Аналогічно розкривається скаляр при $L = 2$, $l_1 = 2$, $l_2 = 0$.

Усі інші скалярні добутки розписуються з (6) за допомогою тотожностей, отриманих у роботах [11; 12]:

$$\big(\{\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}\}_2\cdot\{\{\boldsymbol{c}\otimes\boldsymbol{d}\}_2\otimes\{\boldsymbol{e}\otimes\boldsymbol{f}\}_2\}_2\big) =$$
$$= -\sqrt{\frac{3}{7}}\Big\{\frac{1}{4}\big[(\boldsymbol{a}\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\boldsymbol{f})(\boldsymbol{e}\boldsymbol{d}) + (\boldsymbol{a}\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\boldsymbol{e})(\boldsymbol{d}\boldsymbol{f}) +$$
$$+ (\boldsymbol{a}\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\boldsymbol{f})(\boldsymbol{c}\boldsymbol{e}) + (\boldsymbol{a}\boldsymbol{d})(\boldsymbol{e}\boldsymbol{b})(\boldsymbol{c}\boldsymbol{f}) +$$

$$+ (\boldsymbol{ae})(\boldsymbol{bd})(\boldsymbol{cf}) + (\boldsymbol{af})(\boldsymbol{bd})(\boldsymbol{ce}) + \\ + (\boldsymbol{af})(\boldsymbol{bc})(\boldsymbol{ed})\big] - \frac{1}{3}\big[(\boldsymbol{ab})(\boldsymbol{ed})(\boldsymbol{cf}) + \\ + (\boldsymbol{ab})(\boldsymbol{df})(\boldsymbol{ce}) + (\boldsymbol{cd})(\boldsymbol{ae})(\boldsymbol{bf}) + \\ + (\boldsymbol{cd})(\boldsymbol{af})(\boldsymbol{be}) + (\boldsymbol{ef})(\boldsymbol{ac})(\boldsymbol{bd}) + \\ + (\boldsymbol{ef})(\boldsymbol{ad})(\boldsymbol{bc})\big] + \frac{4}{9}(\boldsymbol{ab})(\boldsymbol{cd})(\boldsymbol{ef})\Big\}, \quad (32)$$

$$\big(\{\{\{\boldsymbol{p}\otimes\boldsymbol{p}\}_2\otimes\boldsymbol{p}\}_3\otimes\boldsymbol{p}\}_4\cdot\{\{\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}\}_2\otimes\{\boldsymbol{c}\otimes\boldsymbol{d}\}_2\}_4\big) = \\ = (\boldsymbol{pa})(\boldsymbol{pb})(\boldsymbol{pc})(\boldsymbol{pd}) - \\ - \frac{1}{7}\big[(\boldsymbol{pa})(\boldsymbol{pc})(\boldsymbol{dd}) + (\boldsymbol{pa})(\boldsymbol{pd})(\boldsymbol{bc}) + \\ + (\boldsymbol{pb})(\boldsymbol{pc})(\boldsymbol{ad}) + (\boldsymbol{pb})(\boldsymbol{pd})(\boldsymbol{ac}) + \\ + (\boldsymbol{pa})(\boldsymbol{pb})(\boldsymbol{cd}) + (\boldsymbol{pc})(\boldsymbol{pd})(\boldsymbol{ab})\big] + \\ + \frac{1}{35}\big[(\boldsymbol{ac})(\boldsymbol{bd}) + (\boldsymbol{ad})(\boldsymbol{bc}) + (\boldsymbol{ab})(\boldsymbol{cd})\big], \quad (33)$$

$$\big(\{\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}\}_2\cdot\{\{\boldsymbol{c}\otimes\boldsymbol{d}\}_1\otimes\{\boldsymbol{e}\otimes\boldsymbol{f}\}_2\}_2\big) = \\ = \frac{1}{4\sqrt{3}}\big\{(\boldsymbol{ac})(\boldsymbol{bf})(\boldsymbol{de}) + (\boldsymbol{ac})(\boldsymbol{be})(\boldsymbol{df}) - \\ - (\boldsymbol{ad})(\boldsymbol{bf})(\boldsymbol{ce}) - (\boldsymbol{ad})(\boldsymbol{be})(\boldsymbol{cf}) + \\ + (\boldsymbol{af})(\boldsymbol{bc})(\boldsymbol{de}) + (\boldsymbol{ae})(\boldsymbol{bc})(\boldsymbol{df}) - \\ - (\boldsymbol{af})(\boldsymbol{bd})(\boldsymbol{ce}) - (\boldsymbol{ae})(\boldsymbol{bd})(\boldsymbol{cf})\big\}. \quad (34)$$

Тотожності (32), (34) одержані в роботі [11], а (33) — в [12].

Список літератури

1. Берестецкий В. Б. Квантовая электродинамика. Т. 4 / В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский. — М. : Наука, 1989. — 723 с.
2. Ахиезер А. И. Квантовая электродинамика / А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий. — М. : Наука, 1969. — 623 с.
3. DuMond J. W. M. The linear momenta of electrons in atoms and in solid bodies as revealed by x-ray scattering / Jesse W. M. DuMond // Rev. Mod. Phys. — 1933. — Vol. 5. — P. 1–33.
4. Горшков В. Г. Релятивистский комптон-эффект на связанном электроне / В. Г. Горшков, А. И. Михайлов, С. Г. Шерман // ЖЭТФ. — 1973. — Т. 64. — С. 1128–1140.
5. Рапопорт Л. П. Теория многофотонных процессов в атомах / Л. П. Рапопорт, Б. А. Зон, Н. Л. Манаков. — М. : АТОМИЗДАТ, 1978. — 167 с.
6. Nefiodova A. V. Ionization with excitation by Compton scattering of high-energy photons from helium-like ions in the metastable 1s2s1S and 1s2s3S states / A. V. Nefiodova, G. Plunien // Physics Letters A. — 2014. — Vol. 378. — P. 1022–1024.
7. Агре М. Я. Кінематика процесу двофотонної іонізації атомарних систем / М. Я. Агре // Наукові записки НаУКМА. — 2008. — Т. 74 : Фізико-математичні науки. — С. 45–56.
8. Варшалович Д. А. Квантовая теория углового момента / Д. А. Варшалович, А. Н. Москалев, В. К. Херсонский. — Л. : Наука, 1975. — 435 с.
9. Ландау Л. Д. Теория поля / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. — М. : Наука, 1967. — 460 с.
10. Агре М. Я. Рассеяние частично поляризованного света ориентированными атомами / М. Я. Агре // ЖЭТФ. — 2001. — Т. 120, вып. 3. — С. 562–569.
11. Агре М. Я. Круговой дихроизм в процессе рассеяния света выстроенными атомами, индуцируемый диссипацией световой энергии / М. Я. Агре // ЖЭТФ. — 1996. — Т. 110, вып. 6. — С. 2018–2027.
12. Агре М. Я. Проявление выстраивания второго порядка в рассеянии света поляризованными атомами / М. Я. Агре // Опт. и спектр. — 2003. — Т. 94, № 2. — С. 193–199.

M. Agre, D. Prosvirnova

KINEMATICS OF COMPTON EFFECT ON A BOUND ELECTRON

On the basis of general symmetry consideration the geometric part and dynamic parameters are separated in the analytical expression for differential cross section of Compton scattering on a bound electron. The analytical expression for the angular distribution of the scattered radiation is also derived. The polarization of the incoming photon can be arbitrary and in general case of partial polarization is specified by Stokes' parameters. The feature peculiar to the scattering on a bound electron and consisting in dependence of Compton scattering intensity on the sign of degree of circular polarization of incoming photon is found that leads to the circular dichroism effect — the difference of scattering intensity for right-hand and left-hand polarized photons.

Keywords: differential cross section, angular distribution, irreducible tensor, polarization, photon, circular dichroism.

Матеріал надійшов 16.02.2015