УДК 511.72

Ісаєва Т. М., Працьовитий М. В.

ГЕОМЕТРІЯ ТА ОСНОВИ МЕТРИЧНОЇ ТЕОРІЇ ЗЛІЧЕННО-СИМВОЛЬНОГО ЗОБРАЖЕННЯ ДІЙСНИХ ЧИСЕЛ ОДИНИЧНОГО ПІВІНТЕРВАЛУ

У роботі вводиться однопараметричне зображення дійсного числа одиничного півінтервалу, алфавітом якого є множина натуральних чисел, а кодування чисел здійснюється за допомогою знакопочережних рядів та їх частинних сум; вивчається геометрія цього зображення (властивості циліндрів); закладаються основи метричної теорії.

Ключові слова: зображення (кодування) числа, алфавіт зображення, геометрія чисел, циліндр, основне метричне відношення, міра Лебега, множина канторівського типу.

Вступ

Вважаючи відомою теорію дійсних чисел (наприклад, у формі дедекіндових перерізів (теорія Р. Дедекінда) або границь фундаментальних послідовностей (Г. Кантор) чи s-кових рядів (теорія К. Вейєрштраса), легко ввести формальне зображення числа, закодувавши (зобразивши) його засобами наперед заданого скінченного або нескінченного алфавіту. Таких систем зображення сьогодні в математиці та її застосуваннях існує багато. Лише двосимвольних систем використовується більше двох десятків [1].

Нескінченно-символьні системи зображення (наприклад, кодування чисел засобами елементарних ланцюгових дробів [2], рядів Люрота [3; 4], Енгеля [5], Сильвестера [6], Остроградського — Серпінського — Пірса [7] тощо) мають свою специфіку, породжують своєрідну геометрію і розширюють коло застосовності. Вказані зображення мають несамоподібну геометрію, що породжує значні труднощі при побудові і розвитку їх метричної теорії.

У цій роботі ми пропонуємо ще одну систему кодування дробової частини дійсного числа засобами нескінченного алфавіту, залежну від одного параметра $q \in (0,1)$ з N-самоподібною геометрією, яку ми вивчаємо. Для цієї системи зображення ми вказуємо на природність її походження і розв'язуємо ряд тополого-метричних задач.

Δ^q-зображення дробової частини дійсного числа

Нехай $(0;1) \ni q$ — фіксоване число.

Теорема 1. *Для будь-якого $x \in (0;1]$ існує скінченний набір $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ або послідовність (a_n) натуральних чисел таких, що*

$$x = q^{a_1-1} - (1-q)q^{a_1+a_2-2} + \ldots + (1-q)^{2k-2}q^{a_1+a_2+\ldots+a_{2k-1}-(2k-1)} - (1-q)^{2k-1}q^{a_1+a_2+\ldots+a_{2k}-2k} + \ldots = \sum_k (A_k - A'_k), \tag{1}$$

де

$$A_k = (1-q)^{2k-2}q^{a_1+a_2+\ldots+a_{2k-1}-(2k-1)},$$
$$A'_k = (1-q)^{2k-1}q^{a_1+a_2+\ldots+a_{2k}-2k}.$$

Доведення. Нехай x — довільне число з $(0;1]$. Оскільки $(0;1] = \bigcup_{n=1}^{\infty}(q^n; q^{n-1}]$, то очевидно, що існує $a_1 \in \mathbb{N}$ таке, що

$$q^{a_1} < x \leq q^{a_1-1},$$
$$q^{a_1} - q^{a_1-1} < x - q^{a_1-1} \equiv x_1 \leq 0,$$
$$-(1-q)q^{a_1-1} < x_1 \leq 0.$$

Якщо $x_1 = 0$, то $x = q^{a_1-1}$. Нехай $x_1 \neq 0$. Оскільки

$$x_1 \in \left(-(1-q)q^{a_1-1}; 0\right] = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(-(1-q)q^{a_1+(n-1)-1}; -(1-q)q^{a_1+n-1}\right],$$

то очевидно, що існує $a_2 \in \mathbb{N}$ таке, що

$$-(1-q)q^{a_1+a_2-2} \leq x_1 < -(1-q)q^{a_1+a_2-1},$$
$$0 \leq x_2 \equiv x_1 + (1-q)q^{a_1+a_2-2} < (1-q)^2q^{a_1+a_2-2},$$
$$0 \leq x_2 < (1-q)^2q^{a_1+a_2-2}.$$

Якщо $x_2 = 0$, то $x = q^{a_1-1} - (1-q)q^{a_1+a_2-2}$. Якщо ж $x_2 \neq 0$, то $|x_2| < (1-q)^2q^{a_1+a_2-2}$.

Оскільки

$$x_2 \in \left(0; (1-q)^2q^{a_1+a_2-2}\right] = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left((1-q)^2q^{a_1+a_2+n-1}; (1-q)^2q^{a_1+a_2+(n-1)-1}\right],$$

то існує $a_3 \in \mathbb{N}$ таке, що

$$(1-q)^2q^{a_1+a_2+a_3-2} < x_2 \leq (1-q)^2q^{a_1+a_2+a_3-3},$$

$$-(1-q)^3 q^{a_1+a_2+a_3-3} <$$
$$< x_2 - (1-q)^2 q^{a_1+a_2+a_3-3} \equiv x_3 \leq 0,$$
$$-(1-q)^3 q^{a_1+a_2+a_3-3} < x_3 \leq 0.$$

Якщо $x_3 = 0$, то

$$x = q^{a_1-1} - (1-q)q^{a_1+a_2-2} + (1-q)^2 q^{a_1+a_2+a_3-3}.$$

Якщо $x_3 \neq 0$, то $|x_3| < (1-q)^3 q^{a_1+a_2+a_3-3}$. І т. д.

Якщо при деякому натуральному k $x_k = 0$, то отримаємо скінченний розклад числа x. Якщо ж $x_k \neq 0$ для жодного $k \in \mathbb{N}$, то матимемо нескінченний, але збіжний процес, оскільки $q \in (0;1)$, а отже, $x_k \to 0$ при $k \to \infty$. І тому

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \big((1-q)^{2k-2} q^{a_1+a_2+\ldots+a_{2k-1}-(2k-1)} - - (1-q)^{2k-1} q^{a_1+a_2+\ldots+a_{2k}-2k}\big),$$

що й треба було довести.

Подання числа x у формі суми (1) називається його Δ^q-*представленням*, а його символічний запис $\Delta^q_{a_1a_2\ldots a_n\ldots}$ у випадку нескінченної суми та $\Delta^q_{a_1a_2\ldots a_n(0)}$ у випадку скінченного розкладу — Δ^q-*зображенням* (зауважимо, що період (0) у наведеному скороченому записі є чисто символічним). Це зображення є однопараметричним узагальненням $\Delta^\sharp$-зображення дійсних чисел [8; 9] при $q = \frac{1}{2}$.

Задача, яка приводить до поняття Δ^q-зображення

Розглядається випадкова величина ξ, представлена елементарним ланцюговим дробом

$$\xi = [0; \eta_1, \eta_2, \ldots],$$

елементи η_n якого утворюють послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин, які набувають значень $1, 2, 3, \ldots, k, \ldots$ з ймовірностями $(1-q)$, $(1-q)q, \ldots,$ $(1-q)q^{k-1}, \ldots,$ для будь-якого $q \in (0;1)$ відповідно.

Знайдемо вираз функції розподілу F_ξ випадкової величини ξ. Оскільки згідно з означенням

$$F_\xi(x) = P\{\xi < x\},$$

то проаналізуємо подію $\{\xi < x\}$ і виразимо її ймовірність.

Враховуючи геометрію ланцюгового представлення (зображення) чисел, маємо

$$\{\xi < x\} = \{\eta_1 > a_1(x)\} \cup$$
$$\cup \{\eta_1 = a_1(x) \wedge \eta_2 < a_2(x)\} \cup \ldots \cup$$
$$\cup \{\eta_i = a_i(x) \text{ при } i = \overline{1, 2k-1} \wedge \eta_{2k} < a_{2k}(x)\} \cup$$
$$\cup \{\eta_i = a_i(x) \text{ при } i = \overline{1, 2k} \wedge \eta_{2k+1} > a_{2k+1}(x)\} \cup \ldots,$$

де події в об'єднанні попарно несумісні.

Враховуючи незалежність випадкових величин η_n, знайдемо вирази ймовірностей подій, які беруть участь в останньому об'єднанні:

$$P\{\eta_1 > a_1(x)\} = \sum_{n=1}^{\infty} P\{\eta_1 = a_1(x) + n\} =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} (1-q) q^{a_1(x)+n-1} = q^{a_1(x)};$$

$$P\{\eta_i = a_i(x) \text{ при } i = \overline{1, 2k-1} \wedge \eta_{2k} < a_{2k}(x)\} =$$
$$= \prod_{i=1}^{2k-1} P\{\eta_i = a_i(x)\} \cdot \sum_{j=1}^{a_{2k}(x)-1} P\{\eta_{2k} = j\} =$$
$$= \prod_{i=1}^{2k-1} (1-q) q^{a_i(x)-1} \cdot \sum_{j=1}^{a_{2k}(x)-1} (1-q) q^{j-1} =$$
$$= (1-q)^{2k-1} q^{a_1+a_2+\ldots+a_{2k-1}-(2k-1)} \times$$
$$\times (1 - q^{a_{2k}-1}) =$$
$$= (1-q)^{2k-1} q^{a_1+a_2+\ldots+a_{2k-1}-(2k-1)} -$$
$$- (1-q)^{2k-1} q^{a_1+a_2+\ldots+a_{2k-1}+a_{2k}-2k};$$

$$P\{\eta_i = a_i(x) \text{ при } i = \overline{1, 2k} \wedge \eta_{2k+1} > a_{2k+1}(x)\} =$$
$$= \prod_{i=1}^{2k} P\{\eta_i = a_i(x)\} \cdot \sum_{j=a_{2k+1}(x)+1}^{\infty} P\{\eta_{2k+1} = j\} =$$
$$= \prod_{i=1}^{2k} (1-q) q^{a_i(x)-1} \cdot \sum_{j=a_{2k+1}(x)+1}^{\infty} (1-q) q^{j-1} =$$
$$= (1-q)^{2k} q^{a_1+a_2+\ldots+a_{2k}-2k} \cdot q^{a_{2k+1}} =$$
$$= (1-q)^{2k} q^{a_1+a_2+\ldots+a_{2k}+a_{2k+1}-2k}.$$

Тоді

$$P\{\xi < x\} = q^{a_1} + \sum_{k=1}^{\infty} \big[(1-q)^{2k-1} \times$$
$$\times q^{a_1+\ldots+a_{2k-1}-(2k-1)} -$$
$$- (1-q)^{2k-1} q^{a_1+a_2+\ldots+a_{2k-1}+a_{2k}-2k} +$$
$$+ (1-q)^{2k} q^{a_1+a_2+\ldots+a_{2k}+a_{2k+1}-2k}\big] =$$
$$= q^{a_1} + (1-q)q^{a_1-1} - (1-q)q^{a_1+a_2-2} +$$
$$+ (1-q)^2 \cdot q^{a_1+a_2+a_3-2} +$$
$$+ (1-q)^3 \cdot q^{a_1+a_2+a_3-3} -$$
$$- (1-q)^3 \cdot q^{a_1+a_2+a_3+a_4-4} +$$
$$+ (1-q)^4 \cdot q^{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5-4} + \ldots =$$
$$= q^{a_1-1} - (1-q)q^{a_1+a_2-2} +$$
$$+ (1-q)^2 q^{a_1+a_2+a_3-3} -$$
$$- (1-q)^3 q^{a_1+a_2+a_3+a_4-4} + \ldots +$$
$$+ (1-q)^{2k-2} q^{a_1+a_2+\ldots+a_{2k-1}-(2k-1)} -$$
$$- (1-q)^{2k-1} q^{a_1+a_2+\ldots+a_{2k}-2k} + \ldots =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\big((1-q)^{2k-2}q^{a_1+a_2+\ldots+a_{2k-1}-(2k-1)} - \\ -(1-q)^{2k-1}q^{a_1+a_2+\ldots+a_{2k}-2k}\big).$$

Таким чином, вираз значення функції розподілу $F_\xi(x)$ в ірраціональних точках x інтервалу $(0;1)$ є Δ^q-представленням числа x.

Геометрія циліндричного Δ^q-зображення дійсних чисел

Означення 1. Нехай $(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ — впорядкований набір натуральних чисел.

Циліндром рангу m з основою $c_1c_2\ldots c_m$ називається множина $\Delta^q_{c_1c_2\ldots c_m}$ чисел $x \in (0,1]$, які мають Δ^q-зображення таке, що $a_i(x) = c_i$, $i = \overline{1,m}$.

Циліндри мають такі властивості:

1. $\bigcup_{c_1=1}^{\infty}\cdots\bigcup_{c_m=1}^{\infty}\Delta^q_{c_1c_2\ldots c_m} = (0,1]$, $\forall m \in \mathbb{N}$;
2. $\Delta^q_{c_1c_2\ldots c_m} = \bigcup_{i=1}^{\infty}\Delta^q_{c_1c_2\ldots c_m i}$;
3. $\inf\Delta^q_{c_1c_2\ldots c_{2k-1}i} = \sup\Delta^q_{c_1c_2\ldots c_{2k-1}(i+1)}$; $\sup\Delta^q_{c_1c_2\ldots c_{2k}i} = \inf\Delta^q_{c_1c_2\ldots c_{2k}(i+1)}$;
4. Для діаметра циліндра виконується рівність $d(\Delta^q_{c_1c_2\ldots c_m}) = (1-q)^m\cdot q^{c_1+c_2+\ldots+c_m-m}$;
5. Циліндри одного рангу не перетинаються або співпадають (рівні), причому $\Delta^q_{c_1c_2\ldots c_m} = \Delta^q_{c'_1c'_2\ldots c'_m} \Leftrightarrow c_i = c'_i$, $\quad i = \overline{1,m}$;
6. Для довільної послідовності (c_m), $c_m \in \mathbb{N}$ переріз $\bigcap_{m=1}^{\infty}\Delta^q_{c_1c_2\ldots c_m} = x \equiv \Delta^q_{c_1c_2\ldots c_m\ldots}$ є точкою півінтервалу $(0;1]$.

Лема 2. *Циліндр $\Delta^q_{c_1c_2\ldots c_m}$ є відрізком, причому*

$$\Delta^q_{c_1c_2\ldots c_m} = [a-\delta; a], \quad \text{коли } m = 2k-1, \text{ і}$$
$$\Delta^q_{c_1c_2\ldots c_m} = [a; a+\delta], \quad \text{коли } m = 2k,$$

де

$$\delta = (1-q)^m\cdot q^{c_1+c_2+\ldots+c_m-m},$$
$$a = q^{c_1-1} - (1-q)q^{c_1+c_2-2} + \ldots + \\ + (-1)^{m-1}(1-q)^{m-1}q^{c_1+c_2+\ldots+c_m-m}.$$

Доведення. Введемо позначення $C \equiv \Delta^q_{c_1c_2\ldots c_m}$, $A \equiv [a-\delta; a]$, $B \equiv [a; a+\delta]$.

1. Розглянемо випадок, коли $m = 2k-1$. Покажемо, що $C \subset A$.

Нехай $x = \Delta^q_{c_1c_2\ldots c_m\ldots}$ — довільний елемент множини C, тобто

$$x = q^{c_1-1} - (1-q)q^{c_1+c_2-2} + \ldots + \\ + (1-q)^{2k-2}q^{c_1+c_2+\ldots+c_{2k-1}-(2k-1)} - \\ - (1-q)^{2k-1}q^{c_1+c_2+\ldots+c_{2k-1}-(2k-1)}\times \\ \times\underbrace{(q^{a_{2k}-1} - (1-q)q^{a_{2k}+a_{2k+1}-2} + \ldots)}_{x_{2k}}.$$

Тоді

$$\min C = q^{c_1-1} - (1-q)q^{c_1+c_2-2} + \ldots + \\ + (1-q)^{2k-2}q^{c_1+c_2+\ldots+c_{2k-1}-(2k-1)} - \\ - (1-q)^{2k-1}q^{c_1+c_2+\ldots+c_{2k-1}-(2k-1)} = a-\delta,$$

що досягається при $x_{2k} = q^{1-1} = 1$, а

$$\max C = q^{c_1-1} - (1-q)q^{c_1+c_2-2} + \ldots + \\ + (1-q)^{2k-2}q^{c_1+c_2+\ldots+c_{2k-1}-(2k-1)} = a.$$

Отже, $x \in [a-\delta; a]$, а це означає, що $C \subset A$.

Доведемо тепер таке включення: $A \subset C$. Нехай $x \in [a-\delta; a]$. Покажемо, що в цьому випадку або

$$x = \Delta^q_{c_1c_2\ldots c_{2k-1}(0)}, \quad \text{або} \tag{2}$$
$$x = \Delta^q_{c_1c_2\ldots c_{2k-1}a_{2k}a_{2k+1}\ldots a_{2k+n}(0)}, \quad \text{або} \tag{3}$$
$$x = \Delta^q_{c_1c_2\ldots c_{2k-1}a_{2k}a_{2k+1}\ldots}, \tag{4}$$

де $a_{2k+j} \in \mathbb{N}$, тобто, що $x \in C$, а отже, $A \subset C$.

Справді, якщо $x = a$, то очевидно, що виконується рівність (2); якщо $x = a-\delta$, то виконується рівність (3), а саме: $x = a-\delta = \Delta^q_{c_1c_2\ldots c_{2k-1}1(0)}$. Нехай тепер $a-\delta < x < a$. Покажемо, що в цьому випадку $a_i(x) = c_i$ для всіх $i \le m = 2k-1$. Для цього скористаємось методом від супротивного. Припустимо, що існує $a_i(x) = c'_i \ne c_i$ при $i \le 2k-1$.

Випадок A. Розглянемо число

$$x' = \Delta^q_{c_1c_2\ldots c_{i-1}c'_i(0)}.$$

Тоді або $c'_i < c_i$, або $c'_i > c_i$, причому або $i = 2j-1$, або $i = 2j$.

A.1. Розглянемо випадок, коли $c'_{2j-1} < c_{2j-1}$. Тоді різниця

$$x' - a = (1-q)^{2j-2}q^{c_1+\ldots+c_{2j-2}+c'_{2j-1}-(2j-1)} - \\ - \big((1-q)^{2j-2}q^{c_1+\ldots+c_{2j-1}-(2j-1)} - \\ - (1-q)^{2j-1}q^{c_1+\ldots+c_{2j}-2j} + \ldots + \\ + (1-q)^{2k-2}q^{c_1+\ldots+c_{2k-1}-(2k-1)}\big) \ge \\ \ge (1-q)^{2j-2}q^{c_1+\ldots+c_{2j-2}+c'_{2j-1}-(2j-1)} - \\ - (1-q)^{2j-2}q^{c_1+\ldots+c_{2j-1}-(2j-1)} > 0.$$

A.2. Якщо $c'_{2j-1} > c_{2j-1}$, то різниця

$$x' - a = (1-q)^{2j-2}q^{c_1+\ldots+c_{2j-2}+c'_{2j-1}-(2j-1)} - \\ - \big((1-q)^{2j-2}q^{c_1+\ldots+c_{2j-1}-(2j-1)} - \\ - (1-q)^{2j-1}q^{c_1+\ldots+c_{2j}-2j} + \ldots + \\ + (1-q)^{2k-2}q^{c_1+\ldots+c_{2k-1}-(2k-1)}\big) \le \\ \le (1-q)^{2j-2}q^{c_1+\ldots+c_{2j-2}+c'_{2j-1}-(2j-1)} - \\ - (1-q)^{2j-2}q^{c_1+\ldots+c_{2j-1}-(2j-1)} < \\ < -(1-q)^{2k-1}\times \\ \times q^{c_1+\ldots+c_{2j-1}+\ldots+c_{2k-1}-(2k-1)} = -\delta.$$

Отже, число x' лежить за межами інтервалу $(a-\delta; a)$. Аналогічно міркуючи, можна показати, що у випадках, коли $c'_{2j} < c_{2j}$ і $c'_{2j} > c_{2j}$, число x' також лежить за межами інтервалу $(a-\delta; a)$. Таким чином, з $x \in A$ випливає, що $a_i(x) = c_i$ для всіх $i \le 2k-1$ і має місце рівність (4), тобто $x \in C$.

Випадок B. Розглянемо тепер число

$$x' = \Delta^q_{c_1c_2\ldots c_{i-1}c'_ia_{i+1}\ldots a_{i+n}(0)}.$$

Тоді також або $c'_i < c_i$, або $c'_i > c_i$, причому i може бути парне чи непарне.

B.1. Нехай $c'_{2j-1} > c_{2j-1}$. Тоді різниця

$$\begin{aligned} x'-a &= \big((1-q)^{2j-2}q^{c_1+\ldots+c_{2j-2}+c'_{2j-1}-(2j-1)} - \\ &\quad - (1-q)^{2j-1}q^{c_1+\ldots+c'_{2j-1}+a_{2j}-2j} + \ldots + \\ &\quad + (1-q)^{2(j+n)-2}q^{c_1+\ldots+c'_{2j-1}} \times \\ &\qquad \times q^{a_{2j}+\ldots+a_{2(j+n)-1}-(2(j+n)-1)}\big) - \\ &\quad - \big((1-q)^{2j-2}q^{c_1+\ldots+c_{2j-1}-(2j-1)} - \\ &\quad - (1-q)^{2j-1}q^{c_1+\ldots+c_{2j}-2j} + \ldots + \\ &\quad + (1-q)^{2k-2}q^{c_1+\ldots+c_{2k-1}-(2k-1)}\big) \le \\ &\le (1-q)^{2j-2}q^{c_1+\ldots+c_{2j-2}+c'_{2j-1}-(2j-1)} - \\ &\quad - (1-q)^{2j-2}q^{c_1+\ldots+c_{2j-1}-(2j-1)} < \\ &< -(1-q)^{2k-1} \times \\ &\qquad \times q^{c_1+\ldots+c_{2j-1}+\ldots+c_{2k-1}-(2k-1)} = -\delta. \end{aligned}$$

B.2. Якщо $c'_{2j} > c_{2j}$, то

$$\begin{aligned} x'-a &= \big(-(1-q)^{2j-1}q^{c_1+\ldots+c_{2j-1}+c'_{2j}-2j} + \\ &\quad + (1-q)^{2j}q^{c_1+\ldots+c'_{2j}+a_{2j+1}-(2j+1)} + \ldots + \\ &\quad + (1-q)^{2(j+n)-2}q^{c_1+\ldots+c'_{2j}} \times \\ &\qquad \times q^{a_{2j+1}+\ldots+a_{2(j+n)-1}-(2(j+n)-1)}\big) - \\ &\quad - \big(-(1-q)^{2j-1}q^{c_1+\ldots+c_{2j}-2j} + \\ &\quad + (1-q)^{2j}q^{c_1+\ldots+c_{2j+1}-(2j+1)} + \ldots + \\ &\quad + (1-q)^{2k-2} \times \\ &\qquad \times q^{c_1+\ldots+c_{2j}+\ldots+c_{2k-1}-(2k-1)}\big) \ge \\ &\ge -(1-q)^{2j-1}q^{c_1+\ldots+c_{2j-1}+c'_{2j}-2j} + \\ &\quad + (1-q)^{2j-1}q^{c_1+\ldots+c_{2j}-2j} > 0. \end{aligned}$$

Аналогічно, коли $c'_{2j} < c_{2j}$ і $c'_{2j-1} < c_{2j-1}$, можна показати, що число x' лежить за межами інтервалу $(a-\delta; a)$.

Випадок C. Розглянемо тепер число

$$x' = \Delta^q_{c_1c_2\ldots c_{i-1}c'_ia_{i+1}a_{i+2}\ldots}.$$

У цьому випадку також або $c'_i < c_i$, або $c'_i > c_i$, причому i може бути непарним чи парним числом.

C.1. Нехай $c'_{2j} < c_{2j}$. Тоді різниця

$$\begin{aligned} x'-a &= \big(-(1-q)^{2j-1}q^{c_1+\ldots+c_{2j-1}+c'_{2j}-2j} + \\ &\quad + (1-q)^{2j} \times \\ &\qquad \times q^{c_1+\ldots+c'_{2j}+a_{2j+1}-(2j+1)} - \ldots\big) - \\ &\quad - \big(-(1-q)^{2j-1}q^{c_1+\ldots+c_{2j}-2j} + \\ &\quad + (1-q)^{2j}q^{c_1+\ldots+c_{2j+1}-(2j+1)} - \ldots + \\ &\quad + (1-q)^{2k-2}q^{c_1+\ldots+c_{2k-1}-(2k-1)}\big) = \\ &= \big(-(1-q)^{2j-1}q^{c_1+\ldots+c_{2j-1}+c'_{2j}-2j} + \\ &\quad + (1-q)^{2j-1}q^{c_1+\ldots+c_{2j}-2j}\big) + \\ &\quad + \big((1-q)^{2j}q^{c_1+\ldots+c'_{2j}+a_{2j+1}-(2j+1)} - \\ &\quad - (1-q)^{2j}q^{c_1+\ldots+c_{2j+1}-(2j+1)}\big) - \ldots \le \\ &\le -(1-q)^{2j-1}q^{c_1+\ldots+c_{2j-1}+c'_{2j}-2j} + \\ &\quad + (1-q)^{2j-1}q^{c_1+\ldots+c_{2j}-2j} < \\ &< -(1-q)^{2k-1} \times \\ &\qquad \times q^{c_1+\ldots+c_{2j-1}+\ldots+c_{2k-1}-(2k-1)} = -\delta. \end{aligned}$$

C.2. При $c'_{2j} > c_{2j}$ різниця

$$\begin{aligned} x'-a &= \big(-(1-q)^{2j-1}q^{c_1+\ldots+c_{2j-1}+c'_{2j}-2j} + \\ &\quad + (1-q)^{2j} \times \\ &\qquad \times q^{c_1+\ldots+c'_{2j}+a_{2j+1}-(2j+1)} - \ldots\big) - \\ &\quad - \big(-(1-q)^{2j-1}q^{c_1+\ldots+c_{2j}-2j} + \\ &\quad + (1-q)^{2j}q^{c_1+\ldots+c_{2j+1}-(2j+1)} - \ldots + \\ &\quad + (1-q)^{2k-2}q^{c_1+\ldots+c_{2k-1}-(2k-1)}\big) = \\ &= \big(-(1-q)^{2j-1}q^{c_1+\ldots+c_{2j-1}+c'_{2j}-2j} + \\ &\quad + (1-q)^{2j-1}q^{c_1+\ldots+c_{2j}-2j}\big) + \\ &\quad + \big((1-q)^{2j}q^{c_1+\ldots+c'_{2j}+a_{2j+1}-(2j+1)} - \\ &\quad - (1-q)^{2j}q^{c_1+\ldots+c_{2j+1}-(2j+1)}\big) - \ldots \ge \\ &\ge -(1-q)^{2j-1}q^{c_1+\ldots+c_{2j-1}+c'_{2j}-2j} + \\ &\quad + (1-q)^{2j-1}q^{c_1+\ldots+c_{2j}-2j} > 0. \end{aligned}$$

Аналогічно можна довести, що число x' лежить поза інтервалом $(a-\delta; a)$, коли $c'_{2j-1} > c_{2j-1}$ і $c'_{2j-1} < c_{2j-1}$.

Отже, x не може мати зображення, відмінне від (2)–(4), а це означає, що $x \in C$ і $A \subset C$. Враховуючи першу частину доведення, маємо $C \subset A$ і $A \subset C$, тобто $A = C$. Таким чином, при $m = 2k-1$ циліндр $\Delta^q_{c_1c_2\ldots c_m}$ є відрізком $[a-\delta; a]$.

2. Розглянемо тепер випадок, коли $m = 2k$. Покажемо, що $C \subset B$.

Нехай $x = \Delta^q_{c_1c_2\ldots c_m\ldots}$ — довільний елемент множини C, тобто

$$\begin{aligned} x &= q^{c_1-1} - (1-q)q^{c_1+c_2-2} + \\ &\quad + (1-q)^2q^{c_1+c_2+c_3-3} - \\ &\quad - (1-q)^3q^{c_1+c_2+c_3+c_4-4} + \ldots - \\ &\quad - (1-q)^{2k-1}q^{c_1+c_2+\ldots+c_{2k}-2k} + \end{aligned}$$

$$+ (1-q)^{2k} q^{c_1+c_2+\ldots+c_{2k}-2k} \times \\ \times \underbrace{\left(q^{a_{2k+1}-1} - (1-q) q^{a_{2k+1}+a_{2k+2}-2} + \ldots\right)}_{x_{2k+1}}.$$

Тоді

$$\max C = q^{c_1-1} - (1-q) q^{c_1+c_2-2} + \ldots - \\ - (1-q)^{2k-1} q^{c_1+c_2+\ldots+c_{2k}-2k} + \\ + (1-q)^{2k} q^{c_1+c_2+\ldots+c_{2k}-(2k)} = a+\delta,$$

що досягається при $x_{2k+1} = q^{1-1} = 1$, а

$$\min C = q^{c_1-1} - (1-q) q^{c_1+c_2-2} + \ldots - \\ - (1-q)^{2k-1} q^{c_1+c_2+\ldots+c_{2k}-2k} = a.$$

Отже, $x \in [a; a+\delta]$, а це означає, що $C \subset B$.

Доведемо тепер таке включення: $B \subset C$. Нехай $x \in [a; a+\delta]$. Покажемо, що в цьому випадку або

$$x = \Delta^q_{c_1c_2\ldots c_{2k}(0)}, \quad \text{або} \qquad (5)$$

$$x = \Delta^q_{c_1c_2\ldots c_{2k}a_{2k+1}a_{2k+2}\ldots a_{2k+n}(0)}, \quad \text{або} \qquad (6)$$

$$x = \Delta^q_{c_1c_2\ldots c_{2k}a_{2k+1}a_{2k+2}\ldots}, \qquad (7)$$

де $a_{2k+j} \in \mathbb{N}$, тобто, що $x \in C$, а отже, $B \subset C$.

Справді, якщо $x = a$, то очевидно, що виконується рівність (5); якщо $x = a+\delta$, то виконується рівність (6), а саме: $x = a+\delta = \Delta^q_{c_1c_2\ldots c_{2k-1}1(0)}$. Нехай тепер $a < x < a+\delta$. Покажемо, що в цьому випадку $a_i(x) = c_i$ для всіх $i \le m = 2k$. Для цього скористаємось методом від супротивного. Припустимо, що існує $a_i(x) = c'_i \neq c_i$ при $i \le 2k$.

Випадок A. Розглянемо число

$$x' = \Delta^q_{c_1c_2\ldots c_{i-1}c'_i(0)}.$$

Тоді або $c'_i < c_i$, або $c'_i > c_i$, причому або $i = 2j-1$, або $i = 2j$.

A.1. Якщо $c'_{2j} > c_{2j}$, то

$$x' - a = -(1-q)^{2j-1} q^{c_1+\ldots+c_{2j-1}+c'_{2j}-2j} - \\ - \left(-(1-q)^{2j-1} q^{c_1+\ldots+c_{2j}-2j} + \\ + (1-q)^{2j} q^{c_1+\ldots+c_{2j+1}-(2j+1)} - \ldots - \\ - (1-q)^{2k-1} q^{c_1+\ldots+c_{2k}-2k}\right) \ge \\ \ge -(1-q)^{2j-1} q^{c_1+\ldots+c_{2j-1}+c'_{2j}-2j} + \\ + (1-q)^{2j-1} q^{c_1+\ldots+c_{2j}-2j} > \\ > (1-q)^{2k} q^{c_1+\ldots+c_{2k}-2k} = \delta.$$

A.2. Якщо ж $c'_{2j} < c_{2j}$, то різниця

$$x' - a = -(1-q)^{2j-1} q^{c_1+\ldots+c_{2j-1}+c'_{2j}-2j} - \\ - \left(-(1-q)^{2j-1} q^{c_1+\ldots+c_{2j}-2j} + \\ + (1-q)^{2j} q^{c_1+\ldots+c_{2j+1}-(2j+1)} - \ldots - \\ - (1-q)^{2k-1} q^{c_1+\ldots+c_{2k}-2k}\right) \le \\ \le -(1-q)^{2j-1} q^{c_1+\ldots+c_{2j-1}+c'_{2j}-2j} + \\ + (1-q)^{2j-1} q^{c_1+\ldots+c_{2j}-2j} < 0.$$

Отже, число x' лежить за межами інтервалу $(a; a+\delta)$. Аналогічним чином можна показати, що у випадках, коли $c'_{2j-1} < c_{2j-1}$ і $c'_{2j-1} > c_{2j-1}$, число $x' \notin (a; a+\delta)$. Таким чином, з $x \in B$ випливає, що $a_i(x) = c_i$ для всіх $i \le 2k$ і має місце рівність (7), тобто $x \in C$.

Випадок B. Розглянемо тепер число

$$x' = \Delta^q_{c_1c_2\ldots c_{i-1}c'_ia_{i+1}\ldots a_{i+n}(0)}.$$

Тоді також або $c'_i < c_i$, або $c'_i > c_i$, причому i може бути парне чи непарне.

B.1. Розглянемо випадок, коли $c'_{2j-1} > c_{2j-1}$. Тоді різниця

$$x' - a = \left((1-q)^{2j-2} q^{c_1+\ldots+c_{2j-2}+c'_{2j-1}-(2j-1)} - \\ - (1-q)^{2j-1} q^{c_1+\ldots+c'_{2j-1}+a_{2j}-2j} + \ldots - \\ - (1-q)^{2(j+n)-1} q^{c_1+\ldots+c'_{2j-1}} \times \\ \times q^{a_{2j}+\ldots+a_{2(j+n)}-2(j+n)}\right) - \\ - \left((1-q)^{2j-2} q^{c_1+\ldots+c_{2j-1}-(2j-1)} - \\ - (1-q)^{2j-1} q^{c_1+\ldots+c_{2j}-2j} + \ldots - \\ - (1-q)^{2k-1} q^{c_1+\ldots+c_{2k}-2k}\right) \le \\ \le (1-q)^{2j-2} q^{c_1+\ldots+c_{2j-2}+c'_{2j-1}-(2j-1)} - \\ - (1-q)^{2j-2} q^{c_1+\ldots+c_{2j-1}-(2j-1)} < 0.$$

B.2. Якщо $c'_{2j} > c_{2j}$, то

$$x' - a = \left(-(1-q)^{2j-1} q^{c_1+\ldots+c_{2j-1}+c'_{2j}-2j} + \\ + (1-q)^{2j} q^{c_1+\ldots+c'_{2j}+a_{2j+1}-(2j+1)} + \ldots - \\ - (1-q)^{2(j+n)-1} q^{c_1+\ldots+c'_{2j}} \times \\ \times q^{a_{2j+1}+\ldots+a_{2(j+n)}-2(j+n)}\right) - \\ - \left(-(1-q)^{2j-1} q^{c_1+\ldots+c_{2j}-2j} + \\ + (1-q)^{2j} q^{c_1+\ldots+c_{2j+1}-(2j+1)} + \ldots - \\ - (1-q)^{2k-1} q^{c_1+\ldots+c_{2j}+\ldots+c_{2k}-2k}\right) \ge \\ \ge -(1-q)^{2j-1} q^{c_1+\ldots+c_{2j-1}+c'_{2j}-2j} + \\ + (1-q)^{2j-1} q^{c_1+\ldots+c_{2j}-2j} > \\ > (1-q)^{2k} q^{c_1+\ldots+c_{2k}-2k} = \delta.$$

Аналогічно можна довести, що число x' лежить поза інтервалом $(a; a+\delta)$, коли $c'_{2j-1} < c_{2j-1}$ і $c'_{2j} < c_{2j}$.

Випадок C. Розглянемо тепер число

$$x' = \Delta^q_{c_1c_2\ldots c_{i-1}c'_ia_{i+1}a_{i+2}\ldots}.$$

У цьому випадку також або $c'_i < c_i$, або $c'_i > c_i$, причому i може бути непарним чи парним числом.

С.1. Розглянемо випадок, коли $c'_{2j-1} < c_{2j-1}$. Тоді різниця

$$\begin{aligned} x' - a &= \big((1-q)^{2j-2}q^{c_1+\ldots+c_{2j-2}+c'_{2j-1}-(2j-1)} - \\ &\quad - (1-q)^{2j-1}q^{c_1+\ldots+c'_{2j-1}+a_{2j}-2j} + \ldots\big) - \\ &\quad - \big((1-q)^{2j-2}q^{c_1+\ldots+c_{2j-1}-(2j-1)} - \\ &\quad - (1-q)^{2j-1}q^{c_1+\ldots+c_{2j}-2j} + \ldots - \\ &\quad - (1-q)^{2k-1}q^{c_1+\ldots+c_{2k}-2k}\big) = \\ &= \big((1-q)^{2j-2}q^{c_1+\ldots+c_{2j-2}+c'_{2j-1}-(2j-1)} - \\ &\quad - (1-q)^{2j-2}q^{c_1+\ldots+c_{2j-1}-(2j-1)}\big) - \\ &\quad - \big((1-q)^{2j-1}q^{c_1+\ldots+c'_{2j-1}+a_{2j}-2j} - \\ &\quad - (1-q)^{2j-1}q^{c_1+\ldots+c_{2j}-2j}\big) + \ldots \geq \\ &\geq (1-q)^{2j-2}q^{c_1+\ldots+c_{2j-2}+c'_{2j-1}-(2j-1)} - \\ &\quad - (1-q)^{2j-2}q^{c_1+\ldots+c_{2j-1}-(2j-1)} > \\ &> (1-q)^{2k}q^{c_1+\ldots+c_{2k}-2k} = \delta. \end{aligned}$$

С.2. Нехай тепер $c'_{2j-1} > c_{2j-1}$. Тоді різниця

$$\begin{aligned} x' - a &= \big((1-q)^{2j-2}q^{c_1+\ldots+c_{2j-2}+c'_{2j-1}-(2j-1)} - \\ &\quad - (1-q)^{2j-1}q^{c_1+\ldots+c'_{2j-1}+a_{2j}-2j} + \ldots\big) - \\ &\quad - \big((1-q)^{2j-2}q^{c_1+\ldots+c_{2j-1}-(2j-1)} - \\ &\quad - (1-q)^{2j-1}q^{c_1+\ldots+c_{2j}-2j} + \ldots - \\ &\quad - (1-q)^{2k-1}q^{c_1+\ldots+c_{2k}-2k}\big) = \\ &= \big((1-q)^{2j-2}q^{c_1+\ldots+c_{2j-2}+c'_{2j-1}-(2j-1)} - \\ &\quad - (1-q)^{2j-2}q^{c_1+\ldots+c_{2j-1}-(2j-1)}\big) - \\ &\quad - \big((1-q)^{2j-1}q^{c_1+\ldots+c'_{2j-1}+a_{2j}-2j} - \\ &\quad - (1-q)^{2j-1}q^{c_1+\ldots+c_{2j}-2j}\big) + \ldots \leq \\ &\leq (1-q)^{2j-2}q^{c_1+\ldots+c_{2j-2}+c'_{2j-1}-(2j-1)} - \\ &\quad - (1-q)^{2j-2}q^{c_1+\ldots+c_{2j-1}-(2j-1)} < 0. \end{aligned}$$

Так само міркуючи, можна довести, що число $x' \notin (a; a+\delta)$ у випадках, коли $c'_{2j} < c_{2j}$ і $c'_{2j} > c_{2j}$.

Отже, x не може мати зображення, відмінне від (5)–(7), а це означає, що $x \in C$ і $B \subset C$, а тому $B = C$. Таким чином, при $m = 2k$ циліндр $\Delta^q_{c_1c_2\ldots c_m}$ є відрізком $[a; a+\delta]$, що й треба було довести.

Наслідок 3. *Для довжини циліндра рангу m мають місце співвідношення:*

$$\begin{aligned} |\Delta^q_{c_1\ldots c_m}| &= (1-q)^m \cdot q^{c_1+\ldots+c_m-m} \leq \\ &\leq (1-q)^m \to 0 \quad \textit{при} \quad m \to \infty. \end{aligned}$$

Наслідок 4. *Якщо $\Delta^q_{c_1c_2\ldots c_m}$ — фіксований циліндр, то має місце рівність (основне метричне відношення)*

$$\frac{|\Delta^q_{c_1c_2\ldots c_m i}|}{|\Delta^q_{c_1c_2\ldots c_m}|} = (1-q)\cdot q^{i-1}.$$

Метричні задачі

З основного метричного відношення, виразу довжини циліндра та формул суми членів геометричної прогресії випливають такі рівності.

Лема 5. *Для міри Лебега λ мають місце такі рівності:*

1. $\lambda\big(\bigcup_{i=1}^{k}\Delta^q_{c_1\ldots c_m i}\big) = (1-q^k)\cdot|\Delta^q_{c_1\ldots c_m}| = (1-q^k)(1-q)^m q^{c_1+\ldots+c_m-m}$;

2. $\lambda\big(\bigcup_{i=k+1}^{\infty}\Delta^q_{c_1\ldots c_m i}\big) = q^k\cdot|\Delta^q_{c_1\ldots c_m}| = (1-q)^m q^{c_1+\ldots+c_m+k-m}$;

3. $\lambda\big(\bigcup_{i=k+1}^{\infty}\Delta^q_{c_1\ldots c_m i}\big) = q^k(1-q^{n-k})\cdot|\Delta^q_{c_1\ldots c_m}| = (1-q^{n-k})(1-q)^m q^{c_1+\ldots+c_m+k-m}$.

Теорема 6. *Множина*

$$C[\Delta^q, V] = \{x : x = \Delta^q_{a_1a_2\ldots a_n\ldots},\ a_n \in V \neq \mathbb{N}\}$$

має нульову міру Лебега.

Доведення. Проведемо міркування для випадку, коли множина $\mathbb{N}\setminus V = \{v\}$ складається з одного елемента, враховуючи, що якщо $V_1 \subset V_2$, то $C[\Delta^q; V_1] \subset C[\Delta^q; V_2]$.

$$\begin{aligned} \lambda(C[\Delta^q;V]) &= 1 - |\Delta^q_v| - \sum_{i_1\neq v}|\Delta^q_{i_1 v}| - \\ &\quad - \sum_{i_1\neq v}\sum_{i_2\neq v}|\Delta^q_{i_1 i_2 v}| - \ldots = \\ &= 1 - (1-q)q^{v-1} - \sum_{i_1\neq v}(1-q)^2 q^{i_1+v-2} - \\ &\quad - \sum_{i_1\neq v}\sum_{i_2\neq v}(1-q)^3 q^{i_1+i_2+v-3} - \ldots = \\ &= 1 - (1-q)q^{v-1} - (1-q)^2 q^{v-2}\sum_{i_1\neq v}q^{i_1} - \\ &\quad - (1-q)^3 q^{v-3}\sum_{i_1\neq v}\sum_{i_2\neq v}q^{i_1+i_2} - \ldots = \\ &= 1 - (1-q)q^{v-1} - \\ &\quad - (1-q)^2 q^{v-2}\Big(\frac{q}{1-q} - q^v\Big) - \\ &\quad - (1-q)^3 q^{v-3}\Big(\frac{q}{1-q} - q^v\Big)^2 - \ldots = \\ &= 1 - (1-q)q^{v-1} - \\ &\quad - (1-q)q^{v-1}\big(1 - q^{v-1}(1-q)\big) - \\ &\quad - (1-q)q^{v-1}\big(1 - q^{v-1}(1-q)\big)^2 - \ldots = \\ &= 1 - \frac{(1-q)q^{v-1}}{1-(1-q^{v-1}(1-q))} = \\ &= 1 - \frac{(1-q)q^{v-1}}{q^{v-1}(1-q)} = 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Теорема 7. *Множина $C[\Delta^q, V]$ є самоподібною, якщо V — скінченна, і N-самоподібною, якщо V — нескінченна, самоподібна і фрактальна розмірність Хаусдорфа — Безиковича якої є розв'язком* *рівняння*

$$\sum_{v \in V} \left((1-q)q^{v-1}\right)^x = 1.$$

Доведення. Оскільки

$$C = \bigcup_n C_n \quad \text{і} \quad C \overset{\frac{1-q}{q^{1-c_n}}}{\sim} C_n = \Delta^q_{c_n} \cap C,$$

то множина C є самоподібною у випадку скінченного об'єднання і N-самоподібною, якщо $n \to \infty$. Її самоподібна (N-самоподібна) розмірність набуває значень з нескінченної множини і є розв'язком рівняння

$$\sum_{c_n \in V} \left((1-q)q^{c_n-1}\right)^x = 1.$$

Теорема 8. *Міра Лебега множини*

$$C \equiv C[\Delta^q, (V_n)] = \\ = \{x : x = \Delta^q_{a_1 a_2 \ldots a_n \ldots}, a_n(x) \in V_n \subseteq \mathbb{N}\}$$

обчислюється за формулою

$$\lambda(C) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(F_k)}{\lambda(F_{k-1})} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda(\overline{F}_k)}{\lambda(F_{k-1})}\right).$$

Доведення. Нехай $F_0 = (0;1]$. Оскільки F_k — це об'єднання циліндрів рангу k, серед внутрішніх точок яких є точки множини C, то $C \subset F_{k+1} \subset F_k$ для всіх $k \in \mathbb{N}$ і $C = \lim_{k \to \infty} F_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$ і $\lambda(C) = \lim_{k\to\infty} \lambda(F_k)$.

Тому з рівності $F_k = F_{k-1} \setminus \overline{F}_k$ маємо

$$\lambda(F_k) = \lambda(F_{k-1}) - \lambda(\overline{F}_k).$$

Звідки

$$\lambda(C) = \lim_{k\to\infty} \lambda(F_k) = \\ = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{\lambda(F_k)}{\lambda(F_{k-1})} \cdot \frac{\lambda(F_{k-1})}{\lambda(F_{k-2})} \cdot \ldots \cdot \frac{\lambda(F_1)}{\lambda(F_0)}\right) = \\ = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda(F_i)}{\lambda(F_{i-1})} = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda(F_{i-1}) - \lambda(\overline{F}_i)}{\lambda(F_{i-1})} = \\ = \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda(\overline{F}_i)}{\lambda(F_{i-1})}\right).$$

А отже, $\lambda(C) = \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda(\overline{F}_i)}{\lambda(F_{i-1})}\right)$.

Наслідок 9. *Міра Лебега множини $C[\Delta^q, (V_n)]$ дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли розбігається ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(\overline{F}_k)}{\lambda(F_{k-1})}.$$

Теорема 10. *Нехай c і s — фіксовані натуральні числа. Множина*

$$C \equiv C[\Delta^q, \overline{cs}] = \\ = \{x : x = \Delta^q_{a_1 \ldots a_n \ldots}, \text{ де } \overline{a_n a_{n+1}} \neq \overline{cs} \; \forall\, n \in \mathbb{N}\}$$

є ніде не щільною множиною нульової міри Лебега.

Доведення. Доведемо, що C є ніде не щільною множиною за означенням.

Нехай (u, v) — довільний інтервал, що належить $(0, 1]$. Не порушуючи загальності, можемо вважати, що числа u і v мають нескінченні розклади. Легко вказати циліндр такий, що повністю належить інтервалу (u, v). Справді, оскільки $u < v$, то існує k таке, що $a_k(u) \neq a_k(v)$, але $a_i(u) = a_i(v)$ при $i < k$. Тоді можливі випадки: 1) k — непарне; 2) k — парне.

Тому в першому випадку: $a_k(u) > a_k(v)$, а отже,

$$\Delta^q_{a_1(u)\ldots a_k(u)[a_{k+1}(u)+1]} \subset (u, v), \quad \text{і} \\ \nabla^q_{a_1(u)\ldots a_k(u)[a_{k+1}(u)+1]cs} \cap C = \varnothing.$$

У другому випадку: $a_k(u) < a_k(v)$, тому

$$\Delta^q_{a_1(v)\ldots a_k(v)[a_{k+1}(v)+1]} \subset (u, v), \quad \text{і} \\ \nabla^q_{a_1(v)\ldots a_k(v)[a_{k+1}(v)+1]cs} \cap C = \varnothing.$$

Тому множина C є ніде не щільною за означенням.

Доведемо, що міра Лебега множини C дорівнює нулю. Можливі випадки: 1) $c = s$; 2) $c \neq s$.

Нехай $\overline{\Delta}^q_{c_1 \ldots c_m} \equiv \Delta^q_{c_1 \ldots c_m} \cap C$. Тоді в першому випадку

$$C = \left[\bigcup\nolimits_{i \neq c} \overline{\Delta}^q_i\right] \cup \left[\bigcup\nolimits_{i \neq c} \overline{\Delta}^q_{ci}\right].$$

У другому випадку

$$C = \left[\bigcup\nolimits_{i \neq c} \overline{\Delta}^q_i\right] \cup \left[\bigcup\nolimits_{c \neq i \neq s} \overline{\Delta}^q_{ci}\right] \cup \left[\bigcup\nolimits_{c \neq i \neq s} \overline{\Delta}^q_{cci}\right] \cup \\ \cup \ldots \cup \left[\bigcup\nolimits_{c \neq i \neq s} \overline{\Delta}^q_{\underbrace{c \ldots c}_{k} i}\right] \cup \ldots \cup \overline{\Delta}^q_{(c)}.$$

Нехай $F_0 = (0, 1]$, F_{2k} — об'єднання циліндрів рангу $2k$, серед внутрішніх точок яких є точки множини C,

$$\overline{F}_{2(k+1)} = F_{2k} \setminus F_{2(k+1)}. \tag{8}$$

Очевидно, що $F_{2k} \supset F_{2(k+1)} \supset C \; \forall\, k \in \mathbb{N}$ і

$$C = \bigcap\nolimits_{k=1}^{\infty} F_{2k} = \lim_{k\to\infty} F_{2k}.$$

За неперервністю міри Лебега зверху

$$\lambda(C) = \lim_{k\to\infty} \lambda(F_{2k}).$$

Тоді

$$\lambda(C) = \\ = \lim_{k\to\infty} \left[\frac{\lambda(F_{2k})}{\lambda(F_{2(k-1)})} \cdot \frac{\lambda(F_{2(k-1)})}{\lambda(F_{2(k-2)})} \cdot \ldots \cdot \frac{\lambda(F_2)}{\lambda(F_0)}\right] = \\ = \lim_{k\to\infty} \prod_{m=1}^{k} \frac{\lambda(F_{2m})}{\lambda(F_{2(m-1)})} = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda(F_{2m})}{\lambda(F_{2(m-1)})}. \tag{9}$$

З (8) маємо $\lambda(F_{2(k+1)}) = \lambda(F_{2k}) - \lambda(\overline{F}_{2(k+1)})$ і

$$\frac{\lambda(F_{2(k+1)})}{\lambda(F_{2k})} = 1 - \frac{\lambda(\overline{F}_{2(k+1)})}{\lambda(F_{2k})}.$$

Підставивши в (9) отриманий вираз, одержимо

$$\lambda(C) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda(\overline{F}_{2(k+1)})}{\lambda(F_{2k})}\right).$$

Останній нескінченний добуток розбігається до нуля тоді і тільки тоді, коли

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda(\overline{F}_{2(k+1)})}{\lambda(F_{2k})} = \infty. \qquad (10)$$

Знайдемо оцінки останнього відношення.

Нехай $\Delta^q_{c_1\ldots c_{2k}}$ — циліндр з F_{2k}. Можливі випадки: 1) $c_{2k} = c$, 2) $c_{2k} \neq c$.

Якщо $c_{2k} = c$, то

$$\nabla^q_{c_1\ldots c_{2k}s} \cap C = \varnothing \text{ і } \frac{|\Delta^q_{c_1\ldots c_{2k}s}|}{|\Delta^q_{c_1\ldots c_{2k}}|} = (1-q)q^{s-1}.$$

Якщо $c_{2k} \neq c$, то

$$\nabla^q_{c_1\ldots c_{2k}cs} \cap C = \varnothing \text{ і } \frac{|\Delta^q_{c_1\ldots c_{2k}cs}|}{|\Delta^q_{c_1\ldots c_{2k}}|} = (1-q)^2 q^{c+s-2}.$$

Тому, враховуючи це, маємо

$$0 < (1-q)^2 q^{c+s-2} \le \frac{\lambda(\overline{F}_{2(k+1)})}{\lambda(F_{2k})} \le (1-q)q^{s-1} < 1.$$

Отже, ряд (10) розбігається, оскільки не виконується необхідна умова збіжності ряду і тому $\lambda(C) = 0$. Теорему доведено.

Список літератури

1. Працьовитий М. В. Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів / М. В. Працьовитий. — К. : Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. — 296 с.
2. Хинчин А. Я. Цепные дроби / А. Я. Хинчин. — М. : Наука, 1978. — 116 с.
3. Жихарєва Ю. І. Зображення чисел знакододатними рядами Люрота: основи тополого-метричної, фрактальної і ймовірнісної теорій / Ю. І. Жихарєва, М. В. Працьовитий // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки. — 2008. — № 9. — С. 200–211.
4. Працьовитий М. В. Основи метричної теорії зображення дійсних чисел знакозмінними рядами Люрота та найпростіші застосування / М. В. Працьовитий, Ю. В. Хворостіна // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки. — 2010. — № 11. — С. 102–118.
5. Працьовитий М. В. Ряди Енгеля та їх застосування / М. В. Працьовитий, Б. І. Гетьман // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки. — 2006. — № 7. — С. 105–116.
6. Працьовитий М. В. Геометрія і основи метричної теорії зображення дійсних чисел рядами Сільвестера / М. В. Працьовитий, М. В. Задніпряний // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки. — 2011. — № 12. — С. 65–73.
7. Барановський О. М. Ряди Остроградського — Серпінського — Пірса та їхні застосування / О. М. Барановський, М. В. Працьовитий, Г. М. Торбін. — К. : Наукова думка, 2013. — 268 с.
8. Працьовитий М. В. Кодування дійсних чисел з нескінченним алфавітом і основою 2 / М. В. Працьовитий, Т. М. Ісаєва // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки. — 2013. — № 15. — С. 6–23.
9. Працьовитий М. В. Про деякі застосування $\Delta^\sharp$-зображення дійсних чисел / М. В. Працьовитий, Т. М. Ісаєва // Буковинський математичний журнал. — 2014. — Т. 2, № 2–3. — С. 187–197.

T. Isaieva, M. Pratsiovytyi

GEOMETRY AND FOUNDATION OF METRIC THEORY OF COUNTABLE-PARAMETER REPRESENTATION OF REAL NUMBERS BELONGING TO UNIT HALF-OPEN INTERVAL

In the paper, we introduce the one-parameter representation of real number belonging to unit half-open interval such that its alphabet is a set of positive integers and numbers are encoded by means of alternating series and their partial sums. We study the geometry of this representation (properties of cylinders) and lay the foundation of metric theory.

Keywords: representation (encoding) of number, alphabet of representation, geometry of numbers, cylinder, basic metric relation, Lebesgue measure, Cantor type set.

Матеріал надійшов 17.02.2015