УДК 517.9

Козак В. І.

ПОБУДОВА БЛОЧНИХ МАТРИЦЬ ТИПУ ЯКОБІ, ВІДПОВІДНИХ СТРОГІЙ ДВОВИМІРНІЙ ДІЙСНІЙ ПРОБЛЕМІ МОМЕНТІВ

У попередніх публікаціях було розглянуто узагальнення на двовимірний випадок класичної проблеми моментів і спектральної теорії самоспряжених блочних матриць Якобі, які добре відомі в одновимірному випадку. Скінченновимірна та нескінченновимірна проблеми моментів розв'язані Ю. М. Березанським з використанням розкладу за узагальненими власними векторами відповідно скінченної та нескінченної сімей комутуючих самоспряжених операторів. Завданням цієї роботи є узагальнення на випадок строгої дійсної двовимірної проблеми моментів, тобто побудова відповідних блочних матриць, а також формулювання необхідних та достатніх умов розв'язності строгої двовимірної проблеми моментів, що є підставою для розгляду оберненої спектральної задачі.

Ключові слова: блочні матриці Якобі, проблема моментів, розклад за узагальненими власними векторами, різницеві рівняння, самоспряжений оператор.

Вступ

Проблема моментів пов'язана з багатьма питаннями аналізу та теорії функцій: квадратурними формулами, неперервними дробами, ортогональними поліномами, інтерполяційними задачами, спектральною теорією операторів, зокрема прямою і оберненою задачами [1; 2], та інше. Під оберненою спектральною задачею в термінології Ю. М. Березанського розуміється побудова матриці Якобі за заданою мірою, яка є (однозначним) розв'язком деякої проблеми моментів. Відновлення міри за заданою матрицею Якобі є прямою задачею. Такі задачі розв'язані у випадку класичної проблеми моментів [1; 2], комплексної проблеми моментів [3; 4], зокрема в експоненційній формі, та деяких інших [5; 6].

Постановка задачі

Розв'язок дійсної двовимірної (багатовимірної, нескінченновимірної) проблеми моментів є добре відомим [2; 7–14]. Проте розв'язок строгої двовимірної дійсної проблеми моментів до сьогодні не записаний, хоча і є очевидним. Тим більше не розглядалися пряма і обернена задачі для строгої двовимірної дійсної проблеми моментів. У статті [15] записано розв'язок оберненої спектральної задачі, пов'язаний із (не строгою) проблемою моментів, а в [16] доведені теореми стосовні як оберненої, так і прямої спектральних задач, які відповідають деякій скінченній мірі з компактним носієм на дійсній площині. Завданням цієї роботи є узагальнення [16] на випадок строгої дійсної двовимірної проблеми моментів, тобто побудова відповідних блочних матриць, а також формулювання необхідних та достатніх умов розв'язності строгої двовимірної проблеми моментів, що є підставою для розгляду оберненої спектральної задачі.

Попередні відомості

Дійсна строга двовимірна проблема моментів полягає у знаходженні умов додатньої визначеності та росту на нескінченності (якщо немає обмеженості) на задану послідовність дійсних чисел $(a_{n,m})$, $a_{n,m} \in \mathbb{R}$, $n, m \in \mathbb{Z} = \{\ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$, яка зображається за допомогою позитивної міри Бореля $d\rho(x, y)$ на дійсній площині $\mathbb{R}^2$, так що

$$a_{n,m} = \int_{\mathbb{R}^2} x^n y^m \, d\rho(x, y), \quad n, m \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Проблема традиційно розв'язується за умови, що множина функцій $(x^n y^m)$, $n, m \in \mathbb{Z}$ є лінійно незалежною і щільною в $L_2(\mathbb{R}^2, d\rho(x, y))$.

Якщо послідовність $(a_{n,m})$ має зображення (1), то майже очевидно, що має місце додатна визначеність, тобто виконується нерівність:

$$\sum_{n,m,p,q \in \mathbb{Z}} f_{n,m} \bar{f}_{pq} a_{n+p,m+q} \geq 0, \tag{2}$$

для довільної фінітної послідовності $(f_{n,m})$, $f_{n,m} \in \mathbb{C}$, $n, m \in \mathbb{Z}$. Надалі вважатимемо, що рівність нулю досягається тільки для $(f_{n,m}) \equiv 0$. Якщо до умови (2) додати чотири рази відповідним чином умову з [12]:

$$\begin{gathered}\left(\sum_{v=0}^{2n} \binom{2n}{v} |a_{2n-v,v}|\right)^{\frac{1}{2n}} = o(n),\\ \left(\sum_{v=0}^{2n} \binom{2n}{v} |a_{-2n+v,v}|\right)^{\frac{1}{2n}} = o(n),\end{gathered} \tag{3_1}$$

$$\left(\sum_{v=0}^{2n}\binom{2n}{v}|a_{-2n+v,-v}|\right)^{\frac{1}{2n}}=o(n),$$
$$\left(\sum_{v=0}^{2n}\binom{2n}{v}|a_{2n-v,-v}|\right)^{\frac{1}{2n}}=o(n),\qquad (3_2)$$

то разом із (2) зображення (1) для заданої послідовності $(a_{n,m})$, $n,m\in\mathbb{Z}$ є єдиним.

Також відомо, що двовимірна (нестрога) проблема моментів розв'язна, якщо при будь-якому фіксованому n_0 є розв'язною одновимірна проблема моментів $a_m=c_{m,2n_0}+c_{m,2(n_0+1)}$, $m,n_0\in\mathbb{N}_0=\{0,1,2,\dots\}$. При цьому міра $d\rho(x,y)$, взагалі кажучи, може бути не єдиною [7]. Отже, двовимірна строга проблема моментів буде розв'язною (можливо, неоднозначно), якщо будуть однозначно розв'язані кожна із таких одновимірних проблем $m,n_0\in\mathbb{N}_0$:

$$\begin{aligned}
a_m&=c_{m,2n_0}+c_{m,2(n_0+1)},\\
a_m&=c_{m,-2n_0}+c_{m,2(-n_0+1)},\\
a_m&=c_{-m,2n_0}+c_{-m,2(n_0+1)},\\
a_m&=c_{-m,-2n_0}+c_{-m,2(-n_0+1)}.
\end{aligned}\qquad (4)$$

Кожна з наведених умов (3) або (4) разом із (2) не є, очевидно, оптимальними достатніми умовами розв'язання двовимірної строгої проблеми моментів (і це не є основним завданням роботи в розумінні, що їх можна покращувати), але є аргументом для подальших змістовних розглядів.

Із однозначно розв'язною двовимірною проблемою моментів пов'язана пара самоспряжених комутуючих операторів $A=A^*$ і $B=B^*$ у деякому гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$. Спектральна міра цих операторів дає зображення (1):

$$a_{n,m}=(A^n\varphi_0,B^m\varphi_0)=$$
$$=\int\limits_{\mathbb{R}^2}x^ny^m\,d(\mathbb{E}_{(x,y)}\varphi_0,\varphi_0)=\int\limits_{\mathbb{R}^2}x^ny^m\,d\rho(x,y),$$

із циклічним вектором $\varphi_0\in\mathcal{H}$. Але оскільки мова йде про строгу проблему моментів, тобто $n,m\in\mathbb{Z}$, то це означає, що A і B не тільки самоспряжені і комутують, але й мають зворотні обернені оператори, визначені всюди в $\mathcal{H}$. Отже, передбачається отримати не тільки матриці типу Якобі, відповідні A і B, а й A^{-1} і B^{-1}.

Побудова матриць

У [1] наведено побудову звичайної матриці Якобі, відповідної проблемі моментів Гамбургера. У цьому підрозділі будується аналог матриці Якобі — блочна матриця Якобі, відповідна строгій двовимірній проблемі моментів.

Нехай $d\rho(x,y)$ — борелева міра з компактним носієм на дійсній площині $\mathbb{R}^2$. Припустимо, що функції (x^ny^m), $n,m\in\mathbb{Z}$ є лінійно незалежними й утворюють щільну множину в $L_2(\mathbb{R}^2,d\rho(x,y))$. Оскільки множина двоіндексна, то виберемо такий порядок у множині (x^ny^m) для ортогоналізації її за Шмідтом [17]:

$$\begin{aligned}
&1=x^0y^0;\\
&x^1y^0,x^0y^1,x^{-1}y^0,x^0y^{-1};\\
&x^2y^0,x^1y^1,x^0y^2,x^{-1}y^1,\\
&\quad x^{-2}y^0,x^{-1}y^{-1},x^0y^{-2},x^1y^{-1};\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&x^ny^0,x^{n-1}y^1,\dots,x^1y^{n-1},x^0y^n,\\
&\quad x^{-1}y^{n-1},\dots,x^{-(n-1)}y^1,\\
&\quad x^{-n}y^0,x^{-(n-1)}y^{-1},\dots,x^0y^{-n},\\
&\quad x^1y^{-(n-1)},\dots,x^{n-1}y^{-1};\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}\qquad (5)$$

У результаті ортогоналізації набору (5) отримуємо множину ортонормованих поліномів, які занумеруємо в такий порядок:

$$\begin{aligned}
&1=P_{0,0}(x,y);\\
&P_{1,0}(x,y),P_{1,1}(x,y),P_{1,2}(x,y),P_{1,3}(x,y);\\
&P_{2,0}(x,y),P_{2,1}(x,y),P_{2,2}(x,y),P_{2,3}(x,y),\\
&\quad P_{2,4}(x,y),P_{2,5}(x,y),P_{2,6}(x,y),P_{2,7}(x,y);\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&P_{n,0}(x,y),P_{n,1}(x,y),P_{n,2}(x,y),\dots,\\
&\quad P_{n,4n-2}(x,y),P_{n,4n-1}(x,y);\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}\qquad (6)$$

Теорема 1. *Обмежений самоспряжений оператор множення на незалежну змінну «x» у просторі $L_2(\mathbb{R}^2,d\rho(x,y))$ в ортонормованому базисі (6) має вигляд блочної тридіагональної матриці типу Якобі J_x, що діє в просторі*

$$\mathbf{l}_2=\mathcal{H}_0\oplus\mathcal{H}_1\oplus\mathcal{H}_2\oplus\dots,$$
$$\mathcal{H}_0=\mathbb{R},\quad \mathcal{H}_n=\mathbb{R}^{4n},\quad n\in\mathbb{N},$$
$$J_x=\begin{bmatrix} b_0 & c_0 & 0 & 0 & 0 & \dots\\ a_0 & b_1 & c_1 & 0 & 0 & \dots\\ 0 & a_1 & b_2 & c_2 & 0 & \dots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\end{bmatrix},$$
$$\begin{aligned}
&a_n\colon\mathcal{H}_n\to\mathcal{H}_{n+1},\\
&b_n\colon\mathcal{H}_n\to\mathcal{H}_n,\\
&c_n\colon\mathcal{H}_{n+1}\to\mathcal{H}_n,\quad n\in\mathbb{N}_0,
\end{aligned}$$

де $c_0=[\ c_{0;1,1}\quad 0\quad 0\quad 0\ ]$;

$$c_n = \left.\underbrace{\begin{bmatrix} c_{n;1,1} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ * & c_{n;2,2} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & \dots & c_{n;n+1,n+1} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ * & * & \dots & c_{n;n+2,n+1} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & \dots & c_{n;3n,n+1} & c_{n;3n,n+2} & \dots & c_{n;3n,3n+4} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ * & * & \dots & * & * & \dots & * & c_{n;3n+1,3n+5} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & \dots & * & * & \dots & * & * & \dots & c_{n;4n+1,4n+3} & 0 \\ * & * & \dots & * & * & \dots & * & * & \dots & * & c_{n;4n,4n+4} \end{bmatrix}}_{4n+4}\right\}4n$$

b_n — $(4n\times 4n)$-матриця, $n \in \mathbb{N}$ (b_0 — скаляр). У матриці c_n нульові елементи позначені «0»; додатні елементи — $c_{p;q,r}$, (крім $c_{n;3n,n+1}$ і $c_{n;3n,n+2}$); «$*$» — елементи, які можуть бути і нульовими, і ненульовими.

Матриця a_n симетрична до матриці c_n, $n \in \mathbb{N}_0$.

Матриця J_x діє на векторах $f = (f_n)_{n=0}^{\infty} \in (\mathbf{l}_2)$ таким чином:

$$(J_x f)_n = a_{n-1} f_{n-1} + b_n f_n + c_n f_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

де вважається $a_{-1} \equiv 0$, $f_{-1} \equiv 0$.

Доведення. Покажемо, що c_n при $n = 0$ має вигляд $c_0 = [\ c_{0;1,1} \quad 0 \quad 0 \quad 0\ ]$. Дійсно, $xP_{0,0}$ зображується, згідно з (5) і (6), у вигляді лінійної комбінації

$$xP_{0,0} = \text{л.к.}\{P_{0,0}, P_{1,0}\},$$

тобто $xP_{0,0} = b_{0;1,1}P_{0,0} + c_{0;1,1}P_{1,0}$. Це так, тому що 1 і x ортогональні до всіх подальших членів послідовності поліномів, які знаходяться в порядку (6) після $P_{1,0}$.

Покажемо загальний вигляд c_n, $n > 0$.

Розглянемо $xP_{n,k}$ для $k = 0, 1, \dots, n$. Старший член многочлена $P_{n,k}$, згідно з порядком (6), $x^{n-k}y^k$. Отже, старший член многочлена $xP_{n,k}$, згідно з порядком (6), $x^{n-k+1}y^k$. Тому, взагалі,

$$xP_{n,k} = \text{л.к.}\{P_{0,0}, P_{1,0}, \dots, P_{n+1,k}\}, \\ k = 0, 1, \dots, n.$$

Поліноми, які слідують за $P_{n+1,k}$, згідно з порядком (6), ортогональні до $xP_{n,k}$. Таким чином ми показали вигляд перших $n+1$ рядків матриці c_n.

Розглянемо $xP_{n,n+k}$ для $k = 0, 1, \dots, n$. Старший член многочлена $P_{n,n+k}$, згідно з порядком (6), $x^{-k}y^{n-k}$. Отже, старший член многочлена $xP_{n,k}$, згідно з порядком (6), $x^{-k+1}y^{n-k}$. Тому, взагалі,

$$xP_{n,n+k} = \text{л.к.}\{P_{0,0}, P_{1,0}, \dots, P_{n+1,n}\}, \\ k = 0, 1, \dots, n.$$

Поліноми, які слідують за $P_{n+1,n}$, згідно з порядком (6), ортогональні до $xP_{n,n+k}$. Таким чином ми показали вигляд рядків матриці c_n від $(n+1)$-го до $2n$-го.

Розглянемо $xP_{n,2n+k}$ для $k = 0, 1, \dots, n-1$. Старший член многочлена $P_{n,2n+k}$, згідно з порядком (6), $x^{-(n-k)}y^{-k}$. Отже, старший член многочлена $xP_{n,k}$, згідно з порядком (6), $x^{-(n-k)+1}y^{-k}$. Тому, взагалі,

$$xP_{n,2n+k} = \text{л.к.}\{P_{0,0}, P_{1,0}, \dots, P_{n+1,n}\}, \\ k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Поліноми, які слідують за $P_{n+1,2n+k}$, згідно з порядком (6), ортогональні до $xP_{n,2n+k}$. Таким чином ми показали вигляд рядків матриці c_n від $(2n+1)$-го до $3n$-го. Зокрема, вони не відрізняються від рядків з $(n+2)$-го до $2n$-го.

Розглянемо $xP_{n,3n+k}$ для $k = 0, 1, \dots, n-1$. Старший член многочлена $P_{n,3n+k}$, згідно з порядком (6), $x^k y^{-(n-k)}$. Отже, старший член многочлена $xP_{n,3n+k}$, згідно з порядком (6), $x^{k+1}y^{-(n-k)}$. Тому, взагалі,

$$xP_{n,3n+k} = \text{л.к.}\{P_{0,0}, P_{1,0}, \dots, P_{n+1,3n+k+1}\}, \\ k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Поліноми, які слідують за $P_{n+1,3n+k+1}$, згідно з порядком (6), ортогональні до $xP_{n,3n+k}$. Таким чином ми показали вигляд рядків матриці c_n від $(3n+1)$-го до $4n$-го.

Зауважимо, що в лінійних комбінаціях $xP_{n,k}$, $xP_{n,n+k}$, $xP_{n,2n+k}$ та $xP_{n,3n+k}$ із відповідними k, можливо, відсутня певна частина поліномів (6). Ця частина з'ясовується з огляду на те, що оператор множення на x є симетричним, зокрема $c_n = a_n^*$. Відсутні в розкладі поліноми узгоджуються з відповідними нульовими елементами матриць.

З лінійної незалежності поліномів $P_{q,r}$ (6) випливає те, що крайні елементи матриць — ненульові і, не порушуючи загальності, — додатні. Таким чином теорему 1 доведено.

Теорема 2. *Обмежений самоспряжений оператор множення на незалежну змінну «x^{-1}» в просторі $L_2(\mathbb{R}^2, d\rho(x,y))$ в ортонормованому базисі (6) має вигляд блочної тридіагональної матриці типу Якобі $J_{x^{-1}}$, що діє в просторі*

$$\mathbf{l}_2 = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \cdots,$$
$$\mathcal{H}_0 = \mathbb{R}, \quad \mathcal{H}_n = \mathbb{R}^{4n}, \quad n \in \mathbb{N},$$
$$J_{x^{-1}} = \begin{bmatrix} \beta_0 & \gamma_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \alpha_0 & \beta_1 & \gamma_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \alpha_1 & \beta_2 & \gamma_2 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$
$$\alpha_n \colon \mathcal{H}_n \to \mathcal{H}_{n+1},$$
$$\beta_n \colon \mathcal{H}_n \to \mathcal{H}_n,$$
$$\gamma_n \colon \mathcal{H}_{n+1} \to \mathcal{H}_n, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

де $\beta_0 = [\ \beta_{0;0,0}\ ]$*;*

$$\beta_n = \underbrace{\begin{bmatrix} * & * \dots & * & \dots \beta_{n;1,3n} & 0 \dots & 0 \\ * & * \dots & * & \dots \beta_{n;2,3n} & 0 \dots & 0 \\ \vdots & \vdots \ddots & \vdots & \ddots \quad \vdots & \vdots \ddots & \vdots \\ * & * \dots & * & \dots \beta_{n;n-1,3n} & 0 \dots & 0 \\ * & * \dots & * & \dots \quad * & * \dots & \beta_{n;n+1,4n} \\ \vdots & \vdots \ddots & \vdots & \ddots \quad \vdots & \vdots \ddots & \vdots \\ \beta_{n;3n,1} & * \dots & * & \dots \quad * & * \dots & * \\ 0 & 0 \dots & \beta_{n;3n+1,n+1} & \dots \quad * & * \dots & * \\ \vdots & \vdots \ddots & \vdots & \ddots \quad \vdots & \vdots \ddots & \vdots \\ 0 & 0 \dots & \beta_{n;4n,n+1} & \dots \quad * & * \dots & * \end{bmatrix}}_{4n} \Bigg\} 4n$$

де нульові елементи позначені «0»; додатні елементи — $\beta_{p;q,r}$ (крім $\beta_{n;n+1,4n}$, $\beta_{n;3n,1}$); «∗» — елементи, які можуть бути і нульовими, і ненульовими; $\gamma_0 = [\ * \quad * \quad \gamma_{0;1,3} \quad 0\ ]$,

$$\gamma_n = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \dots & 0 & 0 \dots & 0 & 0 \dots 0 \\ \vdots & \vdots \ddots & \vdots & \vdots \ddots & \vdots & \vdots \ddots \vdots \\ \gamma_{n;n+1,1} & \gamma_{n;n+1,2} \dots & \gamma_{n;n+1,n+3} & 0 \dots & 0 & 0 \dots 0 \\ * & * \dots & * & \gamma_{n;n+2,n+4} \dots & 0 & 0 \dots 0 \\ \vdots & \vdots \ddots & \vdots & \vdots \ddots & \vdots & \vdots \ddots \vdots \\ * & * \dots & * & * \dots & \gamma_{n;3n+1,3n} & 0 \dots 0 \\ \vdots & \vdots \ddots & \vdots & \vdots \ddots & \vdots & \vdots \ddots \vdots \\ * & * \dots & * & * \dots & \gamma_{n;4n,3n} & 0 \dots 0 \end{bmatrix}}_{4n+4} \Bigg\} 4n$$

де нульові елементи позначені «0»; додатні елементи — $\gamma_{p;q,r}$ (крім $\gamma_{n;n+1,1}$, $\gamma_{n;n+1,2}$); «∗» — елементи, які можуть бути і нульовими, і ненульовими.

Матриця α_n симетрична до матриці γ_n, $n \in \mathbb{N}_0$.

Матриця $J_{x^{-1}}$ діє на векторах $f = (f_n)_{n=0}^{\infty} \in$ $\in (\mathbf{l}_2)$ таким чином:

$$(J_{x^{-1}} f)_n = \alpha_{n-1} f_{n-1} + \beta_n f_n + \gamma_n f_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

де вважається $\alpha_{-1} \equiv 0$, $f_{-1} \equiv 0$.

Доведення. Покажемо, що β_n і γ_n при $n = 0$ мають вигляд $\beta_0 = [\ \beta_{0;0,0}\ ]$ та $\gamma_0 = [\ * \quad * \quad \gamma_{0;1,3} \quad 0\ ]$. Дійсно, $x^{-1}P_{0,0}$ зображується, згідно з (5) і (6), у вигляді лінійної комбінації

$$x^{-1}P_{0,0} = \text{л.к.}\{P_{0,0}, P_{1,0}, P_{1,1}, P_{1,2}\},$$

тобто $x^{-1}P_{0,0} = \beta_{0;1,1}P_{0,0} + \gamma_{0;1,1}P_{1,0} + \gamma_{0;1,2}P_{1,1} +$ $+ \gamma_{0;1,3}P_{1,2}$. Це так, тому що 1 і x^{-1} ортогональні до всіх подальших членів послідовності поліномів, які знаходяться в порядку (6) після $P_{1,2}$.

Покажемо загальний вигляд β_n і γ_n при $n > 0$.

Розглянемо $x^{-1}P_{n,k}$ для $k = 0, 1, \dots, n-1$. Старший член многочлена $P_{n,k}$, згідно з порядком (6), $x^{n-k}y^k$. Отже, старший член многочлена $x^{-1}P_{n,k}$, згідно з порядком (6), $x^{n-k-1}y^k$. Тому, взагалі,

$$x^{-1}P_{n,k} = \text{л.к.}\{P_{0,0}, P_{1,0}, \dots, P_{n+1,n-1}\},$$
$$k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Поліноми, які слідують за $P_{n+1,n-1}$, згідно з порядком (6), ортогональні до $x^{-1}P_{n,k}$. Таким чином ми показали вигляд перших n рядків матриці β_n, а також довели, що ці рядки для матриці γ_n складаються з нульових елементів.

Розглянемо $x^{-1}P_{n,n+k}$ для $k = 0, 1, \dots, n$. Старший член многочлена $P_{n,n+k}$, згідно з порядком (6), $x^{-k}y^{n-k}$. Отже, старший член многочлена

$xP_{n,k}$, згідно з порядком (6), $x^{-k-1}y^{n-k}$. Тому, взагалі,

$$x^{-1}P_{n,n+k} = \text{л.к.}\{P_{0,0}, P_{1,0}, \ldots, P_{n+1,n+k+1}\},\\ k = 0, 1, \ldots, n.$$

Поліноми, які слідують за $P_{n+1,n+k+1}$, згідно з порядком (6), ортогональні до $x^{-1}P_{n,n+k}$. Таким чином ми показали вигляд рядків матриці γ_n від $(n+1)$-го до $2n$-го та наповненість ненульовими елементами відповідних рядків матриці β_n.

Розглянемо $x^{-1}P_{n,2n+k}$ для $k = 0, 1, \ldots, n$. Старший член многочлена $P_{n,2n+k}$, згідно з порядком (6), $x^{-(n-k)}y^{-k}$. Отже, старший член многочлена $xP_{n,k}$, згідно з порядком (6), $x^{-(n-k)-1}y^{-k}$. Тому, взагалі,

$$x^{-1}P_{n,2n+k} = \text{л.к.}\{P_{0,0}, P_{1,0}, \ldots, P_{n+1,2(n+1)+k}\},\\ k = 0, 1, \ldots, n.$$

Поліноми, які слідують за $P_{n+1,2(n+1)+k}$, згідно з порядком (6), ортогональні до $x^{-1}P_{n,2n+k}$. Таким чином ми показали вигляд рядків матриці γ_n від $(2n+1)$-го до $(3n+1)$-го.

Розглянемо $x^{-1}P_{n,3n+k}$ для $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Старший член многочлена $P_{n,3n+k}$, згідно з порядком (6), $x^k y^{-(n-k)}$. Отже, старший член многочлена $x^{-1}P_{n,3n+k}$, згідно з порядком (6), $x^{k-1}y^{-(n-k)}$. Тому, взагалі,

$$x^{-1}P_{n,3n+k} = \text{л.к.}\{P_{0,0}, P_{1,0}, \ldots, P_{n+1,3n-1}\},\\ k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Поліноми, які слідують за $P_{n+1,3n-1}$, згідно з порядком (6), ортогональні до $x^{-1}P_{n,3n+k}$. Таким чином ми показали вигляд рядків матриці γ_n від $(3n+1)$-го до $4n$-го. Зокрема, вони мають однакову кількість нульових елементів у рядку (після останнього ненульового).

Зауважимо, що в лінійних комбінаціях $x^{-1}P_{n,k}$, $x^{-1}P_{n,n+k}$, $x^{-1}P_{n,2n+k}$ та $x^{-1}P_{n,3n+k}$ із відповідними k, можливо, відсутня певна частина поліномів (6). Ця частина з'ясовується з огляду на те, що оператор множення на x^{-1} також є симетричним, зокрема $\gamma_n = \alpha_n^*$ та $\beta_n = \beta_n^*$. Відсутні в розкладі поліноми узгоджуються з відповідними нульовими елементами матриць.

З лінійної незалежності поліномів $P_{q,r}$ (6) випливає те, що крайні елементи матриць — ненульові і, не порушуючи загальності, — додатні. Таким чином теорему 2 доведено.

Теорема 3. *Обмежений самоспряжений оператор множення на незалежну змінну «y» в просторі $L_2(\mathbb{R}^2, d\rho(x,y))$ в ортонормованому базисі (6) має вигляд блочної тридіагональної матриці типу Якобі, що діє в просторі*

$$\mathbf{l}_2 = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \cdots,\\ \mathcal{H}_0 = \mathbb{R}, \quad \mathcal{H}_n = \mathbb{R}^{4n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$J_y = \begin{bmatrix} w_0 & u_0 & 0 & 0 & \ldots \\ v_0 & w_1 & u_1 & 0 & \ldots \\ 0 & v_1 & w_2 & u_2 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

$$v_n\colon \mathcal{H}_n \to \mathcal{H}_{n+1},\\ w_n\colon \mathcal{H}_n \to \mathcal{H}_n,\\ u_n\colon \mathcal{H}_{n+1} \to \mathcal{H}_n, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

де $u_0 = [\; u_{0;1,1} \quad u_{0;1,2} \quad 0 \quad 0 \;]$ *— скаляр;*

$$u_n = \left.\underbrace{\begin{bmatrix} u_{n;1,1} & u_{n;1,2} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0\ldots0 \\ * & * & u_{n;2,3} & 0 & \ldots & 0 & 0\ldots0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\ddots\vdots \\ * & * & * & u_{n;2n-1,2n+1} & \ldots & 0 & 0\ldots0 \\ * & * & * & * & \ldots & u_{n;2n,2n+2} & 0\ldots0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\ddots\vdots \\ * & * & * & * & \ldots & u_{n;4n,2n+2} & 0\ldots0 \end{bmatrix}}_{4n+4}\right\} 4n$$

де нульові елементи позначені «0»; додатні елементи — $u_{p;q,r}$ (крім $u_{n;1,1}$); «∗» — елементи, які можуть бути і нульовими, і ненульовими; w_n — $(4n \times 4n)$-матриця, $n \in \mathbb{N}$ (w_0 — скаляр); матриця v_n симетрична до матриці u_n, $n \in \mathbb{N}_0$.

Матриця J_y діє на векторах $f = (f_n)_{n=0}^{\infty} \in (\mathbf{l}_2)$ таким чином:

$$(J_y f)_n = v_{n-1}f_{n-1} + w_n f_n + u_n f_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

де вважається $v_{-1} \equiv 0$, $f_{-1} \equiv 0$.

Доведення. Покажемо, що u_n при $n = 0$ має вигляд $u_0 = [\; u_{0;1,1} \quad u_{0;1,2} \quad 0 \quad 0 \;]$. Дійсно, $yP_{0,0}$ зображується, згідно з (5) і (6), у вигляді лінійної комбінації

$$yP_{0,0} = \text{л.к.}\{P_{0,0}, P_{1,0}, P_{1,1}\},$$

тобто $yP_{0,0} = b_{0;1,1}P_{0,0} + u_{0;1,1}P_{1,0} + u_{0;1,2}P_{1,1}$. Це так, тому що 1 і y ортогональні до всіх подальших членів послідовності поліномів, які знаходяться в порядку (6) після $P_{1,2}$.

Покажемо загальний вигляд u_n, $n > 0$.

Розглянемо $yP_{n,k}$ для $k = 0, 1, \ldots, n$. Старший член многочлена $P_{n,k}$, згідно з порядком (6), $x^{n-k}y^k$. Отже, старший член многочлена $xP_{n,k}$, згідно з порядком (6), $x^{n-k}y^{k+1}$. Тому, взагалі,

$$yP_{n,k} = \text{л.к.}\{P_{0,0}, P_{1,0}, \ldots, P_{n+1,k+1}\},\\ k = 0, 1, \ldots, n.$$

Поліноми, які слідують за $P_{n+1,k+1}$, згідно з порядком (6), ортогональні до $yP_{n,k}$. Таким чином ми показали вигляд перших n рядків матриці u_n.

Розглянемо $yP_{n,n+k}$ для $k = 0, 1, \ldots, n$. Старший член многочлена $P_{n,n+k}$, згідно з порядком (6), $x^{-k}y^{n-k}$. Отже, старший член многочлена $xP_{n,k}$, згідно з порядком (6), $x^{-k}y^{n-k+1}$. Тому, взагалі,

$$yP_{n,n+k} = \text{л.к.}\{P_{0,0}, P_{1,0}, \ldots, P_{n+1,2k+1}\},\\ k = 0, 1, \ldots, n.$$

Поліноми, які слідують за $P_{n+1,2k+1}$, згідно з порядком (6), ортогональні до $yP_{n,n+k}$. Таким чином ми показали вигляд рядків матриці u_n від n-го до $2n$-го.

Розглянемо $yP_{n,2n+k}$ для $k = 0, 1, \ldots, n$. Старший член многочлена $P_{n,2n+k}$, згідно з порядком (6), $x^{-(n-k)}y^{-k}$. Отже, старший член многочлена $xP_{n,k}$, згідно з порядком (6), $x^{-(n-k)}y^{-k+1}$. Тому, взагалі,

$$yP_{n,2n+k} = \text{л.к.}\{P_{0,0}, P_{1,0}, \ldots, P_{n+1,2n+1}\},\\ k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Поліноми, які слідують за $P_{n+1,2n+1}$, згідно з порядком (6), ортогональні до $yP_{n,2n+k}$. Таким чином ми показали вигляд рядків матриці u_n від $2n$-го до $3n$-го.

Розглянемо $yP_{n,3n+k}$ для $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Старший член многочлена $P_{n,3n+k}$, згідно з порядком (6), $x^k y^{-(n-k)}$. Отже, старший член многочлена $xP_{n,3n+k}$, згідно з порядком (6), $x^k y^{-(n-k)+1}$. Тому, взагалі,

$$yP_{n,3n+k} = \text{л.к.}\{P_{0,0}, P_{1,0}, \ldots, P_{n+1,3n+1}\},\\ k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Поліноми, які слідують за $P_{n+1,3n+1}$, згідно з порядком (6), ортогональні до $yP_{n,3n+k}$. Таким чином ми показали вигляд рядків матриці u_n від $(3n+1)$-го до $4n$-го.

Зауважимо, що в лінійних комбінаціях $yP_{n,k}$, $yP_{n,n+k}$, $yP_{n,2n+k}$ та $yP_{n,3n+k}$ із відповідними k, можливо, відсутня певна частина поліномів (6). Ця частина з'ясовується з огляду на те, що оператор множення на y є симетричним, зокрема $u_n = v_n^*$. Відсутні в розкладі поліноми узгоджуються з відповідними нульовими елементами матриць.

З лінійної незалежності поліномів $P_{q,r}$ (6) випливає те, що крайні елементи матриць — ненульові і, не порушуючи загальності, — додатні. Таким чином теорему 3 доведено.

Теорема 4. *Обмежений самоспряжений оператор множення на незалежну змінну «y^{-1}» в просторі $L_2(\mathbb{R}^2, d\rho(x,y))$ в ортонормованому базисі (6) має вигляд блочної тридіагональної матриці типу Якобі $J_{y^{-1}}$, що діє в просторі*

$$\mathbf{l}_2 = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \cdots,\\ \mathcal{H}_0 = \mathbb{R}, \quad \mathcal{H}_n = \mathbb{R}^{4n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$J_{y^{-1}} = \begin{bmatrix} \omega_0 & \varphi_0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \psi_0 & \omega_1 & \varphi_1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & \psi_1 & \omega_2 & \varphi_2 & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

$$\varphi_n\colon \mathcal{H}_n \to \mathcal{H}_{n+1},\\ \omega_n\colon \mathcal{H}_n \to \mathcal{H}_n,\\ \psi_n\colon \mathcal{H}_{n+1} \to \mathcal{H}_n, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

де ω_n — $(4n \times 4n)$-матриця, $n \in \mathbb{N}$ (ω_0 — скаляр). φ_n — $(4n \times (4n+1))$-матриця, в якій елементи можуть бути і нульовими, і ненульовими. φ_n — $(4n \times (4n+4))$-матриця. Матриця φ_n симетрична до матриці ψ_n, $n \in \mathbb{N}_0$.

Матриця $J_{y^{-1}}$ діє на векторах $f = (f_n)_{n=0}^{\infty} \in (\mathbf{l}_2)$ таким чином:

$$(J_{y^{-1}}f)_n = \psi_{n-1}f_{n-1} + \omega_n f_n + \varphi_n f_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

де вважається $\psi_{-1} \equiv 0$, $f_{-1} \equiv 0$.

Доведення. Розглянемо одразу $y^{-1}P_{n,k}$ для $k = 0, 1, \ldots, 4n-1$. Поліноми $y^{-1}P_{n,k}$ при $k = 0$ вже є лінійною комбінацією, яка не забороняє заповнення ненульовими елементами всього першого рядка матриці φ_n. І при $k = 1, \ldots, 4n-1$ змін не відбувається, тому що $y^{-1}P_{n,0}$ присутні в усіх лінійних комбінаціях.

Оператор множення на y^{-1} також є симетричним, зокрема $\varphi_n = \psi_n^*$. Таким чином теорему 4 доведено.

Зауваження 1. Якщо вибрати інший порядок ортогоналізації в (5), то можна отримати матриці операторів J_x, J_{-x}, J_y, J_{-y} з іншою внутрішньою структурою, і навіть іншого розміру блоків.

Зауваження 2. Пряма задача, тобто відновлення міри за заданими матрицями c_n, β_n, γ_n та u_n, через значний обсяг не розглядається в цій роботі і планується в подальших публікаціях.

Список літератури

1. Ахиезер Н. И. Классическая проблема моментов / Н. И. Ахиезер. — М. : Гос. физ.-мат. лит., 1961. — 312 с.
2. Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов / Ю. М. Березанский. — К. : Наукова думка, 1965. — 799 с.
3. Berezansky Yu. M. The complex moment problem in the exponential form / Yu. M. Berezansky, M. E. Dudkin // Methods Funct. Anal. Topology. — 2004. — Vol. 10, no. 4. — P. 1–10.
4. Berezansky Yu. M. The complex moment problem and direct and inverse spectral problems for the block Jacobi type bounded

normal matrices / Yu. M. Berezansky, M. E. Dudkin // Methods Funct. Anal. Topology. — 2005. — Vol. 12, no. 1. — P. 1–32.
5. Berezansky Yu. M. The direct and inverce spectral problems for the block Jacobi type unitary matrices / Yu. M. Berezansky, M. E. Dudkin // Methods Funct. Anal. Topology. — 2005. — Vol. 11, no. 4. — P. 327–345.
6. Dudkin M. E. The complex moment problem in the exponential form with direct and inverse spectral problems for the block Jacobi type correspondence matrices / M. E. Dudkin // Methods Funct. Anal. Topology. — 2012. — Vol. 18, no. 21. — P. 111–139.
7. Ескин Г. И. Достаточное условие разрешимости многомерной проблемы моментов / Г. И. Ескин // ДАН СССР. — 1960. — Т. 133, № 3. — С. 540–543.
8. Зархина Р. Б. О двумерной проблеме моментов / Р. Б. Зархина // ДАН СССР. — 1959. — Т. 124, № 4. — С. 743–746.
9. Костюченко А. Г. Многомерная проблема моментов / А. Г. Костюченко // ДАН СССР. — 1960. — Т. 131, № 6. — С. 1249–1252.
10. Devinatz A. Two parameter moment problem / A. Devinatz // Duke Math. J. — 1957. — Vol. 24. — P. 481–498.
11. Fuglede B. The multidimensional moment problem / B. Fuglede // Expo. Math. — 1983. — Vol. 1. — P. 47–65.
12. Haviland E. K. On the moment problem for distribution functions in more than one dimension / E. K. Haviland // Amer. J. Math. — 1995. — Vol. 57. — P. 562–572.
13. Haviland E. K. On the moment problem for distribution functions in more than one dimension ii / E. K. Haviland // Amer. J. Math. — 1996. — Vol. 58. — P. 164–168.
14. Petersen L. C. On the relation between the multidimensional moment problem and the one-dimensional moment problem / L. C. Petersen // Math. Scand. — 1982. — Vol. 51. — P. 361–366.
15. Козак В. І. Обернена спектральна задача для блочних матриць типу Якобі, відповідних дійсній двовимірній проблемі моментів / В. І. Козак // Наукові вісті Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут». — 2013. — Т. 170, № 4. — С. 73–76.
16. Dudkin M. E. Direct and inverse spectral problems for the block Jacobi type bounded symmetric matrices related to the two dimensional real moment problem / M. E. Dudkin, V. I. Kozak // Methods Funct. Anal. Topology. — 2014. — Vol. 20, no. 3. — P. 219–251.
17. Суетин П. К. Ортогональные многочлены по двум переменным / П. К. Суетин. — М. : Наука, 1988. — 384 с.

V. Kozak

THE CONSTRUCTION OF THE BLOCK JACOBI TYPE MATRICES CORRESPONDS TO THE REAL STRICT TWO-DIMENSIONAL MOMENT PROBLEM

In earlier publications were considered the generalization of the classical moment problem and the spectral theory of self-adjoint Jacobi block matrix are well-known in one-dimensional case and it generalized on the two-dimensional case. Finite and infinite moment problem is solved using Yu. M. Berezansky generalized eigenfunction expansion method for respectively finite and infinite family of commuting self-adjoint operators. The purpose of this paper is the generalization to the case of strict real two-dimensional moment problem, ie the construction of the corresponding block matrices as well as the formulation of necessary and sufficient conditions for the solvability of a strict two-dimensional moment problem, which is the basis for consideration of the inverse spectral problem.

Keywords: block Jacobi matrix, moment problem, generalized eigenfunction expansion, difference equations, self-adjoint operator.

Матеріал надійшов 03.11.2014