УДК 519.816

Михалевич В. М.

ДО ПОБУДОВИ ЗАКОНОМІРНОСТІ СТАТИСТИЧНО НЕСТІЙКОЇ ПОСЛІДОВНОСТІ

Розглянуто задачу побудови статистичної закономірності послідовності, що набуває значення з довільної множини. Апарат статистичних закономірностей використовується при побудові загальної теорії рішень, що дає змогу розглядати задачі, які виходять за межі класичної теорії статистичних рішень.

Ключові слова: статистична задача рішення, статистична стійкість, статистична закономірність.

Вступ

Статистична задача рішення визначається параметричним простором Ω, простором рішень D і дійсною функцією втрат L. При довільному (w,d) число $L(w,d)$ являє собою втрати від прийняття рішень d у випадку, коли значення параметра W дорівнює ω. Припускається також, що заданий імовірнісний простір $(\Omega,\mathcal{A},P)$, а функція $L(\cdot,d)$ є $\mathcal{A}$-вимірною при довільному $d\in D$. Якщо P — даний імовірнісний розподіл параметра W, то задача рішення формулюється таким чином:

$$\int_\Omega L(\omega,d)P(d\omega)\to\inf_{d\in D}.$$

Якщо ж параметр W не має ймовірнісного розподілу і не задовольняє умови статистичної стійкості, то, використовуючи загальні методи, розроблені в [1–4], можна описати поведінку W за допомогою так званої статистичної закономірності, яка є природним узагальненням поняття ймовірнісного розподілу. Для уточнення цього поняття виконаємо такі побудови:

Позначимо $M(\Omega)$ простір усіх дійсних обмежень функцій на Ω. Якщо ввести норму $\|f\|=\sup_{\omega\in\Omega}|f(\omega)|$, то простір $M(\Omega)$ перетвориться в банаховий.

Далі позначимо $PF(\Omega)$ множину всіх скінченно-адитивних імовірнісних мір на Ω, тобто

$$PF(\Omega)=\Big\{p\in[0,1]^{2^\Omega}:p(\Omega)=1,\\ p(A\cup B)=p(A)+p(B\setminus A),\ \forall A,B\in\mathcal{A}\Big\}.$$

Розглядаючи $PF(\Omega)$ як підмножину спряженого простору $(M(\Omega))*$, визначимо на $PF(\Omega)$ топологію, що є слідом $*$ — слабкої топології в $(M(\Omega))*$. Інакше кажучи, якщо позначити для стислості символом pf інтеграл від $\mathcal{A}$-вимірної функції $M(\Omega)$ по скінченно-адитивній мірі $p\in PF(\Omega)$, то множини

$$\bigcup_{\varepsilon,f_1,f_2,\dots,f_n}(p)=\\ =\big\{p'\in PF(\Omega):|pf_i-p'f_i|<\varepsilon,\forall i\in\overline{1,n}\big\},$$

де $p\in PF(\Omega)$, $\varepsilon>0$, $f_1,f_2,\dots,f_n\in M(\Omega)$ є визначаючою системою околів у $PF(\Omega)$.

Зауважимо, що топологічний простір $(PF(\Omega),\tau(\Omega))$ компактний при будь-якому Ω [5]. Статистичною закономірністю на Ω називається будь-яка непорожня замкнена множина $\boldsymbol{P}$ топологічного простору $(PF(\Omega),\tau(\Omega))$.

Знаючи статистичну закономірність P, що описує поведінку W, можемо задати задачу рішення у вигляді четвірки $(\Omega,D,L,\boldsymbol{P})$. При цьому, якщо дотримуватися принципу гарантованого результату в статистичній формі, то від вимоги ∂-адитивності алгебри $\mathcal{A}$ можна відмовитися. Вказана четвірка єдиним чином визначає на D критерій $K(\cdot)$ для вибору оптимального рішення

$$K(d)=\sup_{p\in P}\int_\Omega L(\omega,d)p(d\omega),$$

а ризик задачі рішення у вигляді

$$\rho=\inf_{d\in D}\sup_{p\in P}\int_\Omega L(\omega,d)p(d\omega).$$

Нехай задано певну послідовність $\{\omega_n\}_{n=1}^\infty$ елементів множин Ω. Для зручності послідовність $\{\omega_n\}_{n=1}^\infty$ іноді будемо позначати символом $\overline{\omega}$, а n-й член послідовності — як і раніше, ω_n.

Унаслідок компактності топологічного простору $(PF(\Omega),\tau(\Omega))$ послідовність $\{p_{\overline{\omega}}^{(n)}\}_{n=1}^\infty$, що побудована відповідно до формули

$$p_{\overline{\omega}}^{(n)}(A)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n I_A(\omega_i)$$

для довільного $A\in 2^\Omega$, де I_A — індикатор множини A, завжди має непорожню множину $P(\overline{\omega})\subseteq PF(\Omega)$ граничних точок (у топологічному просторі $(PF(\Omega),\tau(\Omega))$. Множина $P(\overline{\omega})$ називається статистичною закономірністю послідовності (див. [2–4]).

Структура статистичної закономірності послідовності з довільної множини достатньо складна, оскільки відповідна послідовність частот може мати піднаправленості, які не є підпослідовностями. Однак у випадку послідовності, що приймає значення в скінченній множині, ситуація значно спрощується.

Нехай Ω — множина, що складається зі скінченного числа елементів, тобто

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k\}$$

а $\bar{\theta}$ — деяка послідовність елементів множини Ω. При цьому $\{\omega_k\} \in A$ для $\forall k \in \mathbb{N}$.

Для зручності будемо коротко позначати через p_n відповідні міри послідовності $\{p_{\overline{\omega}}^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$.

У роботі [2] доведено таку теорему.

Теорема 1. *Нехай Ω — скінченна множина. Міра $p \in PF(\Omega)$ належить $\boldsymbol{P}(\bar{\theta})$ тоді і тільки тоді, коли в послідовності мір $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ існує підпослідовність $\{p_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ така, що для будь-якого $A \in 2^{\Omega}$ виконується*

$$\lim_{i\to\infty} p_{n_i}(A) = p(A).$$

Ця теорема дає можливість побудувати статистичну закономірність послідовності тоді, коли кількість елементів множини Ω «не занадто велика», а отже, осяжна множина всіх підмножин — 2^{Ω}. У цьому випадку з послідовності $\{p_n\}$ можна виділити всі підпослідовності такі, що для кожної з них і для кожної з підмножин A множини Ω існує границя $\lim_{i\to\infty} p_{n_i}(A)$.

З теореми випливає, що $\boldsymbol{P}(\bar{\theta})$ збігається з множиною мір, що є границями цих підпослідовностей.

Цю статтю присвячено вивченню статистичних закономірностей послідовностей, що приймають значення не тільки в скінченних множинах, на відміну від [2–4; 6], а й у довільних.

Основний результат

Теорему 1 можна узагальнити на випадок, коли Ω є довільною множиною. Так як будь-яка послідовність елементів множини Ω складається з не більш ніж зліченного числа елементів множини Ω, то достатньо розглянути лише випадок зліченної множини Ω. Нехай $\mathcal{A}$ — алгебра підмножин множини $\Omega = \{\omega_n : n \in \mathbb{N}\}$, яка включає в себе всі одноелементні множини, тобто включає сукупність виду $\{\{\omega_n\} : n \in \mathbb{N}\}$.

Теорема 2. *Якщо Ω — зліченна множина, то міра $p \in PF(\Omega)$ належить $\boldsymbol{P}(\bar{\theta})$ тоді й тільки тоді, коли в послідовності мір $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ існує піднаправленість $\{p_\lambda, \lambda \in \Lambda, \succeq\}$, що для $\forall A \in \mathcal{A}$ має місце*

$$\lim_{\lambda} p_\lambda(A) = p(A).$$

Доведення. Необхідність. Справді, нехай $p \in \boldsymbol{P}(\bar{\theta})$. Тоді, в силу компактності $PF(\Omega)$, для $\forall A \in \mathcal{A}$ можна вибрати таку підпослідовність $\{n_k^A\}_{k=1}^{\infty}$ послідовності натуральних чисел, упорядкованих звичайним способом, що $p_{n_k^A} \in \vartheta_A^k(p)$ починаючи з певного моменту, де

$$\vartheta_A^k(p) := \{p' \in PF(\Omega) : |pI_A - p'I_A| < 1/k\}.$$

Відповідно,

$$\lim_{k\to\infty} p_{n_k^A}(A) = p(A). \tag{1}$$

Розглянемо направлену підмножину натуральних чисел $(\Lambda, \succeq)$, де

$$\Lambda := \{n_k^A, A \in \mathcal{A}\} \tag{2}$$

і для будь-яких $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$, а також будь-яких $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ виконується

$$n_{k_1}^{A_1} \succeq n_{k_2}^{A_2} \Leftrightarrow \left(A_1 \supseteq A_2, n_{k_1}^{A_1} \geq n_{k_2}^{A_2}\right). \tag{3}$$

Співставимо тепер довільному числу $n_k^A \in \Lambda$ міру $p_{n_k^A}$. Отримана таким чином направленість буде очевидно піднаправленістю послідовності мір $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$. При цьому, в силу (1)–(3), для будь-якого $A \in \mathcal{A}$ має місце

$$\lim_{\lambda} p_\lambda(A) = p(A).$$

Достатність. Розглянемо розбивання множини на максимальні підмножини рівних значень довільної обмеженості — вимірювальної функції f, тобто

$$\Omega = \sum_{i=1}^{k} \Omega_i,$$

де $k \in \{\mathbb{N} \cup \infty\}$ і $f(\omega_1) = f(\omega_2)$ тоді й тільки тоді, коли $\omega_1, \omega_2 \in \Omega_i$ для деякого i. Нехай $f(\omega) = \lambda_i$ для $\omega \in \Omega_i$ при $i = \overline{1,k}$. У силу вимірюваності f маємо, що $\Omega_i \in \mathcal{A}$, $i = \overline{1,k}$. Тоді, враховуючи обмеженість f, отримаємо, що при $k = \infty$ ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i p(\Omega_i)$$

абсолютно сходиться. Отже, згідно з визначенням інтеграла по адитивній мірі, маємо

$$pf = \int_{\Omega} f\, dp = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i p(\Omega_i).$$

Аналогічно для $\forall \lambda \in (\Lambda, \succeq)$ має місце

$$p_\lambda f = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i p_\lambda(\Omega_i).$$

У силу умови теореми 2 маємо

$$\lim_{\lambda} p_\lambda(\Omega_i) = p(\Omega_i), \quad i = \overline{1,k}.$$

Відповідно,

$$\lim_{\lambda} p_\lambda f = \lim_{\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i p_\lambda(\Omega_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \lim_{\lambda} p_\lambda(\Omega_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i p(\Omega_i) = pf.$$

Теорему доведено.

Список літератури

1. Иваненко В. И. Проблема неопределенности в задачах принятия решений / В. И. Иваненко, В. А. Лабковский. — К. : Наук. думка, 1990. — 136 с.
2. Зорич И. В. К построению закономерности статистически неустойчивой последовательности / И. В. Зорич, В. И. Иваненко, Б. Муньер // Проблемы управления и информатики. — 1997. — № 4. — С. 119–122.
3. Зорич И. В. О выражении двух последовательностей в терминах их статистической закономерности / И. В. Зорич, В. И. Иваненко // Кибернетика и системный анализ. — 1997. — № 2. — С. 155–159.
4. Ivanenko V. I. On some properties of statistical regularities / V. I. Ivanenko, I. V. Zorych // Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences. — 1997. — Vol. 19, no. 2. — P. 304–312.
5. Данфорд Н. Линейные операторы. Общая теория / Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц. — М. : Изд-во иностр. лит., 1962. — 896 с.
6. Михалевич В. М. До побудови закономірності статистично нестійкої послідовності елементів скінченної множини / В. М. Михалевич // Наукові записки НаУКМА. — 2014. — Т. 152 : Фізико-математичні науки. — С. 38–40.

V. Mykhalevych

ON THE CONSTRUCTION OF THE STATISTICAL REGULARITY OF THE STATISTICALLY INSTABLE SEQUENCE

The construction of the statistical regularity of the sequence, taking values in the arbitral set, is considered in this article. Apparatus of statistical regularities is used to consider the problems extending beyond the limits of the classical statistical decision theory.

Keywords: statistical problem of the solution, statistical stability, statistical conformity.

Матеріал надійшов 09.02.2015