УДК 512.54

Самойлович І. О.

СКІНЧЕННА ПОРОДЖЕНІСТЬ ВІНЦЕВИХ ДОБУТКІВ ЗА ЧАСТКОВО ВПОРЯДКОВАНИМИ МНОЖИНАМИ

Встановлено достатні та необхідні умови, коли вінцевий добуток скінченних груп підстановок за частково впорядкованими множинами є скінченно породженим у топологічному сенсі.

Ключові слова: вінцевий добуток, проскінченна група, скінченно породженість.

Вступ

Вінцевий добуток відіграє фундаментальну роль у теорії груп завдяки теоремі Калужніна — Краснера, згідно з якою вінцевий добуток $B \wr A$ містить ізоморфні копії всіх можливих розширень A за допомогою B. Ітеровані вінцеві добутки груп використовуються для опису силовських підгруп симетричної групи та груп матриць над скінченними полями.

Для побудови злічених локально скінченних p-груп з деякими спеціальними властивостями Холл [1] використав конструкцію обмеженого вінцевого добутку нескінченної кількості скінченних груп, проіндексованих за лінійно впорядкованою множиною. Пізніше Сілкок [2] розглянув цю конструкцію для довільних частково впорядкованих множин і застосував її для того, щоб показати, що для кожної непорожньої частково впорядкованої множини Λ існує група, ґратка нормальних підгруп якої ізоморфна дистрибутивній ґратці 2^{Λ}. Також Діксон та Фоурнелле [3] узагальнили деякі результати Холла на вінцеві добутки за частково впорядкованими множинами.

Необмежений вінцевий добуток груп допускає різні узагальнення на вінцеві добутки за частково впорядкованими множинами. Такі конструкції були запропоновані Голландом [4], Веллсом [5], Фейнбергом [6], і загальне означення узагальненого вінцевого добутку дав Бехрендт [7].

Обернену границю ітерованих вінцевих добутків $G_n \wr \ldots \wr G_1$ (так звані нескінченно ітеровані вінцеві добутки) можна розглядати як необмежені вінцеві добутки за множиною від'ємних цілих чисел. Для таких груп природним чином вводиться проскінченна топологія, і багато математиків досліджували питання, коли ітеровані вінцеві добутки є скінченно породженими в топологічному сенсі. Бхаттачарджі [8] показала, що вінцевий добуток простих неабелевих знакозмінних груп є двопородженим у топологічному сенсі. Цей результат було узагальнено на вінцеві добутки довільних скінченних простих неабелевих груп (див. [9; 10]). Бондаренко [11] навів критерій скінченно породженості нескінченно ітерованого вінцевого добутку скінченних транзитивних груп з рівномірно обмеженою кількістю твірних. Пізніше Детомі та Луччіні [12] узагальнили цей результат.

У цій роботі ми розглядаємо необмежені вінцеві добутки скінченних груп підстановок за частково впорядкованими множинами Λ. Показано, що такі групи є оберненою границею вінцевих добутків за деякими підмножинами в Λ. Якщо Λ не має ланцюгів, що нескінченно зростають, то ці підмножини є скінченними і відповідний необмежений вінцевий добуток є проскінченною групою. Для таких груп ми розглядаємо питання скінченно породженості в топологічному сенсі і наводимо деякі необхідні та достатні умови, які узагальнюють відповідні умови для нескінченно ітерованих вінцевих добутків.

Вінцеві добутки за частково впорядкованими множинами

Частково впорядковані множини. *Частково впорядкованою множиною (ч.в.м.)*, $(\Lambda, \leq)$, називається множина Λ із заданим на ній рефлексивним, антисиметричним та транзитивним бінарним відношенням $\leq$ (кажуть $\lambda < \mu$, якщо $\lambda \leq \mu$ і $\lambda \neq \mu$). Елемент $\lambda \in \Lambda$ називається *мінімальним* (*максимальним*), якщо не існує елемента $\mu < \lambda$ ($\mu > \lambda$). Через $\max \Lambda$ будемо позначати множину всіх максимальних елементів ч.в.м. Λ. Для елемента $\lambda \in \Lambda$ через $\lambda^{\triangledown}$ будемо позначати множину всіх елементів з Λ, що більші або рівні λ. Частково впорядкована множина, в якій довільні два елементи або рівні, або непорівняльні, називається *антиланцюгом*.

Нехай $(\Lambda, \leq)$ — деяка частково впорядкована множина і $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$. Елемент λ_2 буде верхнім сусідом λ_1 (а λ_1 буде *нижнім сусідом* λ_2), якщо $\lambda_1 < \lambda_2$ і не існує $\mu \in \Lambda$ такого, що $\lambda_1 < \mu < \lambda_2$. Через $LN(\lambda)$ будемо позначати множину всіх нижніх сусідів, а через $UN(\lambda)$ — множину всіх верхніх сусідів для $\lambda \in \Lambda$.

Означення вінцевого добутку за частково впорядкованою множиною. Нехай $(\Lambda, \leq)$ — деяка частково впорядкована множина і для кожного $\lambda \in \Lambda$

задана група підстановок (G_λ, X_λ). Позначимо

$$X = \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda = \big\{(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} : x_\lambda \in X_\lambda\big\}.$$

Якщо λ — максимальний елемент у ч.в.м. Λ, то $\overline{X_\lambda} = \{\emptyset\}$, де $\emptyset$ — порожнє слово; для решти випадків

$$\overline{X_\lambda} = \prod_{\mu>\lambda} X_\mu.$$

Вінцевим добутком $W = \mathrm{wr}_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$ *за частково впорядкованою множиною* Λ буде називатися група, що діє на множині X і складається з елементів такого вигляду:

$$g = \big(g_{(y,\lambda)}\big)_{\lambda\in\Lambda, y\in\overline{X_\lambda}}, \quad \text{де} \quad g_{(y,\lambda)} \in G_\lambda.$$

Дія елемента g на множині X задається таким правилом: для $x = (x_\mu)_{\mu\in\Lambda} \in X$ покладемо

$$g(x) = (g_{(y_\lambda,\lambda)}(x_\lambda))_{\lambda\in\Lambda} \in X,$$

де $y_\lambda = (x_\mu)_{\mu>\lambda}$, тобто λ-координатою $g(x)$ буде елемент $g_{(y_\lambda,\lambda)}(x_\lambda)$. Отже, λ-координата $g(x)$ не залежить від координат x_μ при $\mu < \lambda$, і тому ми можемо звузити дію групи W на $\overline{X_\lambda}$.

Добуток елементів $g = (g_{(y,\lambda)} \in G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda, y\in\overline{X_\lambda}}$, $h = (h_{(y,\lambda)} \in G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda, y\in\overline{X_\lambda}} \in W$ задаватиметься такою формулою:

$$g\cdot h = \big(g_{(y,\lambda)} h_{(g(y),\lambda)}\big)_{\lambda\in\Lambda, y\in\overline{X_\lambda}}.$$

Вінцеві добутки як проскінченні границі. Реалізуємо вінцевий добуток груп як обернену границю. Більше того, за певних умов ця обернена границя буде проскінченною групою. Таким чином, ми визначимо топологію на деяких вінцевих добутках.

Символом $\mathfrak{B}$ будемо позначати всі підмножини Λ вигляду $\cup_{\lambda\in I}\lambda^\triangledown$, де I — деяка скінченна підмножина Λ. На множині $\mathfrak{B}$ введемо відношення порядку $\preceq$ за включенням, тобто $\Lambda_1 \preceq \Lambda_2$ тоді і тільки тоді, коли $\Lambda_1 \subseteq \Lambda_2$, для $\Lambda_1, \Lambda_2 \in \mathfrak{B}$. Тоді $(\mathfrak{B}, \preceq)$ — частково впорядкована множина. Якщо $\Lambda_1, \Lambda_2 \in \mathfrak{B}$, то $\Lambda_1\cup\Lambda_2 \in \mathfrak{B}$. До того ж $\Lambda_1 \preceq \Lambda_1\cup\Lambda_2$ і $\Lambda_2 \preceq \Lambda_1 \cup \Lambda_2$. Тому $(\mathfrak{B}, \preceq)$ є напрямленою множиною.

Зафіксуємо набір груп підстановок (G_λ, X_λ). Якщо $\Lambda_1, \Lambda_2 \in \mathfrak{B}$, $\Lambda_1 \preceq \Lambda_2$, тоді існує гомоморфізм «обмеження» $\varphi_{\Lambda_1,\Lambda_2}$, що діє з $W_2 = \mathrm{wr}_{\lambda\in\Lambda_2} G_\lambda$ в $W_1 = \mathrm{wr}_{\lambda\in\Lambda_1} G_\lambda$. Позначимо $X_1 = \prod_{\lambda\in\Lambda_1} X_\lambda$, $X_2 = \prod_{\lambda\in\Lambda_2} X_\lambda$. Нехай $x = (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda_2} \in X_2$. Тоді $x|_{X_1} = (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda_1}$. Гомоморфізм $\varphi_{\Lambda_1,\Lambda_2}$ визначимо за таким правилом. Нехай $g_2 \in W_2$ і $g_2(x) = y$. Тоді $\varphi_{\Lambda_1,\Lambda_2}(g_2) = g_1$, де $g_1(x|_{X_1}) = y|_{X_1}$. Оскільки значення λ-координати y залежить лише від тих значень x_μ, що $\mu \geq \lambda$, то відображення $\varphi_{\Lambda_1,\Lambda_2}$ визначено коректно, причому воно буде гомоморфізмом. До того ж, якщо $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3 \in \mathfrak{B}$, $\Lambda_1 \preceq \Lambda_2 \preceq \Lambda_3$, то $\varphi_{\Lambda_1,\Lambda_2}(\varphi_{\Lambda_2,\Lambda_3}) = \varphi_{\Lambda_1,\Lambda_3}$. Отже, система груп $(\mathrm{wr}_{\lambda\in\Delta} G_\lambda)_{\Delta\in\mathfrak{B}}$ утворює інверсну систему, і ми можемо визначити її обернену границю.

У випадку, коли Λ є зліченною лінійно впорядкованою з максимальним елементом, то обернена границя за такою частково впорядкованою множиною збігається з нескінченно ітерованим вінцевим добутком. Якщо ж Λ є антиланцюгом, то тоді обернена границя збігається з прямим добутком.

Твердження 1. *Вінцевий добуток груп* (G_λ, X_λ) *за ч.в.м.* Λ *збігається з оберненою границею груп* $\mathrm{wr}_{\lambda\in\Delta} G_\lambda$, $\Delta \in \mathfrak{B}$.

Доведення. Позначимо обернену границю груп $\mathrm{wr}_{\lambda\in\Delta} G_\lambda$, $\Delta \in \mathfrak{B}$, через V. З означення оберненої границі випливає, що $V \subset \prod_{\Delta\in\mathfrak{B}} \mathrm{wr}_{\lambda\in\Delta} G_\lambda$. Ця група діє на множині $\prod_{\Delta\in\mathfrak{B}}(\prod_{\lambda\in\Delta} X_\lambda)$. З означення оберненої границі випливає, що ми можемо ототожнити всі однакові X_λ, що відповідають різним $\Delta \in \mathfrak{B}$. Тоді група V діє на множині X, причому так само як вінцевий добуток $\mathrm{wr}_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$.

Якщо всі множини $\lambda^\triangledown$, де $\lambda \in \Lambda$, скінченні, то тоді скінченними будуть і всі елементи з Λ, що належать $\mathfrak{B}$. Якщо до того ж усі алфавіти X_λ скінченні, то скінченними будуть усі групи $\mathrm{wr}_{\lambda\in\Delta} G_\lambda$, $\Delta \in \mathfrak{B}$. У цьому випадку обернена границя вінцевих добутків $\mathrm{wr}_{\lambda\in\Delta} G_\lambda$, а отже, і вінцевий добуток за ч.в.м. Λ буде проскінченною групою. Такі групи є топологічними групами, і для них можна розглядати породженість у топологічному сенсі.

Будемо казати, що топологічна група W *породжується підмножиною* V *у топологічному сенсі*, якщо підгрупа, породжена цією множиною, є скрізьщільною в W. Якщо при цьому V скінченна, то будемо казати, що W *скінченно породжена в топологічному сенсі*.

Результати

У цьому розділі будемо розглядати ч.в.м. $(\Lambda, \leq)$ та набір груп $(G_\lambda, X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, які задовольняють такі обмеження:

1. усі (G_λ, X_λ) є скінченними нетривіальними групами підстановок;
2. для довільного $\lambda \in \Lambda$ множина $\lambda^\triangledown$ скінченна, тобто Λ не містить ланцюгів, що нескінченно зростають.

За таких умов вінцевий добуток $W = \mathrm{wr}_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$ буде проскінченною групою, а отже, й топологічною групою. Можемо розглядати породженість у топологічному сенсі (надалі просто породженість) для групи W. Породженість прямих добутків скінченних груп також буде розглядатися в топологічному сенсі. Через $d(W)$ позначатимемо мінімальну кількість твірних у топологічному сенсі групи W.

Введемо позначення, котрі будемо надалі використовувати. Елементи множини $\mathfrak{B}$ будемо називати *скінченними початками*. Нехай $W = \mathrm{wr}_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$ і Δ — скінченний початок Λ. Для $g \in W$ і $x = (x_\mu)_{\mu\in\Delta}$ можемо визначити:

$$g(x) = (g_{(y_\lambda,\lambda)}(x_\lambda))_{\lambda\in\Delta} \in \prod_{\mu\in\Delta} X_\mu,\ y_\lambda = (x_\mu)_{\mu>\lambda}.$$

Нехай $A \subset W$, $\lambda \in \Lambda$, $x \in \overline{X_\lambda}$. Тоді $A_{(x,\lambda)} = \{g_{(x,\lambda)} \mid g \in A\} \subset G_\lambda$, що будемо називати проекцією множини A на пару (x, λ).

Оскільки W є оберненою границею вінцевих добутків, то для $g \in W$ символом $g|_\Delta$ будемо позначати Δ-координату елемента g в оберненій границі. Якщо $\Delta \in \mathfrak{B}$ і множина A є підмножиною W, то символом $A|_\Delta$ позначатиметься множина $\{g|_\Delta \mid g \in A\}$ і називатиметься проекцією множини A на Δ. Якщо A — група, то $A|_\Delta$ теж буде групою.

Комутант групи G будемо позначати G'.

Лема 2. *Група $\prod_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda/G_\lambda{}'$ є епіморфним образом групи $W = \mathrm{wr}_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$.*

Доведення. Зауважимо, що якщо для елементів $h_1, \dots, h_n$ з деякої групи H виконується $h_1h_2\dots h_n \in H'$, то для довільної перестановки π на множині $\{1, \dots, n\}$ справедливо $h_{\pi(1)}h_{\pi(2)}\dots h_{\pi(n)} \in H'$.

Зафіксуємо в кожній з множин X_λ елемент, який будемо позначати 1_λ. Гомоморфізм $f : W \to \prod_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda/G_\lambda{}'$ визначимо за таким правилом:

$$f(g) = \left(\left(\prod_{x\in\overline{X_\lambda}} g_{(x,\lambda)}\right) G_\lambda{}'\right)_{\lambda\in\Lambda}.$$

Коректність визначення f і те, що f є гомоморфізмом, випливає із зауваження, наведеного вище.

Покажемо, що цей гомоморфізм буде епіморфізмом. Виберемо довільний $h = (h_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \prod_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda/G_\lambda{}'$. Тепер виберемо елемент $g \in W$, щоб він задовольняв таку умову:

$$g_{(x,\lambda)}G_\lambda{}' = \begin{cases} h_\lambda, & \text{якщо } x = (1_\mu)_{\mu>\lambda}; \\ G_\lambda{}', & \text{інакше.} \end{cases}$$

Тоді

$$(f(g))_\lambda = \prod_{x\in\overline{X_\lambda}} g_{(x,\lambda)} = \left(\prod_{x\in\overline{X_\lambda}\setminus\{(1_\mu)_{\mu>\lambda}\}} G_\lambda{}'\right) \cdot h_\lambda G_\lambda{}' = h_\lambda G_\lambda{}'.$$

Лему доведено.

Наведемо декілька необхідних умов скінченно породженості вінцевого добутку за частково впорядкованою множиною.

Твердження 3. *Нехай дано частково впорядковану множину $(\Lambda, \le)$ та набір груп $(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, що задовольняють умови 1 та 2. Якщо група $W = \mathrm{wr}_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$ є скінченно породженою, то виконуються такі умови:*

(i) $d\bigl(\prod_{\lambda\in\Lambda}(G_\lambda/G_\lambda{}')\bigr) < \infty$;

(ii) $d\bigl(\prod_{\lambda\in\max\Lambda} G_\lambda\bigr) < \infty$;

(iii) Існує d таке, що $d(G_\lambda) \le d \cdot \prod_{\mu>\lambda} |X_\mu|$ для довільного $\lambda \in \Lambda \setminus \max\Lambda$.

Доведення. (i) Випливає з леми 2.

(ii) Образ елемента $x = (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in X$ при дії на нього $g \in W$ не залежить від координат x_μ при $\mu < \lambda$. Тому ми маємо епіморфізм з W в $\prod_{\lambda\in\max\Lambda} G_\lambda$.

(iii) Якщо в нас є вінцевий добуток скінченних груп (G, Y) та H, то виконується нерівність $d(H \wr G) \ge \frac{d(H)}{|Y|}$. Множини $\{\mu \mid \mu \ge \lambda\}$ і $\{\mu \mid \mu > \lambda\}$ є непорожніми початками для довільного $\lambda \in \Lambda \setminus \max\Lambda$. З означення вінцевого добутку випливає, що $\mathrm{wr}_{\mu\ge\lambda} G_\mu = G_\lambda \wr (\mathrm{wr}_{\mu>\lambda} G_\mu)$. Тоді

$$d(\mathrm{wr}_{\mu\ge\lambda} G_\mu) = d(G_\lambda \wr (\mathrm{wr}_{\mu>\lambda} G_\mu)) \ge \frac{d(G_\lambda)}{|\overline{X_\lambda}|}.$$

Оскільки група W є скінченно породженою, то існує така стала d, що $d \ge d(\mathrm{wr}_{\mu\ge\lambda} G_\mu)$ для довільного $\lambda \in \Lambda \setminus \max\Lambda$. Маємо

$$d(G_\lambda) \le d \cdot |\overline{X_\lambda}| = d \cdot \prod_{\mu>\lambda} |X_\mu|,$$

що й потрібно було довести.

Умови попередньої теореми не є достатніми умовами скінченної породженості, як показує такий приклад.

Приклад 1. Нехай Λ складається з елементів $\{\lambda_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, де $\lambda_1 > \lambda_i$ для всіх $i > 1$, а при $i \ne j$ та $i, j > 1$ всі λ_i та λ_j не порівняльні. Нехай $G_\lambda = A_5$ для всіх $\lambda \in \Lambda$. Тоді всі умови в твердженні 3 виконуються. З означення вінцевого добутку випливає, що

$$\mathrm{wr}_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda = \left(\prod_{\lambda\in\Lambda\setminus\{\lambda_1\}} G_\lambda\right) \wr G_{\lambda_1} = \left(\prod_{i>1} A_5\right) \wr A_5.$$

Група $\prod_{i>1} \mathrm{Alt}(5)$ не є скінченно породженою, а тому група $\mathrm{wr}_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$ теж не є скінченно породженою.

Лема 4. *Нехай дана ч.в.м. $(\Lambda, \le)$ та набір транзитивних груп $(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, що задовольняють умови 1 та 2. Група $W = \mathrm{wr}_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$ скінченно породжена тоді і тільки тоді, коли існує стала C така, що для довільного скінченного початку Δ кількість твірних вінцевого добутку $\mathrm{wr}_{\lambda\in\Delta} G_\lambda$ обмежена цією сталою: $d(\mathrm{wr}_{\lambda\in\Delta} G_\lambda) \le C$.*

Доведення. Необхідність випливає прямо з означення оберненої границі. Покажемо достатність. Для кожного скінченного початку Δ розглянемо множину всіх систем твірних, що складаються не більше ніж з C елементів, тобто

$$B_\Delta = \{A \subset \mathrm{wr}_{\lambda\in\Delta} G_\lambda \mid \langle A\rangle = \mathrm{wr}_{\lambda\in\Delta} G_\lambda, |A| \le C\}.$$

З умови теореми випливає, що для довільного скінченного початку Δ множина B_Δ непорожня.

Можемо вважати, що гомоморфізми «обрізання» $\varphi_{\Delta_1,\Delta_2}$ діють на B_Δ поточково, тобто $\varphi_{\Delta_1,\Delta_2}(A) = (\varphi_{\Delta_1,\Delta_2}(g))_{g\in A} \in B_{\Delta_1}$, де $A \in B_{\Delta_2}$. Набір множин $(B_\Delta)_{\Delta\in\mathfrak{B}}$ разом з гомоморфізмами «обрізання» $(\varphi_{\Delta_1,\Delta_2})_{\Lambda_1\subseteq\Lambda_2\in\mathfrak{B}}$ утворюють інверсну систему. Можемо розглянути обернену границю V по цій інверсній системі. Оскільки всі множини $(B_\Delta)_{\Delta\in\mathfrak{B}}$ непорожні, то непорожньою буде й обернена границя V. Довільний елемент з V буде підмножиною в W, причому він буде системою твірних для W. Також кожен елемент з V буде складатись не більше ніж з C елементів. Таким чином, ми довели існування скінченної системи твірних.

Лема 5. *Нехай дана ч.в.м. $(\Lambda, \le)$ та набір транзитивних груп $(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, що задовольняють умови 1 та 2. Зафіксуємо $\overline{x_\lambda} \in \overline{X_\lambda}$ для кожного $\lambda \in \Lambda$. Тоді набір груп $\widehat{G_\lambda}$, $\lambda \in \Lambda$, що визначаються за таким правилом:*

$$(\widehat{G_\lambda})_{(x,\nu)} = \begin{cases} G_\lambda, & \text{якщо } x = \overline{x_\lambda} \text{ і } \nu = \lambda;\\ \{e\}, & \text{інакше};\end{cases}$$

задає систему твірних для $\mathrm{wr}_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$.

Доведення. Спочатку розглянемо випадок, коли Λ скінченна.

Ми можемо доповнити порядок $\le$ на Λ до лінійного, тобто існує такий лінійний порядок $(\Lambda, \preceq)$, що з нерівності $\lambda \le \mu$ випливає нерівність $\lambda \preceq \mu$. Впорядкуємо множину Λ за цим порядком: $\Lambda = \{\ldots \prec \lambda_1 \prec \lambda_0\}$. Тоді скористаємося методом математичної індукції по множині Λ з порядком $\preceq$. Припущення індукції таке: для фіксованого λ, для всіх $\mu \prec \lambda$ і для довільного $\overline{y_\mu} \in \overline{X_\mu}$ ми породили множини:

$$(\widehat{G_{(\overline{y_\mu},\mu)}})_{(x,\nu)} = \begin{cases} G_\mu, & \text{якщо } x = \overline{y_\mu} \text{ і } \nu = \mu;\\ \{e\}, & \text{інакше}.\end{cases}$$

Базою індукції є твердження для λ_0, який є максимальним елементом. Тому група $\widehat{G_{(\emptyset,\lambda_0)}}$ нам дана з умови. Треба показати, що аналогічні групи ми можемо отримати і для решти елементів з Λ. Зафіксуємо $\lambda \in \Lambda \setminus \{\lambda_0\}$ і $\overline{y_\lambda} = (y_\nu)_{\nu<\lambda} \in \overline{X_\lambda}$. Оскільки всі групи G_ν транзитивні, то для кожного $\nu \in \Lambda$ виберемо елемент $g_\nu \in G_\nu$ такий, що $g_\nu(y_\nu) = x_\nu$. Тоді для всіх $\mu < \lambda$ за припущенням індукції ми вже породили такі елементи

$$(\overline{g_\mu})_{(x,\nu)} = \begin{cases} g_\mu, & \text{якщо } x = (y_\eta)_{\eta<\mu} \text{ і } \nu = \mu;\\ e, & \text{інакше}.\end{cases}$$

Визначимо $\overline{g} = \overline{g_{\mu_{\ldots}}} \cdot \ldots \cdot \overline{g_{\mu_1}} \cdot \overline{g_{\mu_0}}$ (в цьому добутку є всі $\mu_i < \lambda$), де $\mu_0 < \mu_1 < \ldots < \lambda$. Маємо

$$(\overline{g})_{(x,\nu)} = \begin{cases} g_\mu, & \text{якщо } x = (y_\eta)_{\eta<\mu} \text{ і } \nu < \lambda;\\ e, & \text{інакше}.\end{cases}$$

Звідси бачимо, що $\overline{g}(\overline{y_\lambda}) = (g_\mu(y_\mu))_{\mu<\lambda} = (x_\mu)_{\mu<\lambda}$. Залишається зауважити

$$\overline{g}\widehat{G_\lambda}\overline{g}^{-1} = \widehat{G_{(\overline{y_\lambda},\lambda)}}.$$

Таким чином, ми можемо отримати систему твірних для обмеженого вінцевого добутку (див. [1]). Оскільки Λ в цій теоремі скінченна, то обмежений вінцевий добуток за ч.в.м. і необмежений збігаються. Таким чином, ми довели твердження для випадку, коли Λ скінченна.

Якщо Λ нескінченна, ми розглядаємо всі проекції на скінченні початки, а для них ми вже довели твердження.

Теорема 6. *Нехай дана ч.в.м. $(\Lambda, \le)$ та набір транзитивних груп $(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, що задовольняють умови 1 та 2. Якщо група $\prod_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$ є скінченно породженою, то скінченно породженою буде і група $W = \mathrm{wr}_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$.*

Доведення. Оскільки групи G_λ нетривіальні, то можемо зафіксувати в кожній з множин X_λ два різних елементи, які будемо позначати 1_λ та 2_λ. Тепер побудуємо групи $\widehat{G_\lambda}$:

$$(\widehat{G_\lambda})_{(x,\nu)} = \begin{cases} G_\lambda, & \text{якщо } \nu = \lambda \text{ і}\\ & \quad x = (1_\mu)_{\mu>\lambda,\mu\notin UN(\lambda)}(2_\mu)_{\mu\in UN(\lambda)};\\ \{e\}, & \text{інакше}.\end{cases}$$

Виберемо скінченні системи твірних для груп $\prod_{\lambda\in\max\Lambda} G_\lambda$ та $\prod_{\lambda\in\Lambda\setminus\max\Lambda} G_\lambda$:

$$\prod_{\lambda\in\max\Lambda} G_\lambda = \langle a_1, \ldots, a_s\rangle,$$
$$\prod_{\lambda\in\Lambda\setminus\max\Lambda} G_\lambda = \langle c_1, \ldots, c_m\rangle.$$

Можемо записати $a_i = (a_{i,\lambda})_{\lambda\in\max\Lambda}$ і $c_i = (c_{i,\lambda})_{\lambda\in\Lambda\setminus\max\Lambda}$.

Тепер визначимо елементи $\{b_1, \ldots, b_s\} \subset W$ таким чином: $(b_i)_{(\emptyset,\lambda)} = a_{i,\lambda}$, $\lambda \in \max\Lambda$, а всі інші $(b_i)_{(x,\lambda)}$ тривіальні. Також визначимо елементи $\{d_1, \ldots, d_m\} \subset W$ таким чином:

$$(d_i)_{(x,\lambda)} = \begin{cases} c_{i,\lambda}, & \text{якщо } \lambda \in \Lambda\setminus\max\Lambda \text{ і}\\ & \quad x = (1_\mu)_{\mu>\lambda,\mu\notin UN(\lambda)}(2_\mu)_{\mu\in UN(\lambda)};\\ e, & \text{інакше}.\end{cases}$$

Виберемо деякий скінченний початок Δ. Розглянемо множину $A = \{b_1, \ldots, b_s, d_1, \ldots, d_m\}|_\Delta$.

Тепер виберемо деяке $\lambda \in \Delta$ і покажемо, що $\widehat{G_\lambda}|_\Delta$ можна породити за допомогою елементів з A. Якщо $\lambda \in \max\Delta$, то $\lambda \in \max\Lambda$. У такому випадку ми можемо породити $\widehat{G_\lambda}|_\Delta$ за допомогою $\{b_1, \ldots, b_s\}$. Припустимо $\lambda \notin \max\Lambda$. Виберемо деякий елемент $f \in G_\lambda$. Можемо вибрати $c_{i_1}c_{i_2}\ldots c_{i_k} = (g_\mu)_{\mu\in\Lambda\setminus\max\Lambda}$, де $g_\lambda = f$ і g_μ тривіальний при $\mu \in \Delta\setminus\{\lambda\}$. Тепер розглянемо добуток $d_{i_1}d_{i_2}\ldots d_{i_k}$. Порахуємо $d_id_j = \left\{(d_i)_{(x,\mu)}(d_j)_{(d_i(x),\mu)} \mid x \in \overline{X_\mu}\right\}$. Нехай $x = (1_\nu)_{\nu>\mu,\nu\notin UL(\mu)}(2_\nu)_{\nu\in UL(\mu)}$. З означення d_i випливає, що $d_i(x) = ((d_i)_{((1_\nu)_{\nu>\delta},\delta)}(x_\delta))_{\delta>\mu} = (x_\delta)_{\delta>\mu} = x$. Отже, $(d_id_j)_{(x,\mu)} = (d_i)_{(x,\mu)}(d_j)_{(x,\mu)}$. Тоді $(d_id_j)_{(x,\mu)} = c_{i,\mu}c_{j,\mu}$. Аналогічна ситуація буде за більшої кількості множників. Тому $(d_{i_1}d_{i_2}\ldots d_{i_k})_{(x,\mu)} = f$, при $\mu = \lambda$ і $x = (1_\mu)_{\mu>\lambda,\mu\notin UL(\lambda)}(2_\mu)_{\mu\in UL(\lambda)}$, а всі інші тривіальні. Таким чином, ми можемо породити $\widehat{G_\lambda}|_\Delta$.

Наслідок 7. *Нехай дана ч.в.м.* $(\Lambda,\leq)$ *та набір транзитивних абелевих груп* $(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$*, що задовольняють умови 1 та 2. Група* $W = \mathrm{wr}_{\lambda\in\Lambda}\, G_\lambda$ *буде скінченно породженою тоді і тільки тоді, коли скінченно породженою є група* $\prod_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$.

Доведення. Необхідність випливає з твердження 3, а достатність — з попередньої теореми.

Твердження 8. *Нехай* Λ *є об'єднанням скінченної кількості ч.в.м.* Λ_i*, а* $(G_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *— набір транзитивних груп підстановок. Якщо всі групи* $W_i = \mathrm{wr}_{\lambda\in\Lambda_i}\, G_\lambda$ *є скінченно породженими, то група* $W = \mathrm{wr}_{\lambda\in\Lambda}\, G_\lambda$ *теж є скінченно породженою.*

Доведення. Об'єднання систем твірних для груп W_i є системою твірних для групи W.

Список літератури

1. Hall P. Wreath powers and characteristically simple groups / P. Hall // Proc. Cambridge Phil. Soc. — 1969. — Vol. 58, no. 2. — P. 170–184.
2. Silcock H. L. Generalized wreath products and the lattice of normal sub-groups of a group / H. L. Silcock // Algebra Universalis. — 1977. — Vol. 7, no. 1. — P. 361–372.
3. Dixon M. R. Some properties of generalized wreath products / M. R. Dixon, T. A. Fournelle // Compositio Math. — 1984. — Vol. 52. — P. 355–372.
4. Holland W. C. The characterization of generalized wreath products / W. C. Holland // J. Algebra. — 1969. — Vol. 13, no. 2. — P. 152–172.
5. Wells C. Some applications of the wreath product construction / C. Wells // Amer. Math. Monthly. — 1976. — Vol. 83, no. 5. — P. 317–338.
6. Фейнберг В. З. Сплетения групп подстановок по частично упорядоченным множествам и фильтрам / В. З. Фейнберг // Весці АН БССР. — 1971. — Т. 6. — С. 28–38.
7. Behrendt G. Equivalence systems and generalized wreath products / G. Behrendt // Acta Sci. Math. — 1990. — Vol. 54, no. 3–4. — P. 257–268.
8. Bhattacharjee M. The probability of generating certain profinite groups by two elements / M. Bhattacharjee // Isr. J. Math. — 1994. — Vol. 86, no. 1–3. — P. 311–329.
9. Quick M. Probabilistic generation of wreath products of non-abelian finite simple groups / M. Quick // Comm. Algebra. — 2004. — Vol. 32, no. 12. — P. 4753–4768.
10. Quick M. Probabilistic generation of wreath products of non-abelian finite simple groups II / M. Quick // Internat. J. Algebra Comput. — 2006. — Vol. 16. — P. 493–503.
11. Bondarenko I. V. Finite generation of iterated wreath products / I. V. Bondarenko // Arch. Math. — 2010. — Vol. 95, no. 4. — P. 301–308.
12. Detomi E. Characterization of finitely generated infinitely iterated wreath products / E. Detomi, A. Lucchini // Forum Math. — 2011. — Vol. 25, no. 4. — P. 867–886.

I. Samoilovych

ON FINITE GENERATION OF WREATH PRODUCT BY PARTIALLY ORDERED SET

Sufficient and necessary conditions were found for the finite generation in the topological sense of the wreath product of finite permutation groups by the partially ordered set.

Keywords: wreath product, profinite gpoup, finite generation.

Матеріал надійшов 02.12.2014