УДК 519.2

Дрінь С. С., Іщук В. П., Щестюк Н. Ю.

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ФІНАНСОВО-ЕКОНОМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ НА БАЗІ ЛОГІСТИЧНОЇ ПОСЛІДОВНОСТІ ДЕТЕРМІНОВАНОГО ХАОСУ

Досліджено використання послідовностей детермінованого хаосу в фінансово-економічному моделюванні. Запропоновано модель класу ARIMA з заміною її стохастичної складової на хаотичну у вигляді однієї із послідовностей динамічного хаосу. Застосовано запропоновану модель до моделювання руху ризикованих активів та до процесу надходження валових інвестицій.

Ключові слова: моделі класу ARIMA, послідовності динамічного хаосу, логістична послідовність.

Вступ

Останнім часом відбулись суттєві зміни в парадигмі математичного моделювання фінансово-економічних процесів. Ці зміни пов'язані з відмовою від так званої лінійної парадигми і переходу до нелінійних моделей. В основі лінійної парадигми ринку капіталу лежать три ключові концепції: раціональні інвестори, ефективний ринок та як наслідок випадкові блукання. Виходячи з концепції ефективного ринку, ймовірнісний розподіл часового ряду руху цін є нормальним або логнормальним, що, як мінімум, гарантує скінченність середнього та дисперсії. Для підтвердження цього факту було проведено ряд емпіричних досліджень, але частіше за все були отримані протилежні результати [1, с. 42]. На початку 1970-х років з'явилась низка робіт, що поставила під сумнів гіпотезу нормальності розподілу та підірвала лінійну парадигму фінансового ринку. До таких робіт можна віднести роботи М. Осборна, П. Кутнера, Б. Мандельброта, Ю. Фама та інших. В наведених працях був проведений аналіз реальних фінансових часових рядів та отримані результати, що свідчили про наявність у певних рядах дохідностей від'ємної асиметрії, «тяжких хвостів», ексцесу та нескінченної дисперсії (див. [1; 2]). Внаслідок чого останні роки XX століття відзначились підвищеним інтересом до створення та пошуку нелінійних моделей ринків капіталу, як наслідок створення концепції фрактального ринку. Використання фрактальної геометрії в аналізі фондових ринків зобов'язано своїм виникненням Б. Мандельброту, який застосував результати Г. Херста у фінансовій сфері. Теорія хаосу визначає той факт, що системи мають внутрішню залежність між даними, відношення між величинами можуть мати показник степеня, що є відмінним від одиниці. Отже, з кількісних досліджень реальних фінансових показників випливає, що ринки капіталу є нелінійними системами. Проте більшість традиційних концепцій і теорій нехтують цими дослідженнями. На сучасний момент не існує повної інвестиційної нелінійної моделі, що могла б замінити традиційну, тому побудова, дослідження та аналіз нелінійних моделей має як наукове, так і практичне значення для економіки ринку капіталу та роботи інвесторів.

Предметом дослідження у статті є математичне моделювання фінансово-економічних процесів за допомогою послідовностей класу ARIMA з хаотичною складовою, а об'єктом дослідження є аналіз та порівняння з моделями класу ARIMA зі стохастичною складовою, тобто з моделями Бокса — Дженкінса.

Метою статті є побудова та дослідження нових нелінійних моделей, що базуються на стохастичних моделях класу ARIMA з заміною її стохастичної складової на хаотичну у вигляді однієї із хаотичних послідовностей (а саме логістичної). Основною особливістю таких моделей є те, що незважаючи на свою детерміновану природу, вони здатні породжувати послідовності, які складно відрізнити від стохастичних. Основними завданнями статті є створення альтернативної моделі до моделей класу ARIMA з використанням хаотичної складової, у вигляді хаотичних послідовностей замість стохастичної складової; застосування запропонованої моделі до моделювання руху ризикованих активів та до процесу надходження валових інвестицій.

Моделі класу ARIMA із хаотичною складовою

Для запропонованої моделі класу ARIMA з хаотичною складовою почнемо з поняття динамічного хаосу. Динамічні системи, що можуть генерувати випадковість та демонструють сильну залежність від початкових умов і значень параметрів, і є предметом теорії хаосу. У повсякденному сенсі хаос розуміють як безлад чи плутанину, і хоча загальноприйнятого універсального математичного означення хаосу немає, є загальні властивості, за якими його визначають. Отже, кажучи, що деяка вибірка даних має хаотичну природу чи набуває хаотичних властивостей, ми маємо на увазі, що функція, що її породжує, є чутлива до початкових умов, виконує топологічне перемішування та має щільні періодичні точки. Питання прояву властивостей хаотичності та стохастичності часового ряду руху цін є наріжним каменем цієї області дослідження.

До типових представників хаотичних функцій можна віднести логістичне відображення, відображення Бернуллі, «наметове» відображення та відображення кореня. Розглянемо одне із найбільш відомих та вживаних відображень динамічного хаосу, а саме логістичне відображення. Логістичне відображення популяризував біолог Р. Мей, хоча варто зауважити, що М. Фейгенбаум встановив значення сталої та рекурентну формулу, якій підпорядковуються критичні значення параметра, дещо раніше. Він опублікував статтю [3], в якій показав, що схожі подвоєння періоду з відповідною універсальною константою відбуваються при переході до хаосу у широкому класі задач. Логістичне відображення тут задається такою ітераційною формулою:

$$\begin{cases} x_{n+1} = \alpha x_n(1 - x_n); \\ x_0 \in (0, 1); \end{cases}$$

де n — крок, а α — параметр логістичного відображення. Залежно від значення параметра α відображення має різну кількість нерухомих точок. При $\alpha < 1$ єдиною нерухомою точкою, що визначається із рівняння та належить інтервалу є точка $x = 0$. Ця точка є стійкою, тому послідовність відображень збігається до нуля $x_n \to 0$ при будь-якому значенні початкової точки x_0. При $1 < \alpha < 3$ відображення має вже дві нерухомі точки $x = 0$ та $x = (\alpha - 1)/\alpha$. Точка $x = 0$ є нестійкою, а інша — стійкою, тому $x \to (\alpha - 1)/\alpha$. При умові, що $\alpha > 3$ число нерухомих точок не зміниться, але обидві точки є не нестійкими. Оскільки відображення обмежене, то відсутність точкового атрактору означає утворення складнішого атрактору типу граничного циклу. При значеннях параметру $\alpha > 3{,}57$ жоден із критичних циклів не має стійкості. З цього моменту починається хаотична поведінка системи. Цей хаос називається детермінованим, бо існує чітко визначений закон, за яким можна підрахувати значення змінної на будь-якій ітерації, починаючи від обраного початкового значення. Якщо в області стійкості та граничних циклів поведінка відображень слабо залежала від початкової точки, то в області хаосу невелика зміна початкового значення призводить до значної зміни значення n-ї ітерації. Описану вище залежність кількості нерухомих точок від параметра відображення, можна прослідкувати, якщо розглянути біфуркаційну діаграму, що є класичним засобом візуалізації хаотичної послідовності. У цій роботі ми вивчаємо поведінку логістичного відображення лише при значенні параметра $\alpha = 4$, тобто коли система втрачає стійкість та набуває детермінованого хаосу. При цьому повністю зникає періодичний характер зміни стану та система починає виконувати блукання по нескінченному числу станів. Якщо взяти $x_0 = 0{,}1$ і підрахувати рекурентно наступні ітераційні відображення [4], та підрахувати середнє значення та стандартне відхилення, то отримаємо, що одержане логістичне відображення практично можна вважати некорельованим, і в цьому сенсі послідовність значень може бути названа «хаотичним білим шумом».

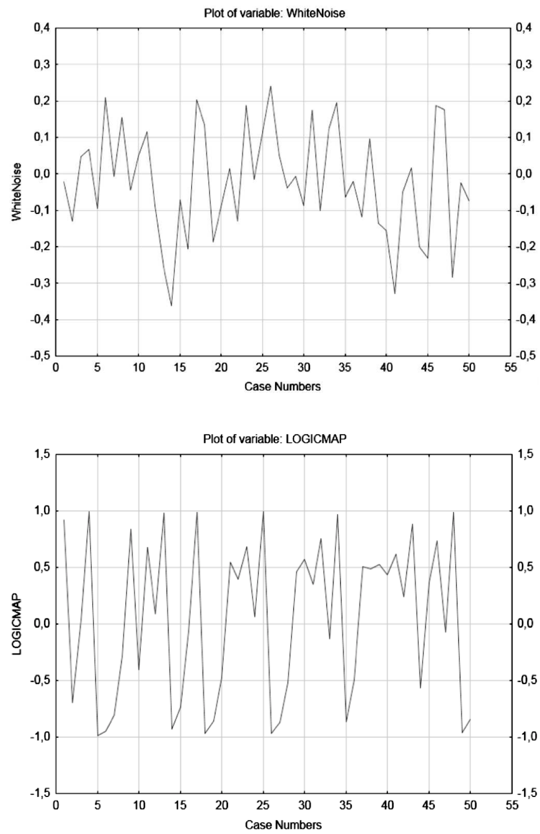

Рис. 1. Візуалізація значень вибірки білого шуму (вгорі) та логістичної послідовності (внизу)

У пакеті StatSoft Statistica v.10 було знайдено основні статистичні показники для вибірок білого шуму та логістичної послідовності. Виявилось, що середнє, мінімум, максимум, коефіцієнти ексцесу та симетрії дуже близькі за значеннями. Якщо звернути увагу на показник середнього для вибірок логістичного відображення і білого шуму та вибірки їхніх дохідностей, то у обох випадках воно є близьким до нуля, а у випадку розгляду логарифмів дохідностей бачимо, що середнє є однаковим з точністю до другого знаку після коми. Показники дисперсії для логарифмічних дохідностей

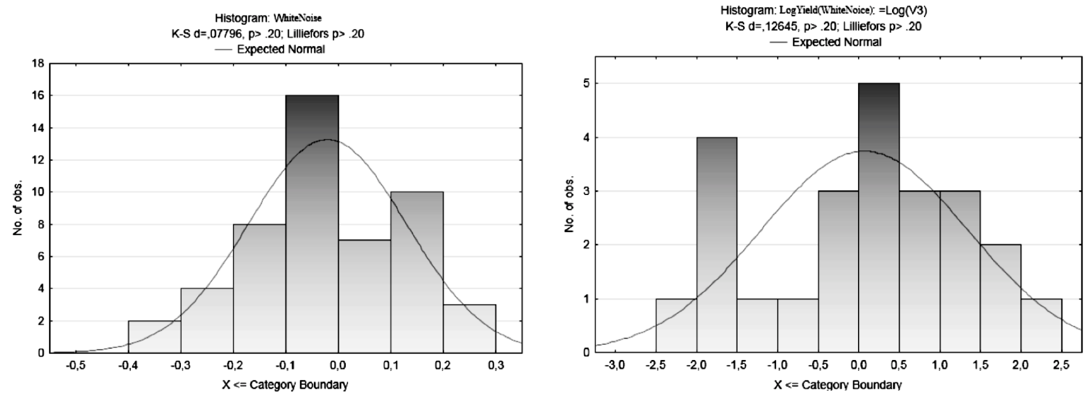

Рис. 2. Гістограми для вибірок білого шуму (зліва) та логістичного відображення (справа)

початкових вибірок також є однаковими з точністю до другого знака після коми. Коефіцієнт асиметрії та його похибка у випадку розгляду початкових вибірок є однаковими. Похибки для вибірок дохідностей та їхніх логарифмів також є однаковими. Тобто, порівнюючи результати проведеного аналізу для усіх трьох випадків, можна зробити висновок, що розглянуті послідовності мають схожі основні статистичні показники.

Проаналізуємо використані дані щодо їхньої нормальної розподіленості. Для цього розглянемо їхні гістограми, графік нормальної розподіленості та «коробку з вусами». Результати дослідження подамо відповідними малюнками.

З наведених рисунків легко побачити, що обидві вибірки мають однакову поведінку. Гістограми та графіки розподілів для вибірок білого шуму та логістичного відображення є майже ідентичними. Аналізуючи «коробку з вусами», бачимо, що логарифмічні дохідності досліджуваних даних є однаковими. Розглянемо також поведінку автокореляційної функції для наших вибірок. Результати подамо у вигляді рисунків.

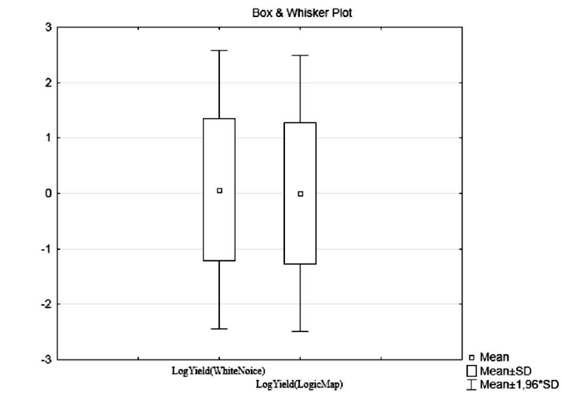

Рис. 3. «Коробка з вусами» для вибірок білого шуму та логістичного відображення і їх логарифмічних дохідностей

Отримані графіки автокореляційних функцій для вибірок білого шуму та логістичного відображення також є дуже подібними, вони не мають періодичної залежності та є стаціонарними.

Отже, після проведених досліджень можемо зробити висновок, що незважаючи на випадкову

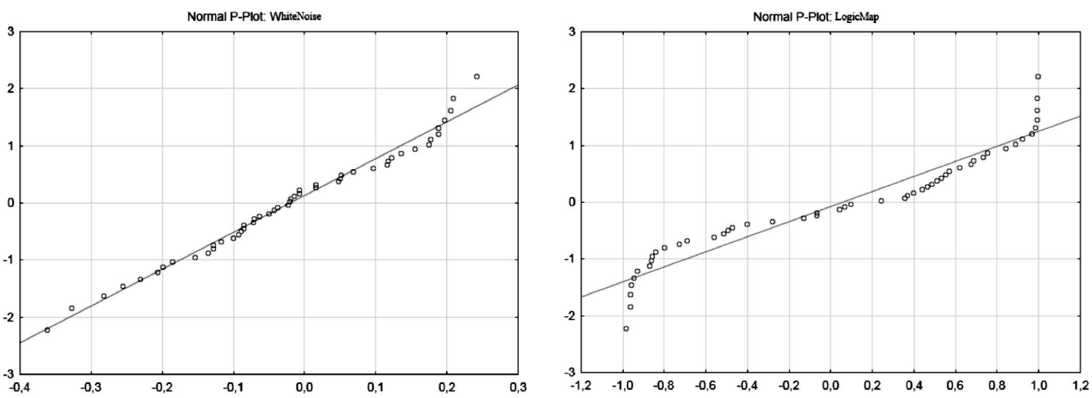

Рис. 4. Графіки нормального розподілу для вибірок білого шуму (зліва) та логістичного відображення (справа)

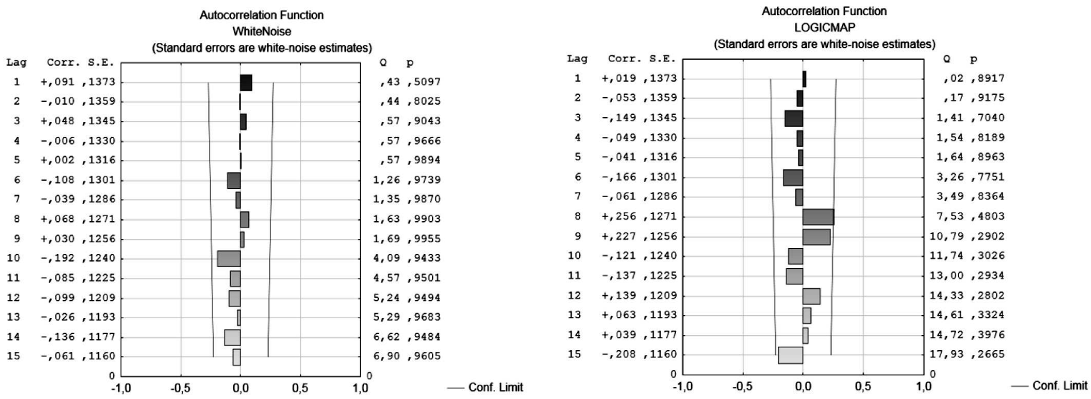

Рис. 5. Автокореляційна функція для вибірок білого шуму (зліва) та логістичного відображення (справа)

природу білого шуму та хаотичну природу логістичного відображення вони мають схожу структуру та статистичні властивості. Це дає підстави для заміни білого шуму в ARIMA моделях на логістичне відображення і отримати ARIMA моделі із хаотичною складовою.

Позначимо значення процесу в рівновіддалені моменти часу t, $t-1$, $t-2$, $\ldots$ через X_t, X_{t-1}, X_{t-3}, $\ldots$ Тоді процес авторегресії порядку p із початковим значенням x_0 з хаотичною складовою, або скорочено $\mathrm{chAR}(p, x_0)$ можна записати так:

$$X_t = c + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + \gamma_t;$$
$$\gamma_t = 4\gamma_{t-1}(1 - \gamma_{t-1});$$
$$\gamma_0 = \mathrm{const}, \quad \gamma_0 \in (0, 1),$$

де γ_1, γ_2, $\ldots$, γ_p — коефіцієнти авторегресії, c — стала, а γ_t — логістичне відображення, γ_0 — початкове значення відображення.

Модель рухомого середнього порядку q з початковим значенням x_0 і з хаотичною складовою $\mathrm{chAR}(q, x_0)$ записуємо так:

$$X_t = c + \gamma_t - \theta_1\gamma_{t-1} - \theta_2\gamma_{t-2} - \cdots - \theta_q\gamma_{t-q};$$
$$\gamma_t = 4\gamma_{t-1}(1 - \gamma_{t-1});$$
$$\gamma_0 = \mathrm{const}, \quad \gamma_0 \in (0, 1),$$

де $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_q$ — коефіцієнти рухомого середнього, c — константа, а γ_t — логістичне відображення, γ_0 — початкове значення відображення.

Модель авторегресії та рухомого середнього з хаотичною складовою, $\mathrm{chARMA}(p, q, x_0)$, буде узагальнювати дві більш прості моделі часових рядів (модель авторегресії) та модель рухомого середнього з хаотичними складовими. Модель записуємо так:

$$X_t = c + \gamma_t + \sum_{i=1}^{p} \phi_i X_{t-i} + \sum_{i=1}^{q} \theta_i \gamma_{t-i};$$
$$\gamma_t = 4\gamma_{t-1}(1 - \gamma_{t-1});$$
$$\gamma_0 = \mathrm{const}, \quad \gamma_0 \in (0, 1).$$

Застосування запропонованої моделі до опису та прогнозуваvння цін акцій

Відповідно до визначень моделей класу ARIMA з хаотичною складовою, які запропоновані у попередньому підрозділі, написане програмне забезпечення мовою Java у середовищі IntelliJ Idea 12.1.1. Програма виконує прогноз майбутніх значень деякої вибірки фінансових даних моделями ARIMA з білим шумом та моделями ARIMA з логістичним відображенням та обчислює похибку прогнозу для кожного прогнозованого значення і середню похибку для кожної із моделей. Розглянемо результати роботи програми до прогнозування на п'яти кроках денних котувань для вибірок даних десяти компаній, а саме Apple Inc., Microsoft Corporation, ASUSTeK Computer Inc., Google Inc., Samsung Group, HTC Corporation, Nokia Corporation, Mercedes-Benz, Toyota Motor Corporation та Honda Motor Co. довжиною 100, і порівняємо похибки прогнозу покроково для кожного значення та середню похибку прогнозу для кожній моделі. Подамо результати роботи програмного забезпечення у вигляді таблиці для однієї з компаній.

Зауважимо, що у табл. 1 X_1, X_2, $\ldots$, X_5 — прогноз значення котування на 1, 2, $\ldots$, 5 день відповідно. Прогноз денних котувань для компанії Apple Inc. був проведений з допомогою моделей ARMA(2, 2) та chARMA(2, 2, 0.9). Як бачимо, у результаті роботи програми отримали, що похибка використання моделі з стохастичною складовою становить 3,61 %, а з хаотичною складовою —

Таблиця 1. **Результати прогнозу денних котувань компанії Apple Inc. на трьох кроках моделями класу ARIMA та моделями класу chARIMA**

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
Котування	622,55	615,7	607,79	606,81	610,76
Прогноз ARIMA	619,567	620,951	620,068	621,983	620,602
Прогноз chARIMA	618,839	620,216	617,898	619,648	617,243
Похибка прогнозу ARIMA	0,005	0,009	0,02	0,023	0,016
Похибка прогнозу chARIMA	0,006	0,007	0,017	0,021	0,011
Середня похибка прогнозу ARIMA			0,0361799		3,61 %
Середня похибка прогнозу chARIMA			0,0304330		3,04 %

3,04 %. Цікаво, що попередньо було проведено аналіз вибірки котувань для цієї компанії та отримано результат, що ця вибірка має хаотичну природу. Як бачимо, використання моделей класу ARIMA з логістичним відображенням дало кращі результати для цієї хаотичної вибірки.

Застосування запропонованої моделі до процесу знаходження валових інвестицій

Одним із прикладів використання послідовностей детермінованого хаосу в економіці є моделювання процесу надходження інвестицій.

Детермінована модель, що описує процес зміни валових інвестицій I_t, записується так (див. [5]):

$$I_t = \lambda_t(K_t^* - K_t) + \delta K_{t-1}, \qquad (1)$$

де K_{t-1} — чисті основні фонди станом на кінець часового періоду $t-1$, K_t^* — бажаний (очікуваний) обсяг основних фондів на кінець поточного часового періоду, δK_{t-1} — амортизаційні відрахування, λ_t — «швидкість настройки» K_{t-1} на K_t^*. Якщо λ_t дорівнює нулю, то K є фіксованою величиною і тоді не буде чистих інвестицій, які скорочують розрив між K^* і K; в той же час, якщо λ_t дорівнює одиниці, то цей розрив є повністю подоланий протягом одного періоду часу, тобто настройка буде здійснена негайно.

В економічній літературі [5] для того, щоб оцінити параметри економетричної моделі типу (1), в його праву частину вводять випадковий член збурення і специфікують природу його розподілу. На жаль, порівняно мала увага приділялася джерелам цих збурень. Звичайно, можна стверджувати, що інвестиції випадкові за своєю природою, оскільки засновані на очікуваннях окремих людей, а ці очікування в свою чергу можуть бути гетерогенними і випадковими.

Деякі аналітики вважають, що випадковий член — це збурення, яке є наслідком помилки у вимірюваннях. Зауважимо, що якщо залежна змінна в рівнянні (1) (тобто валові інвестиції I_t) виміряна з випадковою помилкою, то тоді те саме можна сказати і про лагові значення основних фондів K_{t-1}, оскільки вони є зваженими сумами попередніх валових інвестиційних витрат. Звідси випливає, що якщо джерело випадкового члена збурення в правій частині рівняння (1) специфіковане саме так (тобто з допомогою помилок у вимірі I_t), то для того, щоб отримати оцінки параметрів цього рівняння, слід застосовувати методи, відмінні від звичайного МНК, а саме: методи, що враховують наявність помилок у вимірах регресорів. Результат сукупного впливу цих параметрів на загальний обсяг інвестицій описуємо випадковою величиною, що є нормально розподіленою з середнім значенням a й дисперсією σ^2 (що реалізується додаванням у праву частину рівняння (1) нормально розподіленого випадкового залишку із середнім значенням $a = 0$ і дисперсією σ^2, тобто «білого шуму»).

Оскільки рішення з приводу інвестиційних витрат є складним і комплексним, то досить ймовірно, що важливі змінні в простих рівняннях типу (1) можуть бути помилково опущені і не включені в правій частині. Якщо ці опущені змінні не корелюють зі включеними в рівняння регресорами, але володіють деякою систематичною поведінкою в часі, то їхній вплив може бути частково врахований введенням у праву частину випадкового збурення («залишку») з авторегресійними властивостями.

Зазвичай при проведенні емпіричного аналізу сукупних інвестицій у рівняння (1) додається випадкове збурення, що описується у формі авторегресії першого порядку:

$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t; \quad t = 2, \ldots, T,$$

де $|\rho| < 1$, і передбачається, що випадкові залишки ε_t $(t = 2, \ldots, T)$ незалежні і однаково нормально розподілені із середнім 0 і дисперсією σ^2. У деяких випадках, залежно від періодичності надходження даних (щорічно, щоквартально, щомісячно і т. д.), замість авторегресії першого порядку може використовуватись авторегресія вищого порядку.

Отже, за класичним підходом основним «будівним блоком» при моделюванні економетричних моделей є так званий «білий шум», тобто випадкова послідовність (процес) ε_n з нульовим математичним сподіванням та дисперсією, рівною одиниці, члени якого є некорельованими.

Ми пропонуємо джерело збурення подати у вигляді одного із загальновідомих представників хаотичних функцій, а саме логістичного відображення, яке задається так (див. [1; 4–7]):

$$\begin{cases} \varepsilon_{n+1} = \alpha\varepsilon_n(1-\varepsilon_n), \quad \alpha \geq 4, n \geq 0; \\ \varepsilon_0 \in (0,1). \end{cases}$$

Тоді модель процесу зміни валових інвестицій набуде вигляду:

$$\begin{cases} I_t = \lambda_t(K_t^* - K_t) + \delta K_{t-1} + u_t; \\ u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t; \\ \varepsilon_{n+1} = \alpha\varepsilon_n(1-\varepsilon_n), \quad \alpha \geq 4, n \geq 0; \\ \varepsilon_0 \in (0,1). \end{cases}$$

Висновки

У роботі було запропоновано до розгляду нелінійні моделі, що побудовані на основі стохастичних моделей класу ARIMA з заміною її стохастичної складової на хаотичну у вигляді однієї із послідовностей динамічного хаосу. Логістичне відображення та білий шум, як показано у статті, мають схожу стохастичну структуру і властивості, та є підстави говорити про можливість заміни однієї послідовності іншою при моделюванні часових рядів. Запропоновану модель застосовано до моделювання руху ризикованих активів та до процесу надходження валових інвестицій. Як свідчать дослідження, ARIMA моделі з хаотичною складовою в переважній більшості випадків дають кращі результати прогнозування реальних часових рядів, ніж ARIMA моделі із стохастичною складовою.

Список літератури

1. Петерс Э. Хаос и порядок на рынках капитала. Новый аналитический взгляд на циклы, цены и изменчивость рынка / Э. Петерс. — М., 2000. — 333 с.
2. Щестюк Н. Ю. Феномен Харста і гіпотеза фрактального ринку / Н. Ю. Щестюк, Ю. І. Канєвська, І. А. Берьозкіна // Вісник СНУ ім. В. Даля. — 2011. — Вип. 8 (162), ч. 2. — С. 21–29.
3. Фейгенбаум М. Универсальность в поведении нелинейных систем / М. Фейгенбаум // Успехи физических наук. — 1983. — Т. 141, вып. 4. — С. 343–374.
4. Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики. Том 1: Факты. Модели / А. Н. Ширяев. — М. : Фазис, 1998. — 512 с.
5. Берндт Э. Р. Практика эконометрики: классика и современность : учебник / Э. Р. Берндт. — М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2012. — 863 с.
6. Бутковский А. Г. Характеристики систем с распределенными параметрами : справ. пособие / А. Г. Бутковский. — М. : Наука, 1979. — 224 с.
7. Прохоров А. Нелинейная динамика и теория хаоса в экономической науке: историческая ретроспектива / А. Прохоров // Квантиль. — 2008. — Вып. 4. — С. 77–92.

S. Drin, V. Ischuk, N. Shchestyuk

MATHEMATICAL MODELING OF FINANCIAL AND ECONOMIC PROCESSES BASED ON LOGISTICAL SEQUENCE OF DETERMINED CHAOS

A mathematical concept of determined chaos or "non-linear dynamics" that explains that it is possible to get random results from normal equations is considered. The main precept behind this theory is the underlying notion of small occurrences significantly affecting the outcomes of seemingly unrelated events. Simply put, chaos theory is an attempt to see and understand the underlying order of complex systems that may appear to be without order at first glance. Related to financial markets, proponents of chaos theory believe that price is the very last thing to change for a stock, bond, or some other risky asset and price changes can be determined through stringent mathematical equations.

Usage of sequences of determinated chaos in financial and economic modeling is studied. Class ARIMA model with change of it's stochastic part to chaotic as one of dynamic chaos sequences is proposed. Proposed models is applied to the modeling of risky assets movement and to the process of receiving gross investments income.

Keywords: ARIMA class models, determinated chaos sequences, logic sequence.

Матеріал надійшов 21.11.2016