**УДК 517.8**

*Дудкін М. Є., Козак В. І.*

# ПРЯМА СПЕКТРАЛЬНА ЗАДАЧА З БЛОЧНИМИ МАТРИЦЯМИ ТИПУ ЯКОБІ, ЩО ВІДПОВІДАЮТЬ СИЛЬНІЙ ДВОВИМІРНІЙ ПРОБЛЕМІ МОМЕНТІВ

*Дослідження симетричних матриць типу Якобі, що відповідають сильній двовимірній дійсній проблемі моментів, започатковані в [1], доповнені задачею про відновлення міри за матрицями, поліномами другого роду та аналогом функції Вейля.*

**Ключові слова:** матриці типу Якобі, сильна двовимірна дійсна проблема моментів, поліноми другого роду, аналог функції Вейля.

## Вступ

У зв'язку із багатьма моментними проблемами розв'язані пряма і обернена спектральні задачі. Нагадаємо, що в термінах Ю. М. Березанського під оберненою спектральною задачею розуміється побудова (блочних) матриці (матриць) типу Якобі за заданою (не фінітною) мірою, у якої існують всі моменти. Під прямою спектральною задачею розуміють відновлення міри за поліномами, які є розв'язками різницевих рівнянь, побудованих за заданими (блочними) типу Якобі матрицями.

Так, є відомими розв'язки прямої і оберненої спектральних задач, які пов'язані із класичною проблемою моментів Гамбургера, Стільтієса, тригонометричною, комплексною проблемами моментів [2–10] та іншими.

## Постановка задачі

Обернена спектральна задача для сильної двовимірної проблеми моментів розв'язана в [1]. А саме, в [1] вказані блочні матриці типу Якобі, відповідні сильній двовимірній проблемі моментів. (В цій роботі буде вживатися більш поширений термін «сильна проблема» замість «строга».) Завданням цієї роботи є доповнення результатів [1] з розв'язанням прямої спектральної задачі: за матрицями, отриманими в [1], які зараз вважаються заданими, скласти систему різницевих рівнянь, отримати її розв'язки у вигляді поліномів і за поліномами відновити міру, яка однозначно відповідає заданим матрицям. Для цього використовується розклад за узагальненими власними векторами [2; 3; 11] для пари комутуючих операторів, у яких існують обернені. Відповідна міра відновлюється у розумінні запису перетворення Фур'є за узагальненими власними векторами та рівності Парсеваля.



## Попередні відомості

Опишемо спочатку коротко сильну двовимірну дійсну проблему моментів та відповідні матриці, наведені в [1].

Сильна дійсна двовимірна проблема моментів полягає у пошуку умов для заданої двоіндексної послідовності

$$\{s_{m,n}\}, \quad m,n \in \mathbb{Z} \tag{1}$$

дійсних чисел так, щоб існувала міра $d\rho(x,y)$ на дійсній площині $\mathbb{R}^2$, для якої виконувалися рівності

$$s_{m,n} = \int\limits_{\mathbb{R}^2} x^m y^n \, d\rho(x,y), \quad m,n \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

Для зображення (2) є необхідною позитивна визначеність послідовності (1), тобто

$$\sum_{j,k,m,n\in\mathbb{Z}} f_{j,k}\bar{f}_{m,n} s_{j+m,k+n} \geq 0$$

для всіх фінітних (скінчених) послідовностей комплексних чисел $(f_{j,k})_{j,k\in\mathbb{Z}}$, $f_{j,k} \in \mathbb{C}$.

Якщо додатково виконується хоча б одна з умов

$$\sum_{p=1}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^{p} C_p^k \sqrt{s_{\kappa(4p-4k),\iota(4k)}} \right)^{-\frac{1}{p}} = \infty,$$

де пара $\{\kappa,\iota\}$ має одне із значень:

$$\{+1,+1\}, \quad \{+1,-1\},$$
$$\{-1,+1\}, \quad \{-1,-1\},$$

то міра $d\rho(x,y)$ існує і зображення (2) є єдиним для заданої послідовності (1).

Побудови відповідних матриць аналогічні до випадку не сильно двовимірної проблеми моментів [10] та звичайного одновимірного випадку [12].

В якості простору береться

$$\begin{gathered} \mathbf{l}_2 = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \cdots, \\ \mathcal{H}_0 = \mathbb{C}, \quad \mathcal{H}_n = \mathbb{C}^{4n}, \\ \mathbf{l}_2 \ni f = (f_n)_{n=0}^{\infty}, \\ \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|^2_{\mathcal{H}_n} < \infty, \quad n \in \mathbb{N}. \end{gathered} \tag{3}$$

Вектор $x_n$ з простору $\mathcal{H}_n$ має вигляд $x_n = (x_{n;0}, \ldots, x_{n;4n-1})$, $x_0 \in \mathcal{H}_0$ (скаляр). Для кожного $\gamma \in \{0, 1, \ldots, 4n-1\}$, число $x_{n;\gamma}$ є координатою базисного вектора $\delta_{n;\gamma} = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \in \mathcal{H}_n \in \mathbf{l}_2$ (одиниця знаходиться на $\gamma$-му місці), $\delta_0 \equiv \delta_{0;0} = (1)$. Узагальнення звичайної матриці Якобі, що відповідає класичній проблемі моментів Гамбургера, або що відповідає двовимірній не сильній проблемі моментів, набуває вигляду двох пар блочних матриць:

$$J_A = \begin{bmatrix} b_0 & c_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ a_0 & b_1 & c_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & a_1 & b_2 & c_2 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \tag{4}$$

$$J_B = \begin{bmatrix} w_0 & v_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ u_0 & w_1 & v_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & u_1 & w_2 & v_2 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \tag{5}$$

та їхніх обернених:

$$J_{A^{-1}} = \begin{bmatrix} r_0 & q_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ p_0 & r_1 & q_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & p_1 & r_2 & q_2 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \tag{6}$$

$$J_{B^{-1}} = \begin{bmatrix} \omega_0 & \phi_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \psi_0 & \omega_1 & \phi_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \psi_1 & \omega_2 & \phi_2 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \tag{7}$$

$$\begin{aligned} & a_n, u_n, p_n, \psi_n \colon \mathcal{H}_n \to \mathcal{H}_{n+1}, \\ & b_n, w_n, r_n, \omega_n \colon \mathcal{H}_n \to \mathcal{H}_n, \\ & c_n, v_n, q_n, \phi_n \colon \mathcal{H}_{n+1} \to \mathcal{H}_n, \ n \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Матриці в (4)–(7) на фінітних векторах $\mathbf{l}_{\text{fin}} \subset \mathbf{l}_2$ задають два оператори та їхні відповідні обернені

$$\begin{aligned} & \mathbf{l}_2 \supset \mathbf{l}_{\text{fin}} \ni f \to J_A f = \big((J_A f)_n\big)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbf{l}_2, \\ & \mathbf{l}_2 \supset \mathbf{l}_{\text{fin}} \ni f \to J_B f = \big((J_B f)_n\big)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbf{l}_2, \\ & \mathbf{l}_2 \supset \mathbf{l}_{\text{fin}} \ni f \to J_{A^{-1}} f = \big((J_{A^{-1}} f)_n\big)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbf{l}_2, \\ & \mathbf{l}_2 \supset \mathbf{l}_{\text{fin}} \ni f \to J_{B^{-1}} f = \big((J_{B^{-1}} f)_n\big)_{n=0}^{\infty} \subset \mathbf{l}_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (J_A f)_n &= a_{n-1} f_{n-1} + b_n f_n + c_n f_{n+1}, \\ (J_B f)_n &= u_{n-1} f_{n-1} + w_n f_n + v_n f_{n+1}, \\ (J_{A^{-1}} f)_n &= p_{n-1} f_{n-1} + r_n f_n + q_n f_{n+1}, \\ (J_{B^{-1}} f)_n &= \psi_{n-1} f_{n-1} + \omega_n f_n + \varphi_n f_{n+1}, \end{aligned} \tag{8}$$

де вважається $f_{-1} := 0$. Припускаємо для подальшого розгляду, що матриці породжують обмежені оператори. Без втрати загальності матриці $J_A$, $J_B$, $J_{A^{-1}}$, $J_{B^{-1}}$ та відповідні оператори позначимо цими самими символами. Далі, припустимо, що такі матриці мають особливу внутрішню структуру. А саме, матриці $a_n$, $b_n$, $c_n$, $u_n$, $w_n$, $v_n$, $p_n$, $r_n$, $q_n$, $\psi_n$, $\omega_n$, $\phi_n$ мають певну форму та їхні коефіцієнти задовольняють деякі властивості (не наведені в роботі за браком місця), але детально викладені в [1].

У випадку сильної двовимірної дійсної проблеми моментів узагальнені власні вектори $P(x, y)$ мають вигляд послідовності $P(x, y) = P_n(x, y)_{n=0}^{\infty}$, де $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $P_n(x, y) \in \mathcal{H}_n$ є вектор, коефіцієнтами якого є поліноми $n$-го порядку за змінними $x$ і $y$ та $x^{-1}$ і $y^{-1}$. А саме:

$$\begin{aligned} & P_0(x, y) = 1, \\ & P_n(x, y) = \big(P_{n;0}(x, y), P_{n;1}(x, y), \ldots, \\ & \qquad\qquad P_{n;4n-1}(x, y)\big), \quad n \in \mathbb{N} \end{aligned} \tag{9}$$

де $P_{n,\gamma}$ — (скінчена) лінійна комбінація елементів послідовності:

$$\begin{aligned} & 1 = x^0 y^0; \\ & x^1 y^0, x^0 y^1, x^{-1} y^0, x^0 y^{-1}; \\ & x^2 y^0, x^1 y^1, x^0 y^2, x^{-1} y^1, \\ & \qquad x^{-2} y^0, x^{-1} y^{-1}, x^0 y^{-2}, x^1 y^{-1}; \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & x^n y^0, x^{n-1} y^1, \ldots, x^1 y^{n-1}, x^0 y^n, \\ & \qquad x^{-1} y^{n-1}, \ldots, x^{-(n-1)} y^1, \\ & \qquad x^{-n} y^0, x^{-(n-1)} y^{-1}, \ldots, x^{-1} y^{-(n-1)}, \\ & \qquad x^0 y^{-n}, x^1 y^{-(n-1)}; \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{10}$$

Поліноми (9) є розв'язками системи чотирьох різницевих рівнянь

$$\begin{aligned} J_A P(x, y) &= x P(x, y), \\ J_B P(x, y) &= y P(x, y), \\ J_{A^{-1}} P(x, y) &= x^{-1} P(x, y), \\ J_{B^{-1}} P(x, y) &= y^{-1} P(x, y). \end{aligned} \tag{11}$$

Тут виникають чотири рівняння на відміну від несильного випадку, де виникають лише два рівняння [10] та класичного випадку, де спостерігається тільки одне.

Коротко нагадаємо, як утворилися матриці (4)–(7). У нашому випадку, для побудови $P_n(x, y)$

проводиться ортогоналізація за Шмідтом системи (10) відносно скалярного добутку простору $L_2 = L_2(\mathbb{R}^2, d\rho(x,y))$ функцій інтегрованих із квадратом на $\mathbb{R}^2$ відносно міри Бореля $d\rho(x,y)$.

Припускається, що функції

$$\mathbb{R}^2 \ni (x,y) \mapsto x^m y^n,\ m,n \in \mathbb{Z}, \tag{12}$$

є лінійно незалежними і утворюють тотальну множину в $L_2$. Тобто, використовуючи порядок (10), отримуємо як результат систему ортогональних поліномів, поданих у вигляді таблиці:

$$\begin{aligned}
&P_{0,0}(x,y) = 1;\\
&P_{1,0}(x,y), P_{1,1}(x,y), P_{1,2}(x,y), P_{1,3}(x,y);\\
&P_{2,0}(x,y), P_{2,1}(x,y), P_{2,2}(x,y), P_{2,3}(x,y),\\
&\quad P_{2,4}(x,y), P_{2,5}(x,y), P_{2,6}(x,y);\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&P_{n,0}(x,y), P_{n,1}(x,y), P_{n,2}(x,y), \dots,\\
&\quad P_{n,n-1}(x,y), P_{n,4n-1}(x,y);\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned} \tag{13}$$

де кожний поліном має вигляд

$$\begin{aligned}
P_{n;\gamma}(x,y) = k_{n;\gamma} x^\alpha y^\beta + \cdots, \quad n \in \mathbb{N}_0,\\
\gamma = 0, 1, \dots, 4n-1, \quad k_{n;\gamma} > 0;
\end{aligned} \tag{14}$$

для відповідних $\alpha, \beta = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n$; де $+\cdots$ позначає наступну частину відповідного полінома згідно з порядком (10), і, для визначеності, покладено $P_{0;0}(x,y) := 1$. Таким чином, $P_{n;\gamma}(x,y)$ є лінійною комбінацією елементів (10). Кожний рядок у (13) — це вектор $P_n(x,y)$, який є розв'язком системи (11).

Отже, тепер образи операторів зсуву

$$\begin{aligned}
J_A x^m y^n = x^{m+1} y^n, \quad J_{A^{-1}} x^m y^n = x^{m-1} y^n,\\
J_B x^m y^n = x^m y^{n+1}, \quad J_{B^{-1}} x^m y^n = x^m y^{n-1},
\end{aligned}$$

позначені для простоти також через $J_A$, $J_B$, $J_{A^{-1}}$, $J_{B^{-1}}$, у базисі 13 мають вигляд матриць (4)–(7).

Для подальшого запису перетворення Фур'є запишемо скалярний добуток:

$$\begin{aligned}
(f_n, P_n(x,y))_{\mathcal{H}_n} = f_{n;0} P_{n;0}(x,y) +\\
+ f_{n;1} P_{n;1}(x,y) + \ldots + f_{n;4n-1} P_{n;4n-1}(x,y),\\
\forall f_n \in \mathcal{H}_n, \quad n \in \mathbb{N},
\end{aligned}$$

де $f_{n;\gamma}$ — координати вектора $f_n$, $\gamma = 0, 1, \dots, 4n-1$.

Пряма спектральна задача для операторів $J_A$, $J_B$, $J_{A^{-1}}$, $J_{B^{-1}}$ та їхніх обернених має такий вигляд.

**Теорема 1.** *Нехай у просторі (3) визначені лінійні оператори $A$, $B$, $A^{-1}$, $B^{-1}$ на фінітних векторах $\mathbf{l}_{\text{fin}}$ блочними тридіагональними матрицями типу Якобі $J_A$, $J_B$, $J_{A^{-1}}$, $J_{B^{-1}}$ вигляду (4)–(7), що діють за правилами (8). Припускається, що всі блоки-коефіцієнти $a_n$, $b_n$, $c_n$, $u_n$, $v_n$, $w_n$, $p_n$, $q_n$, $r_n$, $\omega_n$, $\phi_n$, $\psi_n$, $n \in \mathbb{N}_0$ є рівномірно обмеженими та мають нульові і додатні елементи згідно з [1], а замикання $A$ і $B$ та $A^{-1}$ і $B^{-1}$ за неперервністю є обмеженими комутуючими самоспряженими операторами у цьому просторі.*

*Розклад за узагальненими власними векторами операторів $A$ і $B$ та $A^{-1}$ і $B^{-1}$ відповідних блочним тридіагональним матрицям типу Якобі $J_A$, $J_B$, $J_{A^{-1}}$, $J_{B^{-1}}$ має такий вигляд. Для заданого початкового значення $\varphi_0(x,y) = \varphi_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ система рівнянь*

$$\begin{aligned}
(J_A\varphi(x,y))_n &= a_{n-1}\varphi_{n-1}(x,y) +\\
&\quad + b_n\varphi_n(x,y) + c_n\varphi_{n+1}(x,y) =\\
&\quad = x\varphi_n(x,y),\\
(J_B\varphi(x,y))_n &= u_{n-1}\varphi_{n-1}(x,y) +\\
&\quad + w_n\varphi_n(x,y) + v_n\varphi_{n+1}(x,y) =\\
&\quad = y\varphi_n(x,y),\\
(J_{A^{-1}}\varphi(x,y))_n &= p_{n-1}\varphi_{n-1}(x,y) +\\
&\quad + r_n\varphi_n(x,y) + q_n\varphi_{n+1}(x,y) =\\
&\quad = x^{-1}\varphi_n(x,y),\\
(J_{B^{-1}}\varphi(x,y))_n &= \psi_{n-1}\varphi_{n-1}(x,y) +\\
&\quad + \omega_n\varphi_n(x,y) + \phi_n\varphi_{n+1}(x,y) =\\
&\quad = y^{-1}\varphi_n(x,y),\\
&\quad n \in \mathbb{N}_0, \quad \varphi_{-1}(x,y) =: 0,
\end{aligned} \tag{15}$$

*має розв'язок $\varphi(x,y) = (\varphi_n(x,y))_{n=0}^\infty$, $\varphi_n(x,y)$ зі значеннями в $\mathcal{H}_n$, у вигляді*

$$\begin{aligned}
\varphi_n(x,y) = P_n(x,y)\varphi_0 =\\
= (P_{n;0}, P_{n;1}, \dots, P_{n;4n-1},)\varphi_0,
\end{aligned}$$

*який є узагальненим власним вектором пари операторів $A$ і $B$ та $A^{-1}$ і $B^{-1}$ згідно з проекційною спектральною теоремою [2; 3; 11]. $P_{n;\gamma}(x,y)$, $\gamma = 0, 1, \dots, 4n-1$ — поліноми від $x$ і $y$ та $x^{-1}$ і $y^{-1}$.*

*З розкладу за узагальненими власними векторами для операторів $A$ і $B$ та $A^{-1}$ і $B^{-1}$ отримуємо перетворення Фур'є у вигляді*

$$\begin{aligned}
\mathbf{l}_2 \supset \mathbf{l}_{\text{fin}} \ni f = (f_n)_{n=0}^\infty \mapsto \hat{f}(x,y) =\\
= \sum_{n=0}^\infty P_n^*(x,y) f_n =\\
= P_{0;0}(x,y) f_{0;0} + \sum_{n=1}^\infty \sum_{\gamma=0}^{4n-1} \overline{P_{n;\gamma}(x,y)} f_{n;\gamma} \in\\
\in L_2(\mathbb{R}^2, d\rho(x,y)) := L_2,
\end{aligned} \tag{16}$$

*де $P_n^*(x,y) : \mathcal{H}_n \to \mathcal{H}_0$ — оператор спряжений до $P_n(x,y) : \mathcal{H}_0 \to \mathcal{H}_n$, $d\rho(x,y)$ — відповідна спектральна міра $A$ і $B$ ($A^{-1}$ і $B^{-1}$).*

*Рівність Парсеваля має вигляд:* $\forall f, g \in \mathbf{l}_{\mathrm{fin}}$

$$\begin{aligned}(f,g)_{\mathbf{l}_2} &= \int\limits_{\mathbb{R}^2} \hat{f}(x,y)\overline{\hat{g}(x,y)}\, d\rho(x,y),\\ (J_A f,g)_{\mathbf{l}_2} &= \int\limits_{\mathbb{R}^2} x\hat{f}(x,y)\overline{\hat{g}(x,y)}\, d\rho(x,y),\\ (J_B f,g)_{\mathbf{l}_2} &= \int\limits_{\mathbb{R}^2} y\hat{f}(x,y)\overline{\hat{g}(x,y)}\, d\rho(x,y),\\ (J_{A^{-1}} f,g)_{\mathbf{l}_2} &= \int\limits_{\mathbb{R}^2} x^{-1}\hat{f}(x,y)\overline{\hat{g}(x,y)}\, d\rho(x,y),\\ (J_{B^{-1}} f,g)_{\mathbf{l}_2} &= \int\limits_{\mathbb{R}^2} y^{-1}\hat{f}(x,y)\overline{\hat{g}(x,y)}\, d\rho(x,y).\end{aligned} \tag{17}$$

*Перетворення (16) і тотожність (17) розширюються за неперервністю на* $\forall f, g \in \mathbf{l}_2$ *так, що оператор (16) є унітарним і відображає весь* $\mathbf{l}_2$ *у весь* $L_2(\mathbb{R}^2, d\rho(x,y))$.

*Поліноми* $P_{n;\gamma}(x,y)$, $n \in \mathbb{N}$, $\gamma = 0, \ldots, 4n-1$ *і* $P_{0;0} = 1$ *утворюють ортонормовану систему в* $L_2$ *у сенсі:*

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \sum_{i=1}^{j} \overline{P_{j;i}(x,y)} f_{j;i} \sum_{i=l}^{k} P_{k;l}(x,y)\overline{f_{k;l}} = \\ = \delta_{j,k}(f_j, g_k)_{\mathcal{H}_j}.$$

*де* $\forall f_j \in \mathcal{H}_j$, $\forall g_k \in \mathcal{H}_k$, $j,k \in \mathbb{N}_0$.

*Матриці*

$$\begin{aligned} J_A &= (\tau_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}, & \tau_{j,k} &= (\tau_{j,k;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{j,k},\\ J_B &= (\theta_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}, & \theta_{j,k} &= (\theta_{j,k;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{j,k},\\ J_{A^{-1}} &= (\eta_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}, & \eta_{j,k} &= (\eta_{j,k;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{j,k},\\ J_{B^{-1}} &= (\vartheta_{j,k})_{j,k=0}^{\infty}, & \vartheta_{j,k} &= (\vartheta_{j,k;\alpha,\beta})_{\alpha,\beta=0}^{j,k},\end{aligned}$$

*відновлюються за формулами:*

$$\begin{aligned} \tau_{j,k;\alpha,\beta} &= (J_A \delta_{k,\beta}, \delta_{j,\alpha})_{\mathbf{l}_2}\\ &= \iint\limits_{\mathbb{R}^2} x\overline{P_{k;\beta}(x,y)} P_{j;\alpha}(x,y) d\rho(x,y),\\ \theta_{j,k;\alpha,\beta} &= (J_B \delta_{k,\beta}, \delta_{j,\alpha})_{\mathbf{l}_2}\\ &= \iint\limits_{\mathbb{R}^2} y\overline{P_{k;\beta}(x,y)} P_{j;\alpha}(x,y) d\rho(x,y),\\ \eta_{j,k;\alpha,\beta} &= (J_A \delta_{k,\beta}, \delta_{j,\alpha})_{\mathbf{l}_2}\\ &= \iint\limits_{\mathbb{R}^2} x^{-1}\overline{P_{k;\beta}(x,y)} P_{j;\alpha}(x,y) d\rho(x,y),\\ \vartheta_{j,k;\alpha,\beta} &= (J_B \delta_{k,\beta}, \delta_{j,\alpha})_{\mathbf{l}_2}\\ &= \iint\limits_{\mathbb{R}^2} y^{-1}\overline{P_{k;\beta}(x,y)} P_{j;\alpha}(x,y) d\rho(x,y).\end{aligned} \tag{18}$$

*Доведення* теореми у випадку не сильної проблеми моментів детально викладено в [10]. Наведемо короткий варіант доведення нашої теореми. Розглядаємо оператори у просторі $\mathbf{l}_2$ вигляду (3). Додатково запишемо оснащення $\mathbf{l}_2$:

$$(\mathbf{l}_{\mathrm{fin}})' \supset \mathbf{l}_2(p^{-1}) \supset \mathbf{l}_2 \supset \mathbf{l}_2(p) \supset \mathbf{l}_{\mathrm{fin}}, \tag{19}$$

де $\mathbf{l}_2(p)$ — зважений $\mathbf{l}_2$ із вагами $p = (p_n)_{n=0}^{\infty}$, $p_n \geq 1$, ($p^{-1} = (p_n^{-1})_{n=0}^{\infty}$). У нашому випадку $\mathbf{l}_2(p)$ — Гільбертів простір послідовностей $f = (f_n)_{n=0}^{\infty}$, $f_n \in \mathcal{H}_n$ із нормою і скалярним добутком:

$$\begin{aligned}\|f\|_{\mathbf{l}_2(p)}^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_{\mathcal{H}_n}^2 p_n,\\ (f,g)_{\mathbf{l}_2(p)} &= \sum_{n=0}^{\infty} (f_n, g_n)_{\mathcal{H}_n} p_n.\end{aligned} \tag{20}$$

Аналогічно визначається $\mathbf{l}_2(p^{-1})$; $\mathbf{l}_{\mathrm{fin}}$ — простір фінітних послідовностей $(\mathbf{l}_{\mathrm{fin}})'$ — спряжений простір до $\mathbf{l}_{\mathrm{fin}}$. Не важко показати, що вкладення $\mathbf{l}_2(p) \hookrightarrow \mathbf{l}_2$ є квазіядерним if $\sum_{n=0}^{\infty} np_n^{-1} < \infty$ (див., наприклад, [2, розділ 7; 11, розділ 15]).

Нехай $A$ і $B$ — пара комутуючих обмежених операторів, що мають обернені $A^{-1}$ і $B^{-1}$, стандартно пов'язаних із оснащенням (19). Згідно з проекційною спектральною теоремою (див. [3, розділ 3, теорема 2.7; 2, розділ 5; 11, розділ 15]) ці оператори мають зображення для $f \in \mathbf{l}_2$,

$$\begin{aligned} Af &= \int\limits_{\mathbb{R}^2} x\Phi(x,y)\, d\sigma(x,y) f,\\ Bf &= \int\limits_{\mathbb{R}^2} y\Phi(x,y)\, d\sigma(x,y) f,\\ A^{-1}f &= \int\limits_{\mathbb{R}^2} x^{-1}\Phi(x,y)\, d\sigma(x,y) f,\\ B^{-1}f &= \int\limits_{\mathbb{R}^2} y^{-1}\Phi(x,y)\, d\sigma(x,y) f,\end{aligned} \tag{21}$$

де $\Phi(x,y) : \mathbf{l}_2(p) \to \mathbf{l}_2(p^{-1})$ — узагальнений проектор, а $d\sigma(x,y)$ — спектральна міра. Для всіх $f \in \mathbf{l}_{\mathrm{fin}}$ проекція $\Phi(x,y)f \in \mathbf{l}_2(p^{-1})$ є узагальненим власним вектором $A$ і $B$ ($A^{-1}$ і $B^{-1}$) із відповідними власними значеннями $x$, $y$, $x^{-1}$, $y^{-1}$. Для всіх $f, g \in \mathbf{l}_{\mathrm{fin}}$ рівність Парсеваля

$$(f,g)_{\mathbf{l}_2} = \int\limits_{\mathbb{R}^2} (\Phi(x,y)f, g)_{\mathbf{l}_2} d\sigma(x,y); \tag{22}$$

після замикання (22) виконується для $\forall f, g \in \mathbf{l}_2$.

Позначимо через $\pi_n$ проектор в $\mathbf{l}_2$ на $\mathcal{H}_n$, $n \in \mathbb{N}_0$. Отже $\forall f = (f_n)_{n=0}^{\infty} \in \mathbf{l}_2$ маємо $f_n = \pi_n f$. Аналогічно цей оператор діє і в $\mathbf{l}_2(p)$ та $\mathbf{l}_2(p^{-1})$.

Розглянемо операторну матрицю

$$(\Phi_{j,k}(x,y))_{j,k=0}^{\infty},$$

де

$$\begin{aligned}&\Phi_{j,k}(x,y)=\pi_j\Phi(x,y)\pi_k,\\&\Phi_{j,k}(x,y):\mathbf{l}_2\to\mathcal{H}_j,\ (\mathcal{H}_k\to\mathcal{H}_j).\end{aligned}\tag{23}$$

Рівність Парсеваля (22) записується для $\forall f,g\in$ $\in\mathbf{l}_2$ у вигляді:

$$\begin{aligned}(f,g)_{\mathbf{l}_2}&=\sum_{j,k=0}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^2}(\Phi(x,y)\pi_k f,\pi_j g)_{\mathbf{l}_2}d\sigma(x,y)=\\&=\sum_{j,k=0}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^2}(\pi_j\Phi(x,y)\pi_k f,g)_{\mathbf{l}_2}d\sigma(x,y)=\\&=\sum_{j,k=0}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^2}(\Phi_{j,k}(x,y)f_k,g_j)_{\mathbf{l}_2}d\sigma(x,y).\end{aligned}\tag{24}$$

Тепер розглянемо більш специфічні оператори $A$ і $B$ та $A^{-1}$ і $B^{-1}$ в $\mathbf{l}_2$. Нехай вони задані матрицями $J_A$ і $J_B$ та $J_{A^{-1}}$ і $J_{B^{-1}}$, що мають блочну тридіагональну форму (4)–(7) з внутрішньою структурою, описаною в [1].

На наступному кроці перепишемо рівність Парсеваля (24) в термінах узагальнених власних векторів комутуючих самоспряжених операторів $A$ і $B$ та $A^{-1}$ і $B^{-1}$.

Нехай $\varphi(x,y)=(\varphi_n(x,y))_{n=0}^{\infty}$, $\varphi_n(x,y)\in\mathcal{H}_n$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ — узагальнений власний вектор в $(\mathbf{l}_{\mathrm{fin}})'$ операторів $A$ і $B$ та $A^{-1}$ і $B^{-1}$ з власними числами $x$, $y$, $x^{-1}$, $y^{-1}$ відповідно. Таким чином $\varphi(x,y)$ це розв'язок з $(\mathbf{l}_{\mathrm{fin}})'$ системи різницевих рівнянь (15) з початковою умовою $\varphi_0\in\mathbb{R}$ і покладено $\varphi_{-1}(x,y)=:0$.

Стверджується, що цей розв'язок є таким: $\forall n\in\mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\varphi_n(x,y)&=P_n(x,y)\varphi_0\\&=(P_{n;0},P_{n;1},\ldots,P_{n;4n-1})\varphi_0.\end{aligned}\tag{25}$$

Тут $P_{n;\gamma}$, $\gamma=0,1,\ldots,4n-1$ — поліноми від $x$ і $y$ та $x^{-1}$ і $y^{-1}$. Ці поліноми мають вигляд

$$P_{n;\gamma}(x,y)=l_{n;\gamma}y^{n\alpha}x^{\beta}+q_{n;\gamma}(x,y),\tag{26}$$

для $\gamma=1,2,\ldots,4n-1$, де $l_{n;\gamma}>0$ і $q_{n;\gamma}(x,y)$ — залишок згідно з порядком (10).

Розглянемо $P_n(x,y)$ з фіксованими $x$ і $y$ як лінійний оператор, який діє з $\mathcal{H}_0$ в $\mathcal{H}_n$, тобто, $\mathcal{H}_0\ni\varphi_0\mapsto P_n(x,y)\varphi_0\in\mathcal{H}_n$. Ми також розуміємо $P_n(x,y)$ як операторнозначний поліном від $x,y\in\mathbb{R}^2$; отже, оператор сполучення має вигляд $P_n^*(x,y)=(P_n(x,y))^*:\mathcal{H}_n\to\mathcal{H}_0$. Використовуючи поліноми $P_n(x,y)$, будуємо таке представлення для $\Phi_{j,k}(x,y)$.

Оператор $\Phi_{j,k}(x,y)$, $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$ має такий вигляд:

$$\begin{aligned}&\Phi_{j,k}(x,y)=P_j(x,y)\Phi_{0,0}(x,y)P_k^*(x,y),\\&\Phi_{j,k}(x,y):\mathcal{H}_k\to\mathcal{H}_j,\end{aligned}\tag{27}$$

для $j,k\in\mathbb{N}_0$, де $\Phi_{0,0}(x,y)\geq 0$ скаляр.

Тепер можна переписати рівність Парсеваля (24) в більш конкретній формі. Нарешті, ми підставимо вираз (27) для $\Phi_{j,k}(x,y)$ в (24) і отримаємо, що

$$\begin{aligned}(f,g)_{\mathbf{l}_2}&=\sum_{j,k=0}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^2}(\Phi_{j,k}(x,y)f_k,g_j)_{\mathbf{l}_2}d\sigma(x,y)=\\&=\sum_{j,k=0}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^2}(P_j(x,y)\Phi_{0,0}(x,y)P_k^*(x,y)f_k,g_j)_{\mathbf{l}_2}\times\\&\qquad\times d\sigma(x,y)=\\&=\sum_{j,k=0}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^2}(P_k^*(x,y)f_k,P_j^*(x,y)g_j)_{\mathbf{l}_2}d\rho(x,y)=\\&=\int_{\mathbb{R}^2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}P_k^*(x,y)f_k\right)\overline{\left(\sum_{j=0}^{\infty}P_j^*(x,y)g_j\right)}d\rho(x,y),\\&d\rho(x,y)=\Phi_{0,0}(x,y)\,d\sigma(x,y),\quad\forall f,g\in\mathbf{l}_{\mathrm{fin}}.\end{aligned}\tag{28}$$

Позначимо перетворення Фур'є «$\widehat{\ }$» для комутуючих самоспряжених операторів $A$ і $B$ ($A^{-1}$ і $B^{-1}$) в просторі $\mathbf{l}_2$:

$$\begin{aligned}\mathbf{l}_2\supset\mathbf{l}_{\mathrm{fin}}\ni f=(f_n)_{n=0}^{\infty}\mapsto\hat{f}(x,y)&=\\=\sum_{n=0}^{\infty}P_n^*(x,y)f_n\in L_2(\mathbb{R}^2,d\rho(x,y)).\end{aligned}\tag{29}$$

Отже, (28) дає рівність Парсеваля у фінальній формі,

$$(f,g)_{\mathbf{l}_2}=\int_{\mathbb{R}^2}\hat{f}(x,y)\overline{\hat{g}(x,y)}\,d\rho(x,y),\qquad\forall f,g\in\mathbf{l}_{\mathrm{fin}}.\tag{30}$$

Продовжимо (30) за неперервністю для $\forall f,g\in\mathbf{l}_2$.

Ортогональність поліномів $P_n^*(x,y)$ з (30) для $\forall k,j\in\mathbb{N}_0$ розуміється як

$$\int_{\mathbb{R}^2}(P_k^*(x,y)f_k)\overline{(P_j^*(x,y)g_j)}\,d\rho(x,y)==\delta_{j,k}(f_j,g_j)_{\mathcal{H}_j},\tag{31}$$

де $f=(0,\ldots,0,f_k,0,\ldots)$, $f_k\in\mathcal{H}_k$, $g=$ $=(0,\ldots,0,g_j,0,\ldots)$, $g_j\in\mathcal{H}_j$ в (29) і (30).

Використовуючи зображення (25) для цих многочленів, переписуємо рівність (31) у зазвичай класичній скалярній формі. Щоб зробити це, зауважимо, що $P_0^*(x,y)=\bar{P}_0(x,y)$ і для $n\in\mathbb{N}$ відповідно до (25)

$$\begin{aligned}P_n(x,y)=(P_{n;0}(x,y),P_{n;1}(x,y),\ldots,&\\P_{n;4n-1}(x,y)):\mathcal{H}_0\to\mathcal{H}_n.&\end{aligned}$$

Отже, спряжений оператора $P_n^*(x,y) : \mathcal{H}_n \to \mathcal{H}_0$:

$$\begin{aligned}(P_n(x,y)q,p)_{\mathcal{H}_n} &= ((P_{n;0}(x,y)q, P_{n;1}(x,y)q, \ldots,\\ &\quad P_{n;4n-1}(x,y)q),(p_0,p_1,\ldots,p_n))_{\mathcal{H}_n} =\\ &= P_{n;0}(x,y)q\bar{p}_0 + P_{n;1}(x,y)q\bar{p}_1 + \cdots\\ &\quad + P_{n;4n-1}(x,y)q\bar{p}_n =\\ &= q\overline{(\overline{P_{n;0}(x,y)}p_0 + \overline{P_{n;1}(x,y)}p_1 + \cdots}\\ &\quad \overline{+\overline{P_{n;4n-1}(x,y)}p_n)} = (q, P_n^*(x,y)p)_{\mathcal{H}_0},\end{aligned}$$

де, $P_n^*(x,y)p = \overline{P_{n;0}(x,y)}p_0 + \overline{P_{n;1}(x,y)}p_1 + \cdots + \overline{P_{n;4n-1}(x,y)}p_n$, $\forall q \in \mathcal{H}_0$, і $p = (p_0,p_1,\ldots,p_n) \in \mathcal{H}_n$.

З останньої рівності для $n \in \mathbb{N}$ і $f_n = (f_{n,0}, f_{n,1}, \ldots, f_{n,4n-1}) \in \mathcal{H}_n$, отримуємо:

$$\begin{aligned}P_n^*(x,y)f_n &= \overline{P_{n;0}(x,y)}f_{n;0} + \overline{P_{n;1}(x,y)}f_{n;1} + \cdots\\ &\quad + \overline{P_{n;4n-1}(x,y)}f_{n;4n-1}, \quad P_0^*(x,y) = 1. \qquad (32)\end{aligned}$$

Тому (31) має вигляд: $\forall f_{k;0}, f_{k;1}, \ldots, f_{k;k}, g_{j;0}, g_{j;1}, \ldots, g_{j;j} \in \mathbb{C}$, $j,k \in \mathbb{N}_0$,

$$\int_{\mathbb{R}^2} \Big(\sum_{\alpha=0}^{k} \overline{P_{k;\alpha}(x,y)} f_{k;\alpha}\Big) \overline{\Big(\sum_{\beta=0}^{j} \overline{P_{j;\beta}(x,y)} f_{j;\beta}\Big)} \times \times d\rho(x,y) = \delta_{j,k} \sum_{\alpha=0}^{j} f_{j;\alpha}\bar{g}_{j;\alpha}.$$

Ця рівність еквівалентна наступному співвідношенню ортогональності в звичайній класичній формі:

$$\int_{\mathbb{R}^2} \overline{P_{k;\beta}^*(x,y)} P_{j;\alpha} d\rho(x,y) = \delta_{j,k}\delta_{\alpha,\beta}, \qquad (33)$$

$(P_{0;0} = P_0(x,y))$, для $\forall j,k \in \mathbb{N}_0$, $\forall \alpha = 0,1,\ldots,4j-1$, $\beta = 0,1,\ldots,4k-1$.

Зазначимо, що у зв'язку з (32) перетворення Фур'є (29) може бути переписано у вигляді (16). З (30) отримуємо (17). Тоді вирази для коефіцієнтів (18) випливають з (17).

## Поліноми другого роду

Поліноми другого роду $Q_n(z_1 z_2)$ визначаємо виразом, який узагальнює відомий вираз для поліномів другого роду у класичному випадку, а саме, покладемо:

$$\begin{aligned}Q_n(z_1,z_2) &:= \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(\lambda - z_1)(\mu - z_2)} \times\\ &\times (P_n(\lambda,\mu) - P_n(\lambda,z_2) - P_n(z_1,\mu) + P_n(z_1,z_2)) \times\\ &\times d\rho(\lambda,\mu), \qquad (34)\end{aligned}$$

де $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$, і $d\rho(\lambda,\mu)$ міра на $\mathbb{R}^2$ із компактним носієм, відповідна парі обмежених самоспряжених комутуючих операторів $J_A$ і $J_B$ та $J_{A^{-1}}$ і $J_{B^{-1}}$.

Визначена в (34) послідовність $Q(z) = (Q_n(z_1,z_2))_{n=0}^{\infty}$ є розв'язком системи різницевих рівнянь $n \in \mathbb{N}$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}&a_{n-1}Q_{n-1}(z_1,z_2) + b_nQ_n(z_1,z_2)\\ &\qquad + c_nQ_{n+1}(z_1,z_2) = z_1Q_n(z_1,z_2),\\ &u_{n-1}Q_{n-1}(z_1,z_2) + w_nQ_n(z_1,z_2)\\ &\qquad + v_nQ_{n+1}(z_1,z_2) = z_2Q_n(z_1,z_2),\\ &p_{n-1}Q_{n-1}(z_1,z_2) + r_nQ_n(z_1,z_2)\\ &\qquad + q_nQ_{n+1}(z_1,z_2) = z_1^{-1}Q_n(z_1,z_2),\\ &\psi_{n-1}Q_{n-1}(z_1,z_2) + \omega_nQ_n(z_1,z_2)\\ &\qquad + \phi_nQ_{n+1}(z_1,z_2) = z_2^{-1}Q_n(z_1,z_2),\end{aligned} \qquad (35)$$

але із початковими даними $Q_{0;0}(z_1,z_2) = 0$. Такий факт доводиться аналогічно [13].

## Аналог функції Вейля

Введемо також аналог функції Вейля для сильної двовимірної дійсної проблеми моментів. Використовуючи вираз (34), покладемо

$$\begin{aligned}M(z_1,z_2) &= (R_{z_1}(A)\delta_0, R_{\bar{z}_2}(B)\delta_0)_{\mathrm{l}_2}\\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(\lambda - z_1)(\mu - z_2)} d\rho(\lambda,\mu). \qquad (36)\end{aligned}$$

Функція $M(z_1,z_2)$ однозначно визначає спектральну міру операторів $A$ і $B$ ($A^{-1}$ і $B^{-1}$). Цей факт для не сильної двовимірної проблеми моментів доведено в [13].

### *Список літератури*


1. Козак В. І. Побудова блочних матриць типу Якобі, відповідних строгій двовимірній дійсній проблемі моментів / В. І. Козак // Наукові записки НаУКМА. — 2015. — Т. 165 : Фізико-математичні науки. — С. 19–25.
2. Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов / Ю. М. Березанский. — К. : Наук. думка, 1965. — 450 с.
3. Березанский Ю. М. Спектральные методы в бесконечномерном анализе / Ю. М. Березанский, Ю. Г. Кондратьев. — К. : Наук. думка, 1988. — 800 с.
4. Berezansky Yu. M. Spectral theory of commutative Jacobi fields: direct and inverse problems / Yu. M. Berezansky // Fields Inst. Communic. — 2000. — Vol. 25. — P. 211–224.

5. Berezansky Yu. M. Some generalizations of the classical moment problem / Yu. M. Berezansky // Integr. Equ. Oper. Theory. — 2002. — Vol. 44. — P. 255–289.
6. Berezansky Yu. M. The complex moment problem in the exponential form / Yu. M. Berezansky, M. E. Dudkin // Methods Funct. Anal. Topology. — 2004. — No. 4. — P. 1–10.
7. Berezansky Yu. M. The direct and inverse spectral problems for the block Jacobi type unitary matrices / Yu. M. Berezansky, M. E. Dudkin // Methods Funct. Anal. Topology. — 2005. — Vol. 11, no. 4. — P. 327–345.
8. Berezansky Yu. M. The complex moment problem and direct and inverse spectral problems for the block Jacobi type bounded normal matrices / Yu. M. Berezansky, M. E. Dudkin // Methods Funct. Anal. Topology. — 2005. — Vol. 12, no. 1. — P. 1–32.
9. Dudkin M. E. The exact inner structure of the block Jacobi type unitary matrices connected with the corresponding direct and inverse spectral problems matrices / M. E. Dudkin // Methods Funct. Anal. Topology. — 2008. — Vol. 14, no. 2. — P. 168–176.
10. Dudkin M. E. Direct and inverse spectral problems for the block Jacobi type bounded symmetric matrices related to the two dimensional real moment problem / M. E. Dudkin, V. I. Kozak // Methods Funct. Anal. Topology. — 2014. — Vol. 21, no. 3. — P. 219–251.
11. Березанский Ю. М. Функциональный анализ. Курс лекций / Ю. М. Березанский, Г. Ф. Ус, З. Г. Шефтель. — К. : Вища шк., 1990. — 600 с.
12. Ахиезер Н. И. Классическая проблема моментов / Н. И. Ахиезер. — М. : Гос. физ.-мат. лит., 1961. — 312 с.
13. Дудкін М. Є. Блочні матриці типу Якобі відповідні двовимірній проблемі моментів: поліноми другого роду та функція Вейля / М. Є. Дудкін, В. І. Козак // Український математичний журнал. — 2016. — Т. 21, № 68. — С. 495–505.

*M. Dudkin, V. Kozak*

# THE INVESTIGATIONS OF JACOBI TYPE SYMMETRIC MATRICES RELATED TO THE STRONG TWO DIMENSION REAL POWER MOMENT PROBLEM

*In this article we propose an approach to the strong two-dimensional Hamburger moment problem based on the theory of generalized eigenvectors expansion for two commuting selfadjoint operators, that have inverse operators and the construction of corresponding block three-diagonals Jacobi type matrices.*

*In this approach we at first prove the one-to-one correspondence between the strong two-dimensional Hamburger moment problem and corresponding block three-diagonals Jacobi type matrices by the use of the theory of eigenfunction expansion on generalized eigenvectors corresponding two commuting operators and their inverse operators.*

*After this we show that operators generated by Jacobi type three-diagonals block matrix have the spectral measure corresponding to the moment representation.*

*Such approach is proposed by Yu. M. Berezansky many years ago and gives the possibility to investigate the following moment problems: classical, trigonometric, complex, matrix and different many-dimensional analogs of them, including infinite-dimensional cases.*

*At first the similar to above mentioned idea of the investigations of positive defined functions (named directed functionals) belongs to M. G. Krein (1946–1948). He has constructed the Hilbert space by means of investigated positive definite kernel and to natural operators in this space connected with investigated problem.*

*All investigations are presented under not very burdening conditions, namely we suppose that the measure $d\rho(x, y)$ has compact support on the real plane $\mathbb{R}^2$, zero not belong to this support, such measure has all moments, the set $x^n y^m$, $m, n \in \mathbb{Z}$ is liner independent with respect to $d\rho(x, y)$ and is total in $L_2(\mathbb{R}^2, d\rho(x, y))$. It means that we consider two bounded non-degenerated commuting selfadjoint operators such that have obligatory bounded inverse operators.*

**Keywords:** of Jacobi type symmetric matrices, the strong two dimension real power moment problem, polynomials of second order, analog of Weyl function.

*Матеріал надійшов 22.06.2016*