УДК 519.217.8

Чорней Р. К.

ПРО ДЕЯКІ ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРІЇ КЕРУВАННЯ МАРКОВСЬКИМИ ПОЛЯМИ СПЕЦІАЛЬНОЇ СТРУКТУРИ

У роботі розглядаються деякі застосування теорії керованих марковських полів, заданих на деякому скінченному неорієнтованому графі. Граф описує систему «сусідської залежності», еволюція випадкового процесу описується через локальну і синхронну зміну станів вершин графу, що залежать від рішень, що приймаються в них. Наведено приклад застосування теорії до NK-автоматів Кауффмана та керування лісовим господарством задля зменшення збитків від пошкодження вітром.

Ключові слова: марковський процес прийняття рішень, оптимальна стратегія.

Вступ

Теорія керування випадковими процесами та полями досить розгалужена і об'ємна. Застосування її теоретичних положень дають змогу описати процеси різної природи. В роботі [1] розглянуто деякі проблеми, які виникають під час розв'язку багатьох прикладних задач економіки, розпізнавання, соціології, біології, моделювання катастроф. Основною метою цієї роботи є дослідження застосування керованих випадкових полів, заданих на скінченному неорієнтованому графі [2], до задач керування біологічними системами на прикладі NK-автоматів Кауффмана та керування лісовим господарством задля зменшення збитків від ураження вітром.

Постановка задачі

Матеріал цього розділу спирається на результати роботи [2].

Нехай задано деякий неорієнтований скінченний граф $\Gamma = (V, B)$ з множиною вершин V і множиною ребер $B \subset V^2 - \operatorname{diag} V$. Позначимо $\{k, j\}$ ребро, що з'єднує вершини графа k і j. Околом вершини k називатимемо множину вершин $N(k) = \{j : \{k, j\} \in B\}$. Повним околом вершини k — множину $\widetilde{N}(k) = N(k) \cup \{k\}$, тобто окіл вершини k разом з самою вершиною k. Для будь-якої підмножини $K \subset V$ означимо окіл як $N(K) = \bigcup_{k \in K} N(k) - K$, а повний окіл як $\widetilde{N}(K) = N(K) \cup K$. Для кожної підмножини вершин $K \subset V$ позначимо маргинальний вектор стану x $x_K = (x_k,\ k \in K) \in X_K = \times_{i \in K} X_i$.

Нехай $X_i = \{x_i^1, \ldots, x_i^{n_i}\}$ — локальний простір станів вершини $i \in V$, тобто скінченна множина допустимих станів, що ставляться у відповідність вершині i. Тоді $X = \times_{i \in V} X_i$ — глобальний простір станів системи. Для кожної підмножини вершин $K \subset V$ сукупність $\{x_k,\ k \in K\} \in X_K = \times_{i \in K} X_i$ позначатимемо x_K.

Випадкова величина ξ, визначена на деякому ймовірністному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, яка приймає значення в X, називається (дискретним) випадковим полем на (V, B) (або, простіше, випадковим полем на V). Маргінальні випадкові величини із значеннями в просторі X_K позначатимемо ξ_K. Для $K = \{k\}$ писатимемо ξ_k.

Всюди вважатимемо, що всі випадкові величини задані на деякому ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$.

Означення 1. Дискретне випадкове поле ξ на (V, B), визначене вище, є (дискретним) марковським полем, якщо виконується

$$\mathsf{P}(\xi_k = x_k \mid \xi_{V-\{k\}}) = \mathsf{P}(\xi_k = x_k \mid \xi_{N(k)}) \qquad (1)$$

для всіх $x \in X$.

У багатьох задачах, що стосуються прикладних застосувань, випадкові поля використовують для опису еволюції системи, тобто значення ξ залежить від часу t. У цьому разі писатимемо $\xi = (\xi^t)$, щоб підкреслити залежність від часу.

Усюди в цій роботі вважатимемо, що t набуває дискретних значень $t = 0, 1, \ldots$ Індекс k біля ξ_k^t вказує на належність до вершини k, таким чином ξ_k^t позначає маргінальний розподіл у момент часу t значень вершини k деякого векторнозначного процесу $\xi = (\xi^t : t = 0, 1, \ldots)$.

Якщо марковський процес ξ, описаний вище, ставиться у відповідність системі околів $\{N(k) : k \in V\}$ графу (V, B), природно припустити, з урахуванням еволюції системи в часі, що значення x_k k-ї вершини у кожен момент часу залежить від попереднього стану всієї системи тільки через значення вершин з $\widetilde{N}(k)$ (включно з k) у попередній момент часу.

Для опису цього наведемо визначення марковської властивості в просторі та часі.

Означення 2. Нехай $\xi = \{\xi^t, t = 0, 1, \ldots\}$ — дискретний марковський процес, описаний вище, зі скінченним простором станів X на Γ. Перехідні ймовірності на X називаються локальними [3,

p. 100], якщо

$$\mathsf{P}\{\xi_k^{t+1} = x_k^{t+1} \mid \xi^t, \ldots, \xi^0\} = \\ = \mathsf{P}\{\xi_k^{t+1} = x_k^{t+1} \mid \xi_{\widetilde{N}(k)}^t\} \quad (2)$$

для всіх $k \in V$, $x^{t+1} \in X$ виконується майже всюди по мірі P, тобто стан вершини k залежить тільки від її повного околу в попередній момент часу.

Перехідні ймовірності на X називаються синхронними [3, p. 100], якщо

$$\mathsf{P}\{\xi_K^{t+1} = x_K^{t+1} \mid \xi^t = x^t\} = \\ = \prod_{k \in K} \mathsf{P}\{\xi_k^{t+1} = x_k^{t+1} \mid \xi^t = x^t\} \quad (3)$$

для всіх $K \subset V$, $x^t, x^{t+1} \in X$.

Якщо ξ задовольняє (2) і (3), то вона називається марковським процесом із локальною синхронною взаємодією компонент на (Γ, X), або, коротко, (залежним від часу) марковським випадковим полем.

Припустимо, що у кожен момент часу дано множину дій (керуючих впливів) $U = \times_{i \in V} U_i$ на Γ, де U_i — множина допустимих дій (рішень) для вершини i. Припустимо, що U_i не залежить від t і скінченна. Позначимо через

$$\Delta^t = \Delta^t(x^0, \ldots, x^t) = \{\Delta_i^t(x^0, \ldots, x^t) : i \in V\}$$

залежне від історії системи рішення в момент часу t, $t = 0, 1, \ldots$ Розглядатимемо тільки керування, локальні у такому розумінні:

Означення 3. **(1)** Якщо в моменти часу $t = 0, 1, \ldots$ рішення Δ_i^t вершини i приймаються тільки на підставі інформації про історію повного околу $\widetilde{N}(i)$ вершини i, тобто залежно від $x_{\widetilde{N}(i)}^0, \ldots, x_{\widetilde{N}(i)}^t$, то послідовність рішень $\delta_i = \{\Delta_i^t, t \in \mathbb{N}\}$ називається локальною стратегією для вершини i. Таким чином для залежних від історії рішень маємо послідовності $\Delta_i^t(x^0, \ldots, x^t) = \Delta_i^t(x_{\widetilde{N}(i)}^0, \ldots, x_{\widetilde{N}(i)}^t)$. Ці функції визначені в просторі

$$X_{\widetilde{N}(i)}^{t+1} = \underbrace{X_{\widetilde{N}(i)} \times \cdots \times X_{\widetilde{N}(i)}}_{(t+1)\text{ раз}}$$

і приймають значення в U_i.

(2) Локальна стратегія $\delta = (\delta_i : i \in V)$ задається функціями $\delta_i = \{\Delta_i^t, t \geqslant 0\}$, де

$$\Delta_i^0 = \Delta_i^0(x_{\widetilde{N}(i)}^0), \ldots, \\ \Delta_i^t = \Delta_i^t(x_{\widetilde{N}(i)}^0, \ldots, x_{\widetilde{N}(i)}^t), \ldots,$$

є залежною від історії послідовністю рішень вершини i.

Виходячи з цього означення, природно припустити, що вплив керування на еволюцію залежного від часу випадкового поля ξ відбувається через перехідні ймовірності

$$\mathsf{P}\Big\{\xi^{t+1} = x^{t+1} \mid \xi_{\widetilde{N}(i)}^t = y, \\ \{\Delta_i^t(\xi_{\widetilde{N}(i)}^0, \ldots, \xi_{\widetilde{N}(i)}^t) : i \in V\} = u\Big\}.$$

Включення марковської структури згідно з означенням 2 в конструкцію процесу веде до припущення, що закон руху системи характеризується інваріантними у часі перехідними ймовірностями. А саме, як тільки система перебуває у стані y і приймається рішення u, то, незважаючи на її історію, наступний стан вибирається у відповідності з законом переходу, залежним тільки від (y, u).

Виходячи з цього, стратегія δ визначатиме ймовірністну міру в просторі послідовностей $(\xi^0, \xi^1, \ldots)$ для кожного фіксованого початкового стану x^0. Пару (ξ, δ) називатимемо керованою версією випадкового поля ξ стратегією δ.

Керований процес взагалі не буде марковським, оскільки функції Δ_i^t, $i \in V$, залежать не тільки від станів $x_{\widetilde{N}(i)}^t$, $i \in V$, а й від попередніх (локальних) станів $x_{\widetilde{N}(i)}^0, \ldots, x_{\widetilde{N}(i)}^{t-1}$ також.

Означення 4. Локальна стратегія $\delta = (\delta_i : i \in V)$ називається марковською стратегією, якщо $\Delta_i^t(x_{\widetilde{N}(i)}^0, \ldots, x_{\widetilde{N}(i)}^t) = \Delta_i^t(x_{\widetilde{N}(i)}^t)$, $i \in V$, тобто кожна локальна вирішуюча функція Δ_i^t залежить від повної історії тільки через поточний локальний стан вершини i.

Звідси випливає, що використання марковської стратегії δ як стратегії керування залежним від часу марковським випадковим полем визначає марковський процес (ξ, δ). Взагалі кажучи, ця версія ξ не є однорідним марковським ланцюгом.

Означення 5. Локальна марковська стратегія $\delta = (\delta_i : i \in V)$ називається стаціонарною марковською стратегією, якщо $\Delta_i^{t'}(x_{\widetilde{N}(i)}) \equiv \Delta_i^{t''}(x_{\widetilde{N}(i)})$, $i \in V$, для всіх t' і t'', тобто стаціонарна марковська стратегія δ повністю визначається функціями

$$\Delta_i : X_{\widetilde{N}(i)} \to U_i, \qquad i \in V; \\ x_{\widetilde{N}(i)}^t \to \Delta_i(x_{\widetilde{N}(i)}^t).$$

У багатьох задачах допустимі рішення для керуючих впливів на систему залежать тільки від актуального стану системи. Тоді нехай $U_i^t(x_{\widetilde{N}(i)})$ описує певні обмеження значень для рішення Δ_i^t у момент часу t, якщо $\xi_{\widetilde{N}(i)}^t = x_{\widetilde{N}(i)}$ і $U^t(x) = \times_{i \in V} U_i^t(x_{\widetilde{N}(i)})$.

Означення 6. **(1)** Для кожної вершини $i \in V$ і кожної конфігурації околиці (стану) $x_{\widetilde{N}(i)}$ вершини i $U_i^t(x_{\widetilde{N}(i)})$ — множина допустимих рішень для Δ_i^t у момент часу t, якщо $\xi_{\widetilde{N}(i)}^t = x_{\widetilde{N}(i)}$.

(2) Локальна стратегія δ називається допустимою, якщо для кожного $t \in \mathbb{N}$

$$\Delta^t(x^0, \ldots, x^{t-1}, x^t) = \\ = \big\{ \Delta_i^t(x^0_{\widetilde{N}(i)}, \ldots, x^{t-1}_{\widetilde{N}(i)}, x^t_{\widetilde{N}(i)}) : i \in V \big\} \in \\ \in U^t(x^t).$$

Клас усіх допустимих детермінованих локальних стратегій позначимо через LD; підклас допустимих локальних марковських стратегій через LD_M.

(3) Через LD_S позначимо клас допустимих детермінованих стаціонарних локальних марковських стратегій з інваріантними в часі обмежуючими множинами: $\Delta^t = \Delta^{t'}$ для всіх $t, t' \in \mathbb{N}$ і $U^t(x) = U(x) = \times_{i \in V} U_i(x_{\widetilde{N}(i)})$ для всіх t.

Означення 7. Пара (ξ, δ) називається керованим процесом з локально взаємодіючими синхронними компонентами, заданим на скінченному графі $\Gamma = (V, B)$, якщо $\xi = (\xi^t \colon t \in \mathbb{N})$ — стохастичний процес з простором станів $X = \times_{i \in V} X_i$, $\delta = (\delta_i \colon i \in V)$ — локальна стратегія, і переходи ξ визначаються так:

$$\mathsf{P}\big\{\xi_S^{t+1} = x_S \mid \xi^0 = x^0, \Delta^0(\xi^0) = u^0, \ldots, \\ \xi^{t-1} = x^{t-1}, \Delta^{t-1}(\xi^0, \ldots, \xi^{t-1}) = u^{t-1}, \\ \xi^t = y, \Delta^t(\xi^0, \ldots, \xi^t) = u\big\} = \\ = \mathsf{P}\big\{\xi_S^{t+1} = x_S \mid \xi^0 = x^0, \ldots, \xi^{t-1} = x^{t-1}, \\ \xi^t = y, \Delta^t(\xi^0, \ldots, \xi^t) = u\big\} = \\ = \mathsf{P}\big\{\xi_S^{t+1} = x_S \mid \xi^t = y, \Delta^t(\xi^0, \ldots, \xi^t) = u\big\} = \\ = \prod_{j \in S} \mathsf{P}\big\{\xi_j^{t+1} = x_j \mid \xi^t = y, \Delta^t(\xi^0, \ldots, \xi^t) = u\big\} = \\ = \prod_{j \in S} \mathsf{P}\big\{\xi_j^{t+1} = x_j \mid \xi^t_{\widetilde{N}(j)} = y_{\widetilde{N}(j)}, \\ \Delta_j^t(\xi^0_{\widetilde{N}(j)}, \ldots, \xi^t_{\widetilde{N}(j)}) = u_j\big\} = \\ = \prod_{j \in S} \mathsf{Q}_j\{x_j \mid y_{\widetilde{N}(j)}, u_j\} \cdot 1_{\{u\}}\big(\Delta^t(\xi^0, \ldots, \xi^t)\big) = \\ = \mathsf{Q}_S(x_S \mid y, u) \cdot 1_{\{u\}}\big(\Delta^t(\xi^0, \ldots, \xi^t)\big), \\ S \subseteq V, \quad y \in X, \quad u \in U(y),$$

де $\mathsf{Q}_j\{x_j \mid y_{\widetilde{N}(j)}, u_j\}$ — локально визначені перехідні ядра, які означають інваріантний у часі закон руху системи. Для $S = V$ будемо писати:

$$\mathsf{Q}(x \mid y, u) = \mathsf{P}\{\xi^{t+1} = x \mid \xi^t = y, \Delta^t = u\}.$$

Очевидно, що

$$\sum_{x \in X} \mathsf{Q}(x \mid y, u) = 1, \qquad y \in X.$$

ξ коротко називатимемо керованим залежним від часу випадковим полем.

Якщо у стані $t \in \mathbb{N}$ система перебуває у стані $\xi^t = x^t$ і прийнято рішення u^t, то система має (однокрокові) втрати $r(x^t, u^t) \geqslant 0$. Очікувані втрати до моменту часу T включно, якщо ξ починає з $\xi^0 = y$ і використовується стратегія δ будуть тоді такими:

$$Q_T^\delta(y) = \mathsf{E}_y^\delta \frac{1}{T+1} \sum_{t=0}^{T} r(\xi^t, \Delta^t) := \\ := \mathsf{E}_y^\delta \frac{1}{T+1} \sum_{t=0}^{T} r\big(\xi^t, \Delta^t(\xi^0, \ldots, \xi^t)\big), \quad (4)$$

де E_y^δ — математичне сподівання, що відповідає керованому процесу (ξ, δ), якщо $\xi^0 = y$. Задача полягає у знаходженні стратегії δ, що асимптотично мінімізує очікувані витрати на необмеженому горизонті

$$R_y^\delta = \limsup_{T \to \infty} Q_T^\delta(y). \quad (5)$$

Позначимо через

$$\rho(y) = \inf_{\delta \in LD} R_y^\delta$$

значення, яке може набути оптимальна стратегія.

Означення 8. Стратегія $\delta^\star \in LD$ називається оптимальною, якщо $\rho(y) = R_y^{\delta^\star}$ для всіх $y \in X$.

Основним результатом для задачі керування марковським полем на графі є знаходження оптимальної стратегії в класі стаціонарних марковських стратегій (див. [2]).

Теорема. *Розглянемо керований процес (ξ, δ) з локально взаємодіючими синхронними компонентами, заданий на скінченному графі $\Gamma = (V, B)$ відповідно до означення 7 зі скінченною множиною станів X випадкової величини ξ і скінченною множиною керуючих впливів U. Нехай множина допустимих рішень $U^t(\cdot)$ не залежить від t. Тоді в класі LD допустимих детермінованих локальних стратегій існує єдина оптимальна стратегія, яка належить класу LD_S стаціонарних марковських стратегій.*

NK-автомати Кауффмана

Як зазначено в [4], геном вищих організмів налічує інформацію про виробництво близько 100 000 різних протеїнів. Одним із центральних тверджень у біології розвитку є пояснення існування різних типів клітин наявністю різних генів, які функціонують всередині цих клітин. При цьому всі клітини мають майже однаковий генетичний склад. Вони диференціюються унаслідок різної поведінки генів у них.

Геном діє як мережа, у якій гени регулюють один одного або безпосередньо, або за допомогою вироблених протеїнів. Поведінка цієї системи визначає тип клітини. Розуміння структури і поведінки генних регуляторних систем є центральною задачею молекулярної біології.

Кожна складна система має так звані локальні властивості: ці характеристики описують, як окремі елементи в системі пов'язані та як вони можуть впливати один на одний. В геномі елементами є гени. Активність одного гена регулюється невеликою кількістю інших генів. Також існують правила, що керують взаємодією генів.

При заданому наборі локальних властивостей можна збудувати велику єдність (ensemble) або клас усіх систем, які відповідають цим правилам. Статистичні методи дозволяють визначити середні характеристики систем.

С. Кауффман запропонував у [4] такий підхід до моделювання генної регуляторної системи. Поведінка елементів системи ідеалізується представленням їх як булевих елементів. Щоб вивчити поведінку багатьох елементів використовуються випадкові булеві мережі. В булевій NK-мережі кожен з N булевих елементів регулюється K іншими. Для кожного елемента існує булева функція, яка визначає його еволюцію. Поведінка біологічної системи ідеалізується також тим, що розглядаються автономні випадкові булеві NK-мережі, тобто такі, в яких жодні вхідні дані не надходять з-поза системи. Таким чином, задавши значення N і K, можна розглянути клас мереж, які мають спільні властивості. Кожна комбінація значень елементів мережі утворює стан мережі. На кожному часовому кроці значення булевих елементів обчислюються за допомогою булевих функцій. Оскільки всі значення обчислюються одночасно і система змінює значення усіх елементів одномоментно, кажуть, що система синхронна. Послідовність станів називають траєкторією мережі. Важливою властивістю мережі є скінченна кількість станів. Таким чином, система рано чи пізно має увійти в один зі станів повторно. Оскільки наступний стан повністю визначається попереднім, система буде і надалі повторювати траєкторію і утворювати таким чином цикл. Такі цикли називаються динамічними атракторами мережі. Як тільки система досягає стану, який належить циклу, вона залишається в цьому циклі. Стани, які приводять до станів, що належать атрактору, називаються басейном атрактора. Кожна мережа має принаймні один атрактор. Залишена без зовнішнього впливу мережа потрапить в один з атракторів і залишиться в ньому. Інша ситуація спостерігатиметься, якщо мережа зазнає зовнішніх збурень. Збуренням називається одноразова зміна стану на випадковий інший. Розглядатимемо повні (одноразова випадкова зміна значень усіх елементів мережі) та мінімальні збурення (одноразова зміна значення одного випадкового елемента мережі на протилежний). Реакція мережі на збурення може сильно відрізнятися. Для порівняння реакції мереж на збурення введемо поняття стабільності. Стабільність NK-мережі до збурень — умовна ймовірність того, що мережа не вийде за межі свого басейну після збурення.

Особливість повних збурень полягає в тому, що для будь-яких двох станів існує повне збурення, яке переводить перший стан у другий. Отже, у разі повних збурень матимемо повний граф, що описує досяжність станів автомата. Цікавішим з цієї точки зору є варіант мінімальних збурень. Тоді граф досяжності буде відповідати графу околів Γ і, отже, до такої задачі можна буде застосувати результати попереднього розділу. Для цього потрібно визначити функцію втрат. Якщо припустити, що в кожен момент часу випадковим чином відбувається мінімальне збурення, на яке може впливати деяке рішення (наприклад, з метою лікування, селекції тощо), то матимемо перехідні синхронні локальні ймовірності. Крім того, кожній парі рішень і станів можна поставити у відповідність функцію втрат (наприклад, вартість лікування, ступінь досяжності цільового басейну тощо). Таким чином отримаємо задачу мінімізації витрат, для розв'язку якої потрібно буде знайти стаціонарну марковську стратегію.

Порівнюючи стабільність до повних і мінімальних збурень, можна оцінити рівень досяжності між басейнами автомата: якщо різниця між стабільністю до повних і мінімальних збурень висока, то досяжність між станами під впливом мінімальних збурень — низька і навпаки.

Отже, під NK-автоматом розуміють:
- дискретну;
- динамічну;
- синхронну;
- автономну

мережу з N булевих елементів, кожен з яких має K

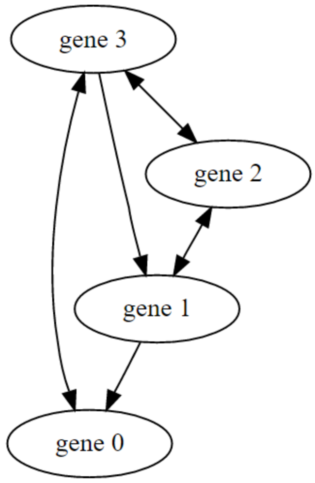

Рис. 1. Граф зв'язків булевих елементів (генів), $N = 4$, $K = 3$

входів та один вихід, причому значення кожного елемента на наступному кроці залежать від значень його вхідних елементів через деяку булеву функцію.

На рис. 1 наведено приклад графа зв'язків булевих елементів (генів), а на рис. 2 граф станів автомата. Бачимо, що автомат має три басейни.

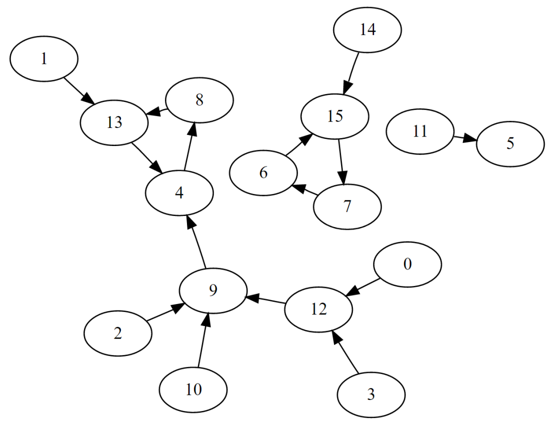

Рис. 2. Граф станів автомата, наведеного на рис. 1

С. Кауффман у [5] наводить низку тверджень щодо залежності між структурними та поведінковими характеристиками NK-автомата. Він розглядає такі властивості NK-автомата:
- кількість атракторів;
- медіанне значення довжини атрактора;
- розміри басейнів, які утворюють навколо себе динамічні атрактори;
- стабільність до мінімальних збурень, тобто одноразової зміни значення значення одного з булевих елементів на протилежне;
- стабільність до структурних змін в автоматі, тобто до змін у логічних функціях;
- досяжність між різними атракторами, тобто кількість інших атракторів, до яких система може перейти після з кожного з атракторів після усіх можливих мінімальних збурень;
- внутрішня гомогенність функції P — частка серед $2K$ значень функції, яка дорівнює нулю (або одиниці, залежно від того, яких значень більше половини);
- середня внутрішня гомогенність усіх функцій з K входами (P_K).

Пошкодження лісів вітром

Для аналізу вартості з урахуванням ризику пошкодження вітром у довгостроковому управлінні лісами і аналізу впливу тривалості періодів часу управління в роботі [6] було створено і проведено дослідження трьох марковських моделей керування лісом великого масштабу з використанням п'яти-, десяти- і двадцятирічного періодів часу. Використовуючи ці три моделі, довгострокові політики ведення лісового господарства з урахуванням і без урахування ризику пошкодження вітром були створені на основі п'яти-, десяти- і двадцятирічних періодів часу. Опишемо, як були визначені постановки моделей, як були оптимізовані політики управління господарством, було оцінено їхній довгостроковий вплив на стан майна, і проведено оцінку їхнього впливу на вартість нерухомості. Обраний лісовий фонд розташований у південній частині Швеції і називається Bjornstorp. Маєток Bjornstorp повністю охоплює 2800 га і складається з 1200 га лісових земель, розділених на 623 стенди, в яких в основному переважають норвезькі ялини.

Типові конструкції і процес збору даних такі. У всіх трьох моделях Bjornstorp кількість можливих станів варіювалася відповідно до довжини періодів часу, в той час як максимальний вік і кількість допустимих рішень для управління була однаковою. Таким чином, простір станів відрізнявся при переході між трьома моделями керованого марковського поля, у той час як простори дій цих моделей були однаковими. Простір дій обирався невеликим, дозволяючи лише два види діяльності управління на кожному стенді, від виконання яких залежала стратегія ($|A_i| = 2$). Для позначення цього стенди поділяли на два типи: чіткий і нечіткий. Ці два види діяльності управління були обрані тому, що вони істотно впливали на рівень ризику і фінансової оцінки стендів. Крім цих двох заходів з управління, стенди були також оброблені відповідно до кількості основних заходів з управління, таких як підготовка будівельного майданчика, посадки, попередніх комерційних вирубок і вирубок для догляду. Терміни проведення цих заходів з управління були заздалегідь визначені і зафіксовані у відповідності до віку стенда.

Характеристики та доходи для кожного стенда були розраховані з використанням моделі зростання та прибутковості (growth-and-yield), розробленій Вікстрьомом [7]. Таблиця була згенерована для кожного стенда так, щоб задовольняти характеристики стенда для кожного можливого стану стенда, а також доходи і витрати, пов'язані з різними видами діяльності, в тому числі доходи, якщо проводилися рятувальні роботи. Модель зростання та прибутковості базується на п'ятирічних періодах часу, результати яких були згодом агреговані в десяти- і двадцятирічні періоди часу усередненням значень відповідних п'ятирічних періодів. Наприклад, дохід від вирубки стенда протягом певного десятирічного періоду розраховується як середній дохід від вирубки стенда протягом відповідних п'ятирічних періодів часу.

Для того щоб оцінити ймовірність пошкодження вітром для стендів, був використаний інструмент, розроблений Олофссоном і Бленновим [8].

Параметри цього інструменту спиралися на історичні дані і були створені для класифікації щорічної ймовірності пошкодження вітром по краях стенда згідно з процедурою класифікації залежно від стану лісу і від географічного місця розташування стенда. Імовірність пошкодження вітром на межі, таким чином, визначається як залежність стану стенда i від стану сусідніх стендів. Використання інструменту для кожної межі між секціями стендів дає можливість класифікувати їх за рівнем щорічної ймовірності пошкодження вітром. Виходячи з класифікації крайніх ділянок стенда, стенди було класифіковано на такі, що мають високу або низьку ймовірність пошкодження вітром. Якщо яка-небудь з крайніх ділянок стенда була класифікована як така, що має високу річну ймовірність пошкодження від вітру, то стенд класифікувався як такий, що має високу ймовірність пошкодження від вітру. Таким чином, тільки якщо всі крайні ділянки мають низьку річну ймовірність пошкодження вітром, стенд був класифікований як такий, що має низьку ймовірність пошкодження від вітру.

Завдяки структурі майна і припущень для інструменту, що використовується для оцінки ймовірності пошкодження вітром, моделі керованих випадкових полів для садиби можна висловити в компактній формі. У цьому разі граф сусідства $G = (V, E)$ визначає структуру прихованих ефектів між стендами. Таким чином, для кожного стенда i визначається, як інші стенди в маєтку впливають на ймовірність пошкодження вітром у цьому стенді i. Крім того, тільки якщо стенд j має спільну межу зі стендом i, $(j, i) \in E$. Таким чином, межові секції $(j, i) \in E$, де стенд j не впливає на ймовірність пошкодження вітром для стенда i, можуть бути видалені без обмеження загальності. Надлишкові і маловпливові залежності між стендами, таким чином, можуть бути видалені, щоб зменшити залежність сусідніх залежностей між стендами і тим самим зменшити час роботи алгоритмів рішення.

Видалення надлишкових і маловпливових сусідніх залежностей було вперше виконано відповідно до межової розмітки між стендами. Інструмент, який використовується для класифікації річної ймовірності пошкодження від вітру, ґрунтується на припущенні, що якщо два стенди розділені дорогою чи нелісовою ділянкою, то стенди взаємно незалежні один від одного і не можуть надавати один одному укриття від вітру. По-друге, залежності сусіда, які не впливають на ймовірність пошкодження стенда вітром, були видалені. Якщо для кожного можливого стану стенда ймовірність пошкодження стенда вітром є однаковою для всіх можливих станів сусіднього стенда, то стан стенда не залежить від стану сусіднього стенда і сусідська залежність є зайвою, а, отже, може бути видалена.

Надлишкові і маловпливові межові секції були видалені для кожної з трьох моделей. Після видалення надлишкових і маловпливових межових секцій, стенди були згруповані в кластери. Кластер являє собою набір стендів, для яких ризики пошкодження вітром залежать тільки від інших стендів в кластері. Зокрема, для будь-яких двох кластерів $A = \{s_f, \ldots, s_g\}$ і $B = \{s_k, \ldots, s_l\}$ не існує жодного орієнтованого ребра, ні $(i, j) \in E$, ні $(j, i) \in E$, де $i \in \{s_f, \ldots, s_g\}$ і $j \in \{s_k, \ldots, s_l\}$. Розміри кластерів були порівняно невеликі і найбільші кластери містили лише 5 стендів.

Розрахунок і оцінка політики управління проводилися так. Завдяки незалежності між кластерами, політика управління лісовим господарством кожного кластера може бути обчислена окремо. Після цього політика управління всім майном може бути створена шляхом об'єднання політик управління кластерами. Таким чином, завдяки компактній формі моделі, політика управління запропонованих моделей керованого марковського поля може бути обчислена значно ефективніше.

Висновок

Загалом застосування теорії випадкових полів на практиці ускладнюється відсутністю інформації про перехідні ймовірності, пошук яких доволі трудомісткий і ресурсозатратний. На прикладі керування лісовим господарством показано, як можна уникнути цієї проблеми задля успішної реалізації теоретичних положень. У подальшому перспективними є дослідження щодо застосування теорії керованих марковських процесів і полів у різних галузях людської діяльності. При цьому основним напрямом досліджень є розробка ефективних методів збору інформації та агрегування отриманих даних.

Список літератури

1. Knopov P. S. On markov stochastic processes with local interaction for solving some applied problems / P. S. Knopov, A. S. Samosonok // Cybernetics and Systems Analysis. — 2015. — Vol. 47, no. 3. — P. 346–363.
2. Chornei R. K. Control of Spatially Structured Random Processes and Random Fields with Applications / R. K. Chornei, H. Daduna, P. S. Knopov. — New York : Springer Science + Business Media, Inc., 2006. — 262 p.
3. Vasilyev N. B. Bernoulli and markov stationary measures in discrete local interactions / N. B. Vasilyev // Locally Interacting Systems and Their Application in Biology. Lecture Notes in Mathematics / ed. by R. L. Dobrushin, V. I. Kryukov, A. L. Toom. — Berlin : Springer, 1978. — Vol. 653. — P. 99–112.
4. Kauffman S. A. Antichaos and adaptation / S. A. Kauffman // Scientific American. — 1991. — Vol. 260, no. 2. — P. 78–84.
5. Kauffman S. A. The Origins of Order: Self-Organization and

Selection in Evolution / S. A. Kauffman. — New York : Oxford University Press, 1993. — 734 p.
6. Forsell N. Influence of temporal aggregation on strategic forest management under risk of wind damage / N. Forsell, L. O. Eriksson // Ann. Oper. Res. — 2014. — Vol. 219, no. 1. — P. 397–414.
7. Wikström P. A solution method for uneven-aged management applied to norway spruce / P. Wikström // Forest Science. — 2000. — Vol. 46, no. 3. — P. 452–462.
8. Olofsson E. Decision support for identifying spruce forest stand edges with high probability of wind damage / E. Olofsson, K. Blennow // Forest Ecology and Management. — 2005. — Vol. 207, no. 1–2. — P. 87–98.

R. Chornei

SOME APPLICATIONS OF THE THEORY OF CONTROL OF SPATIALLY STRUCTURED MARKOV FIELDS

This paper discusses some applications of the theory of controlled Markov fields defined on some finite undirected graph. This graph describes a system of “neighborhood dependence” of the evolution of a random process described by local and synchronously change of state of vertices, depending on the decisions made in them. An example of the theory to the Kauffman NK-automaton and forest management to reduce losses from wind damage.

Keywords: Markov decision process, optimal strategy.

Матеріал надійшов 28.09.2016