УДК 519.2

Назаренко Ю. О., Щестюк Н. Ю.

БЕЗРИЗИКОВИЙ ПОРТФЕЛЬ ДЛЯ FAT МОДЕЛІ СТЬЮДЕНТ-ТИПУ ДЛЯ РИЗИКОВИХ БАЗОВИХ АКТИВІВ

У статті побудовано безризиковий портфель для моделей Стьюдент-типу з активним фрактальним часом. Розглянуті моделі описують рух цін ризикових активів. Активний фрактальний час описується випадковим процесом, прирости якого є не обов'язково незалежними і мають обернений гамма-розподіл або суму обернених гамма-розподілів. Для побудови безризикового портфелю було запропоновано в диференціальній формі аналог диференціювання складних функцій для процесів з активним часом та досліджено коефіцієнти чутливості «греки».

Ключові слова: модель ризикових базових активів, розподіл Стьюдента, геометричний броунівський рух, фрактальний активний час, стохастичне рівняння, формула обрахунку справедливої ціни опціону, коефіцієнти «греки».

Вступ

На початку 70-х років минулого століття Блек, Шоулз та Мертон зробили фундаментальне відкриття в теорії ціноутворення опціонів. Наразі цей результат є добре відомим як модель Блека — Шоулза — Мертона [1]. Ця модель, з одного боку, слугувала потужним поштовхом до розвитку фінансової математики, а з іншого — стала базовою формулою для практичного розрахунку трейдерами ціни європейських опціонів. Ключовим моментом запропонованої теорії для побудови цієї моделі було обґрунтування можливості побудови стратегії (портфелю), що позбавляє інвестора ризику. Дійсно, Блек, Шоулз та Мертон, використовуючи лему Іто, показали, що можна побудувати безризиковий портфель, що складається з позицій по опціону на деякий вид акцій і самих акцій. Висловлюючись у термінах «дельта», портфель Блека — Шоулза — це дельта-хедж портфель. Власник такого портфелю займає коротку позицію по одному деривативу на якісь акції (тобто продає дериватив у кількості 1 шт.) і довгу позицію по кількості акцій, що відповідає значенню «дельта». Використовуючи термінологію дельта [2], ми можемо сказати, що оцінка опціонів Блека — Шоулза встановлює дельта-нейтральну позицію і доводить, що дохідність портфелю в цій позиції повинна бути рівною безризиковій відсотковій ставці.

У цій статті ми побудуємо безризиковий портфель для іншої моделі, альтернативної до моделі Блека — Шоулза — Мертона. Окремі проблеми та властивості цієї моделі було досліджено в [3–5] і повністю цю модель було представлено в [6]. Головна відмінність запропонованої конструкції полягає в тому, що як модель руху цін базового активу використовується не геометричний броунівський рух, що описується стохастичним рівнянням дифузії, а деякий випадковий процес, що описується СДР, яке містить, крім членів з диференціалами по часу dt, член по новому активному часу dT_t та по броунівському руху від нового часу dW_{T_t}. Активний фрактальний час (Fractal Activity Time — FAT) являє собою випадковий процес, прирости якого є не обов'язково незалежними і мають обернений гамма-розподіл або суму обернених гамма-розподілів. Отже, ця модель має такі особливості: 1) базовий актив описується за допомогою неспадного стохастичного процесу зі стаціонарними, але не обов'язково незалежними приростами; 2) лог-дохідності є некорельованими; 3) залежність представлена через квадрати лог-дохідностей; 4) лог-дохідності мають розподіл Стьюдент-типу і більш точно описують реальні фінансові дані; 5) фрактальний активний час має властивість самоподібності. Оцінку справедливої ціни опціонів для запропонованої моделі теж було досліджено в [5; 6]. Для вирішення основної проблеми, а саме побудови безризикового портфелю, нам необхідно вивести аналог леми Іто у диференціальній формі для процесів з активним часом та порахувати коефіцієнти «греки».

У розділі 1 після короткої презентації моделі ми дослідимо чутливість ціни опціонів до різних параметрів FAT моделі. Для цього ми порахуємо п'ять коефіцієнтів греків. Кожен «грек» вимірює чутливість значення портфелю до незначних коливань різних параметрів моделі.

У розділі 2 буде виведено аналог леми Іто в диференціальній формі для стохастичних процесів з активним часом. Зауважимо, що формула Іто для $f = f(X)$, де X_t — це семімартингал, визначений як (9), була розроблена в інтегральній формі у статті Кобаяші [7]. Але неможливо суто формально переписати цей результат у диференціальній формі. Тому нам треба вивести диференціальний аналог формули Іто для FAT процесів іншим шляхом. При цьому цікавим побічним результатом буде інтерпретація функцій, що стоять перед dt, перед dT_t і перед dW_{T_t}. Крім того, у запропонованій формулі $f = f(X, t)$ залежить не тільки від X, як у Кобояші, але й від t.

Розділ 3 присвячений побудові безризикового портфелю та виведенню рівняння з частковими похідними, аналога рівняння Блека — Шоулза — Мертона [1]. Ключове фінансове розуміння рівняння в тому, що можна хеджувати опціон, купуючи та продаючи базовий актив у правильній кількості таким чином, щоб усунути ризик. Отримане диференціальне рівняння у часткових похідних ми перевірили, використовуючи коефіцієнти «греки».

Модель із фрактальним активним часом: оцінка справедливої ціни опціонів та управління ризиком

Позначимо $T_t, t \geq 0$, фрактальний активний час (FAT), що являє собою додатний неспадний процес $T_0 = 0$, і нехай W_t, $t \geq 0$, стандартний броунівський рух, незалежний від процесу T_t. Ми розглядаємо модель із фрактальним активним часом

$$P_t = P_0 e^{\mu t + \theta T_t + \sigma W_{T_t}}, \quad t \geq 0, \tag{1}$$

де параметри $\mu \in R$, $\sigma > 0$ і $\theta \in R$. Відомо, що за деяких умов, P_t, $t \geq 0$, є розв'язком такого стохастичного диференціального рівняння (SDE) (див. Кобаяші [7]):

$$dP_t = \mu P_t dt + (\theta + \sigma^2/2) P_t dT_t + \\ + \sigma P_t dW_{T_t}, \quad t \geq 0. \tag{2}$$

Прирости нового часу $\tau_t = T_t - T_{t-1}$, $t = 1, 2, \ldots$ і дохідності подаються як

$$X_t = \log\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) \stackrel{d}{=} \mu + \theta\tau_t + \sigma\tau_t^{\frac{1}{2}} W_1,$$

де $\stackrel{d}{=}$ означає еквівалентність за розподілами.

Для нашої конструкції фрактальний активний час T_t визначається таким чином (див. Керса та ін. [8]):

$$T_0 = 0, \quad T_t = \sum_{i=1}^{[t]} \tau_i + \tau_{[t]+1}(t - [t]), \tag{3}$$

де $\{\tau_s, s \geq 0\}$ є стаціонарним процесом із маргінальним розподілом із «важкими хвостами». Для моделювання приростів τ_t зі стаціонарними процесами Орнштейна — Уленбека, процесами з оберненим розподілом Гауса, дивись роботи М. М. Леоненка та ін. [8; 9]. Ці конструкції моделюють дохідності як стохастичні процеси зі Стьюдента чи нормальним розподілом. У статті [6] було представлено дві нові конструкції для стаціонарних приростів $\{\tau_s, s \geq 0\}$:

Модель 1. Позначимо $\tau_i = \tau_i^{(1)} = Y_i$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, де $\{Y_t, t \geq 0\}$ є ергодичним марковським процесом, таким, що

$$dY_t = -\omega\Big(Y_t - \frac{\alpha}{\beta - 1}\Big)dt + \\ + \sqrt{\frac{2\omega}{\beta - 1} Y_t^2}\, dW_t, \quad t \geq 0,$$

де $\omega > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 1$ і $W = \{W_t, t \geq 0\}$ є стандартним броунівським рухом. Для нашої першої конструкції прирости процесу активного часу T_t (3) мають обернений гамма $R\Gamma(\beta, \alpha)$ стаціонарний розподіл.

Модель 2. Для збільшення кореляції дохідностей ми вводимо другу модель. Позначимо

$$\tau_i = \tau_i^{(2)} = Y_i^{(1)} + Y_i^{(2)}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots,$$

де $\{Y_t^{(1)}, t \geq 0\}$ і $\{Y_t^{(2)}, t \geq 0\}$ є незалежними процесами, такими, що

$$dY_t^{(j)} = -\omega^{(j)}\left(Y_t^{(j)} - \frac{\alpha^{(j)}}{\beta^{(j)} - 1}\right)dt + \\ + \sqrt{\frac{2\omega^{(j)}}{\beta^{(j)} - 1}(Y_t^{(j)})^2}\, dW_t^{(j)}, \ j = 1, 2, \quad t \geq 0,$$

де $W_t^{(j)}$, $j = 1, 2$ є незалежними копіями стандартного броунівського руху.

Для цієї конструкції прирости τ_t є сумою двох незалежних стохастичних процесів з оберненим гамма маргінальним розподілом. Стохастичний процес $Y_t^{(1)} + Y_t^{(2)}$, $t \geq 0$ є стаціонарним і його маргінальна щільність — це згортка двох обернених гамма щільностей [10].

Для цих моделей можна порахувати справедливу ціну. Нехай $C(Y, K)$ — ціна європейського опціону купівлі зі страйковою ціною K і часом до виконання опціону Y. Нехай ринок розвивається з такою динамікою для ризикової та неризикової вартості активів із процентною ставкою r:

$$P_t = P_0 e^{\mu t + \theta T_t + \sigma W_{T_t}}, B_t = B_0 e^{rt}, \quad t \geq 0,$$

де T_t є додатним неспадним стохастичним процесом. Тоді ціна $C(Y, K)$ визначається як:

$$C(Y, K) = \mathbb{E}[P_0 \Phi(d_1) - K e^{-rY} \Phi(d_2)], \tag{4}$$

або

$$C(Y, K) = \int_0^\infty (P_0 \Phi(d_1) - K e^{-rY} \Phi(d_2)) f_{T_Y}(t)\, dt, \tag{5}$$

де

$$d_1 = \frac{\log \frac{P_0}{K} + rY + \frac{1}{2}\sigma^2 t}{\sigma\sqrt{t}},$$

$$d_2 = \frac{\log \frac{P_0}{K} + rY - \frac{1}{2}\sigma^2 t}{\sigma\sqrt{t}}$$

обидві функції t, і $\Phi(\cdot)$ є стандартною нормальною кумулятивною функцією розподілу. Щільність f_{T_Y} для моделей може бути обчислена чисельно завдяки самоподібності процесу нового часу (більш детально у [6]).

Зауваження 1. Якщо $T_Y = t$, тоді (5) зводиться до класичної формули Блека — Шоулза — Мертона.

Для FAT моделі (1) ми введемо деякі коефіцієнти чутливості, вперше представлені Роджером Гаєм у статті «Fractals and Contingent Claims», яка не є більше доступною. Коефіцієнт дельта («delta») показує зміну ціни опціону при мінімальному русі базового активу. Значення цього «грека» залежить від типу опціону: «call» чи «put». Хеджується ризик при бажанні купівлі чи продажу базового активу. Дельту називають нормою хеджування ризику. Наприклад, якщо є n проданих «call» опціонів, то, помноживши n на дельту, ми отримаємо кількість акцій, що потрібні для створення безризикової позиції — вартість такого портфелю залишатиметься стабільною при незначному збільшенні чи зменшенні ціни акцій. Коефіцієнт дельта можна обчислити за такою формулою:

$$\Delta = \frac{\partial C(Y,K)}{\partial P} = \mathbb{E}[\Phi(d_1)]. \qquad (6)$$

Наступним корисним коефіцієнтом чутливості є тета («theta»). Він вимірює зміну ціни опціону з часом. Час заважає власнику опціонів та допомагає продавцю опціонів. При продажу коефіцієнт набуває додатних значень. При купівлі — від'ємних, тобто показуватиме, на яку суму знижуватиметься ціна опціону. Для знаходження коефіцієнта тета використовуємо таку формулу:

$$\Theta = \frac{\partial C_{call}}{\partial Y} = \\ = \mathbb{E}\left[-P\Phi'(d_1)\frac{\sigma\frac{\partial T_Y}{\partial Y}}{2\sqrt{T_Y}} - rKe^{-rY}\Phi(d_2)\right]. \qquad (7)$$

Оскільки коефіцієнт дельта змінюється разом із ціною акцій та часом, то кількість акцій, необхідних для хеджування портфелю, теж постійно змінюється. Коефіцієнт гамма («gamma») визначає, наскільки швидко змінюється дельта. Це похідна ціни опціону від дельти, тобто друга похідна, що показує динаміку дельти. Позиції з від'ємною гаммою будуть у середньому приносити невеликі збитки, з додатною — незначний прибуток. Цей коефіцієнт другого порядку обчислюється за такою формулою:

$$\gamma = \frac{\partial^2 C_{call}}{\partial P^2} = \mathbb{E}\left[\frac{1}{\sigma P\sqrt{T_Y}}\Phi'(d_1)\right]. \qquad (8)$$

Коефіцієнт вега («vega») — це міра зміни ціни опціону залежно від зміни волатильності. Він вимірює чутливість до незначних змін ступеня цінової нестійкості. Обчислюється за такою формулою:

$$vega = \frac{\partial C_{call}}{\partial \sigma} = \mathbb{E}\big[P\sqrt{T_Y}\Phi'(d_1)\big].$$

Наступний важливий коефіцієнт ро («rho») є мірою чутливості ціни опціону до змін відсоткових ставок: якщо відсоткова ставка зростає, то премія «call» опціонів зростає, а «put» опціонів зменшується. Для знаходження коефіцієнта можна використати таку формулу:

$$\rho = \frac{\partial C_{call}}{\partial r} = \mathbb{E}\big[KYe^{-rY}\Phi(d_2)\big].$$

Ці коефіцієнти «греки» буде використано в розділі 3.

Виведення аналога леми Іто в диференціальній формі для процесів з активним часом

Відомо, що лема Іто для процесу дифузії:

$$dX_t = \mu(t,X_t)dt + \sigma(t,X_t)dW_t$$

це тотожність, що використовується в стохастичному аналізі для визначення диференціалу залежної від часу функції стохастичного процесу $f = f(X_t, t)$. Вона описує стохастичний процес $f = f(X_t, t)$ через рівняння дифузії Іто:

$$df = A(t,X_t)dt + B(t,X_t)dW_t,$$

де

$$A(t,X_t) = E\Big(\frac{f-f_0}{\Delta t}\Big) = \\ = \mu(t,X_t)\frac{\partial f}{\partial X} + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\sigma^2(t,X_t)$$

це математичне сподівання (середнє) зміни f за час $\Delta t \to 0$, що називається функцією дрейфу,

$$B(t,X_t) = E\left(\frac{(f-f_0)^2}{\Delta t}\right) = \sigma(t,X_t)\frac{\partial f}{\partial X},$$

дисперсія зміни f за час $\Delta t \to 0$, що називається функцією волатильності. Моменти вищого порядку для зміни f дорівнюють нулю. Лема Іто може бути виведена [2; 11] шляхом формування ряду Тейлора. Лема широко використовується у фінансовій математиці, і її найвідоміше застосування полягає у виведенні формули Блека — Шоулза — Мертона для оцінки справедливої ціни опціону.

Тепер наша мета — вивести стохастичний аналог леми для стохастичних процесів, які визначаються за допомогою СДР з активним часом. Нехай процес $X(t)$ підкоряється СДР у формі:

$$dX_t = A(t,X_t)dt + \\ + F(t,X_t)dT_t + G(t,X_t)dW_{T_t}. \qquad (9)$$

Розглянемо детерміновану скалярну функцію $f(x,t)$. Якщо ми замінимо $X(t)$ для x, тоді $f(t) = f(X(t),t)$ буде випадковим процесом. Нам потрібно не тільки вивести аналог для стохастичних процесів з активним часом, але й показати, що $f(t) = f(X(t),t)$ відповідає дифузійному рівнянню з активним часом у такому вигляді:

$$df = a_0(t,X_t)dt + \\ + a_1(t,X_t)dT_t + b_1(t,X_t)dW_{T_t}.$$

Нашою метою є з'ясувати, що означають функції $a_0(t,X_t)$, $a_1(t,X_t)$, $b_1(t,X_t)$.

Доведення. Припустимо, $f(t,x)$ є двічі диференційовною скалярною функцією, тоді її розклад у ряд Тейлора по Δx і Δt в околі початкового фіксованого значення x_0 є

$$f(x,t) = f(x_0,t_0) + \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \\ + \frac{\partial f}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\Delta x)^2 + \\ + \frac{1}{2!}\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial t}\Delta x\Delta t + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(\Delta t)^2 + \cdots$$

Нагадаємо, що будь-який диференціал першого порядку у звичайному аналізі — це головна лінійна частина приросту функції, тобто члени степеня вище 1 прямують до нуля. Інакше кажучи, $\Delta t^k \to 0$, $\Delta x^k \to 0$, для $k > 1$. У стохастичному аналізі Δt^2 теж прямує до нуля, тому що час не є стохастичним. Проте ми зберігаємо член другого порядку Δx^2, бо

$$(\Delta X_t)^2 = (A(t,X_t)\Delta t + F(t,X_t)\Delta T_t + \\ + G(t,X_t)\epsilon\sqrt{\Delta T_t} + \cdots)^2. \quad (10)$$

Тоді, якщо домовитись, що нас цікавить наближення $(\Delta X_t)^2$ з точністю до перших порядків ΔT_t, Δt, ми отримаємо

$$(\Delta X_t)^2 = G^2(t,X_t)\epsilon^2\Delta T_t + \cdots,$$

і якщо функція f дорівнює деякому визначеному числу $f_0 = f(x_0,t_0)$ у початковий момент часу t_0, то за короткий проміжок часу лінійна частина розкладу в ряд Тейлора буде випадковою величиною такого вигляду, що залежить від ϵ:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}G^2(t,X_t)\epsilon^2\Delta T_t. \quad (11)$$

Але якщо припустимо, що у (10) нас цікавить лінійна частина відносно Δt, тоді df буде випадковою величиною вигляду:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial t}\Delta t. \quad (12)$$

За визначенням [11], для $\Delta t \to 0$ коефіцієнт дрейфу дорівнює:

$$a_0(x_0,t_0) = E\Big(\frac{f - f_0}{\Delta t}\Big) = A(t,X_t)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Тепер ми отримаємо за $\Delta T \to 0$ коефіцієнт, що ми називаємо активним (ринковим) коефіцієнтом дрейфу:

$$a_1(x_0,t_0) = E\Big(\frac{f - f_0}{\Delta T}\Big) = \\ = F(t,X_t)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}G^2, \quad (13)$$

де вирази (11) і (12) підставляються замість f і береться до уваги, що $E(\epsilon) = 0$ і $E(\epsilon^2) = 1$. За визначенням [11], для $\Delta t \to 0$ коефіцієнт дифузії (волатильності) дорівнює:

$$b_0(x_0,t_0) = E\left(\frac{(f - f_0)^2}{\Delta t}\right) = 0, \quad (14)$$

і для $\Delta T \to 0$ отримаємо активний (ринковий) коефіцієнт дифузії:

$$b_1^2(x_0,t_0) = E\left(\frac{(f - f_0)^2}{\Delta T}\right) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)^2 G^2. \quad (15)$$

Легко показати, що $\Delta T \to 0$ моменти вищого порядку

$$E\Big(\frac{(f - f_0)^k}{\Delta T}\Big)$$

для $k > 2$ дорівнюють нулю.

Таким чином, ми маємо такі твердження:

Твердження 1. *Якщо $X(t)$ стохастичний процес з активним часом визначений як (9) і $f(t,x)$ є двічі диференційовною скалярною функцією, тоді $f(t,X(t))$ є стохастичним процесом із активним часом також і ми можемо визначити стохастичний процес для $f(t,X(t))$ як диференціал*

$$df = \Big(\frac{\partial f}{\partial t} + A(t,X_t)\frac{\partial f}{\partial X}\Big)dt + \\ + \Big(F(t,X_t)\frac{\partial f}{\partial X} + \frac{1}{2}G^2(t,X_t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Big)dT_t + \\ + \frac{\partial f}{\partial X}G(t,X_t)dW_{T_t},$$

де математичне сподівання локальної зміни процесу f за календарний час $\Delta t \to 0$ називається функцією дрейфу, визначеною як (13), математичне сподівання локальної зміни процесу f за ринковий (активний) час $\Delta T \to 0$ називається активним (ринковим) дрейфом, визначеним як (14), дисперсія за $\Delta T \to 0$ є функцією волатильності і визначається як (15). Моменти вищих порядків дорівнюють нулю.

Зауваження 2. Зауважимо, що формула Іто для $f = f(X)$, де X_t є семімартингалом, визначеним як (9), була отримана в інтегральній формі у статті [7]. Але неможливо було формально переписати цей результат у диференціальній формі. Отже, нам потрібно було вивести формулу Іто іншим шляхом і, як наслідок, дати інтерпретацію функціям, що стоять перед dt, dT_t, dW_{T_t}. Крім того, в нашому твердженні $f = f(X, t)$ залежить не тільки від X, але й від t.

Приклад 1. Наприклад, давайте розглянемо FAT процес, який задовольняє СДР (2). Це рівняння можна переписати у формі

$$\frac{dP_t}{P_t} = \mu dt + (\theta + \sigma^2/2)dT_t + \sigma dW_{T_t}, \quad t \geq 0.$$

Застосовуючи твердження 1 для функції $f = \log(P_t)$, отримуємо

$$d(\log(P_t)) = \mu dt + \theta T_t dT + \sigma dW_{T_t}, \quad t \geq 0.$$

Отже, ми отримали P_t у формі (1).

Твердження, доведене в цьому розділі, може бути використано для побудови безризикового портфелю.

Побудова безризикового портфелю для FAT моделі

Ми розглядаємо модель ціни акцій P_t, де P_t є розв'язком СДР (2). Припустимо, що f — це ціна опціону купівлі акцій чи інших деривативів P_t, тоді f повинна бути деякою функцією від P_t і t, отже, застосуємо твердження 1:

$$df = \Big(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu P_t \frac{\partial f}{\partial P}\Big)dt + \\ + \Big((\theta + \sigma^2/2)P_t \frac{\partial f}{\partial P} + \frac{1}{2}(\sigma P_t)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial P^2}\Big)dT_t + \\ + \sigma P_t \frac{\partial f}{\partial P} dW_{T_t}. \quad (16)$$

Дискретні версії рівнянь (2) і (16):

$$\Delta P_t = \mu P_t \Delta t + (\theta + \sigma^2/2)P_t \Delta T_t + \\ + \sigma P_t \Delta W_{T_t}, \quad t \geq 0, \quad (17)$$

$$\Delta f = \Big(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu P_t \frac{\partial f}{\partial P}\Big)\Delta t + \\ + \Big((\theta + \sigma^2/2)P_t \frac{\partial f}{\partial P} + \frac{1}{2}(\sigma P_t)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial P^2}\Big)\Delta T_t + \\ + \sigma P_t \frac{\partial f}{\partial P} \Delta W_{T_t}, \quad (18)$$

де ΔP_t і Δf_t є змінами P_t і f_t на невеликому часовому інтервалі Δt. Нагадаємо, що вінерівські процеси, які лежать в основі P_t і f_t, є однаковими. Інакше кажучи, $\Delta W_{T_t} = \epsilon\sqrt{\Delta t} = \epsilon\sqrt{\tau_t}$ в рівняннях (17) і (18) є однаковими. Звідси випливає, що портфель з акцій та опціонів (або інших деривативів) може бути побудований таким чином, щоб вінерівські процеси були виключені.

Портфель:

$$-1$$

дериватив,

$$+ \frac{\partial f}{\partial P}$$

акції.

Власник такого портфелю займає коротку позицію по одному деривативу і довгу позицію по кількості $\frac{\partial f}{\partial P}$ акцій. Позначимо Π як значення портфелю. За визначенням

$$\Pi = -f + \frac{\partial f}{\partial P} P. \quad (19)$$

Зміна $\Delta\Pi$ у значенні портфелю на часовому інтервалі Δt

$$\Delta\Pi = -\Delta f + \frac{\partial f}{\partial P} \Delta P. \quad (20)$$

Підставляючи рівняння (17), (18) в рівняння (20), отримуємо:

$$\Delta\Pi = -\frac{\partial f}{\partial t}\Delta t - \frac{1}{2}\sigma^2 P_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial P^2}\Delta T_t. \quad (21)$$

Оскільки отримане рівняння не включає ΔW_{T_t}, портфель є безризиковим протягом часу Δt. Припущення про неможливість арбітражу означає, що портфель повинен отримати таку саму норму прибутку, як і інші короткострокові безризикові цінні папери. Це випливає з

$$\Delta\Pi = r\Pi\Delta t, \quad (22)$$

де r — безризикова відсоткова ставка. Підставляючи з (19) і (21) в (22), ми отримуємо таке:

$$-\frac{df}{dt}\Delta t - \frac{1}{2}\sigma^2 P_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial P^2}\Delta T_t = r\Big(-f + \frac{\partial f}{\partial P}P\Big)\Delta t.$$

Тепер ми можемо записати цю рівність як таке рівняння:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 P_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial P^2} dT_t = \Big(\frac{\partial f}{\partial t} + r\Big(-f + \frac{\partial f}{\partial P}P\Big)\Big)dt,$$

і, нарешті, ми отримуємо

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rP\frac{\partial f}{\partial P} + \frac{1}{2}\sigma^2 P_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial P^2}\frac{dT_t}{dt} = rf. \quad (23)$$

Твердження 2. *Отримане диференціальне рівняння в часткових похідних (23) (PDE) не є стохастичним і регулює зміну ціни європейського опціону купівлі для FAT моделі. Зауважимо, що портфель є безризиковим лише протягом нескінченно короткого періоду часу (як і в моделі Блека — Шоулза).*

Зауваження 3. Якщо $\Delta T_t = \Delta t$, тоді ми отримуємо PDE Блека — Шоулза:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rP\frac{\partial f}{\partial P} + \frac{1}{2}\sigma^2 P_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial P^2} = rf.$$

Тепер ми можемо перевірити рівняння (23) за допомогою підстановки коефіцієнтів «греків». Нехай $f = C(t, K)$ ціна європейського опціону купівлі зі страйковою ціною K і календарним часом до виконання опціону t визначається як (4). Ви можете побачити, що $\frac{\partial f}{\partial t}$ — це коефіцієнт тета, $\frac{\partial f}{\partial P}$ — це дельта коефіцієнт, $\frac{\partial^2 f}{\partial P^2}$ — це гамма коефіцієнт і вони визначаються (7), (6), (8) відповідно. Таким чином, шляхом заміни в лівій частині ми отримуємо:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rP\frac{\partial f}{\partial P} + \frac{1}{2}\sigma^2 P_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial P^2}\frac{dT_t}{dt} =$$
$$= \mathbb{E}\left[-P\Phi'(d_1)\frac{\sigma\frac{\partial T_t}{\partial t}}{2\sqrt{T_t}} - rKe^{-rt}\Phi(d_2)\right] +$$
$$+ rP\mathbb{E}\big[\Phi(d_1)\big] + \frac{1}{2}\frac{dT_t}{dt}\sigma^2 P^2 \mathbb{E}\left[\frac{1}{\sigma P\sqrt{T_t}}\Phi'(d_1)\right],$$

$$r\mathbb{E}\big[P\Phi(d_1) - Ke^{-rt}\Phi(d_2)\big] = rf.$$

Отже, ми отримуємо вираз, що стоїть у правій частині СДР.

На завершення висловлюємо подяку проф. М. М. Леоненку за постановку задачі та співпрацю над матеріалом цієї статті.

Список літератури

1. Black F. The pricing of options and corporate liabilities / F. Black, M. Scholes // Journal of Political Economy. — 1973. — Vol. 81. — P. 637–654.
2. Hull J. Options, futures and other derivatives / J. Hull. — Boston : Pearson Education Intrnational, 2009. — 800 p.
3. Фарфур А. Справедлива ціна європейських опціонів для гамма-обернених дифузійних моделей ціноутворення акцій / А. Фарфур, Н. Ю. Щестюк // Наукові записки НаУКМА. — 2013. — Т. 139 : Фізико-математичні науки. — С. 30–33.
4. Щестюк Н. Ю. Гамма-обернені дифузійні моделі ціноутворення акцій / Н. Ю. Щестюк // Наукові записки НаУКМА. — 2012. — Т. 126 : Фізико-математичні науки. — С. 23–27.
5. Щестюк Н. Ю. Оцінка справедливої ціни опціонів в модифікаціях моделі Хейді–Леоненка / Н. Ю. Щестюк // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія Фіз.-мат. науки. — 2014. — Т. 11. — С. 223–236.
6. Casteli F. Student-like models for risky asset with dependence / F. Casteli, N. N. Leonenko, N. Shchestyuk // Stochastic Analysis and Applications. — 2017. — Vol. 2. — P. 107–144.
7. Kobayashi K. Stochastic calculus for a time-changed semimartingale and the associated stochastic differential equations / K. Kobayashi // J. Theoret. Probability. — 2011. — Vol. 24, no. 3. — P. 789–820.
8. Kerss A. D. J. Risky asset models with tempered stable fractal activity time / A. D. J. Kerss, N. N. Leonenko, A. Sikorskii // Stochastic Analysis and Applications. — 2014. — Vol. 32, no. 4. — P. 642–663.
9. Leonenko N. N. The Student subordinator model with dependence for risky asset returns / N. N. Leonenko, S. Petherick, A. Sikorskii // J. Commun. Stat.-Theory Methods. — 2011. — Vol. 40, no. 20. — P. 3509–3523.
10. Giron F. J. A note on the convolution of inverted-gamma distributions with applications to the Behrens–Fisher distribution / F. J. Giron, C. del Castillo // Statistic and Operations Research. — 2001. — Vol. 95, no. 1. — P. 39–44.
11. Stepanov S. Stochastic World / S. Stepanov. — Heidelberg : Springer, 2013. — 339 p.

Y. Nazarenko, N. Shchestyuk

THE RISKLESS PORTFOLIO FOR THE STUDENT-LIKE FRACTAL ACTIVITY TIME MODEL FOR A RISKY ASSET WITH DEPENDENCE

We present a building riskless portfolio for new construction of the Student and Student-like fractal activity time model for a risky asset. The construction uses the diffusion processes and their superpositions and allows for specified exact Student or Student-like marginal distributions of the returns and for a flexible and tractable dependence structure. For building a riskless portfolio we derive the stochastic calculus counterpart of the chain rule for activity time processes in the differential form and investigate Greek parameters.

Keywords: risky asset model, Student distribution, geometric Brownian motion, Fractal activity time, the stochastic calculus counterpart of the chain rule, option pricing formula, Greek parameters.

Матеріал надійшов 01.06.2017