УДК 517.9

Сатур О. Р.

ДИНАМІЧНА СИСТЕМА КОНФЛІКТУ З ПРИТЯГАННЯМ ДЛЯ ТРІЙКИ ВЗАЄМОДІЮЧИХ СТОРІН

Досліджено модель дискретної динамічної системи конфлікту з притягальною взаємодією, що описує перерозподіл конфліктного простору між трьома взаємодіючими сторонами. Доведено існування рівноважного стану системи та отримано явні формули для граничних розподілів динамічної системи в термінах стохастичних векторів.

Ключові слова: складна система, динамічна система конфлікту, конфліктна взаємодія, граничний стан, нерухома точка.

У цій роботі досліджено динамічну систему, що описує модель поведінки трьох опонентів. Ми спираємось, зокрема, на роботи [1–5], присвячені теорії динамічних систем конфлікту з притягальною та відштовхувальною взаємодією.

Розглянемо фізичну систему, яка складається з трьох взаємодіючих сторін. Ці сторони позначимо через A, B та C. Вважаємо, що A, B, C у початковий (доконфліктний) момент часу задані стохастичними розподілами їхньої присутності на спільному просторі існування Ω. У загальному випадку взаємодіючим сторонам A, B та C відповідають імовірнісні міри μ, ν, η, визначені на деякій σ-алгебрі підмножин із простору Ω. Символом $\divideontimes$ позначаємо конфліктну взаємодію між сторонами [6].

Задача полягає в побудові та дослідженні моделі складної динамічної системи, яка описує поведінку в часі фізичної системи $\{A, B, C, \divideontimes\}$ із конфліктною взаємодією між A, B та C. Таку модель можна зобразити як динамічну систему

$$\left\{\begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array}\right\} \xrightarrow{\divideontimes, t} \left\{\begin{array}{c} A^t \\ B^t \\ C^t \end{array}\right\}, \quad t \geqslant 0. \tag{1}$$

Математично еволюція фізичної системи $\{A, B, C, \divideontimes\}$ задається траєкторіями динамічної системи в термінах мір:

$$\left\{\begin{array}{c} \mu \\ \nu \\ \eta \end{array}\right\} \xrightarrow{\divideontimes, t} \left\{\begin{array}{c} \mu^t \\ \nu^t \\ \eta^t \end{array}\right\}, \quad t \geqslant 0, \tag{2}$$

де $\divideontimes, t$ позначає конфліктне перетворення на момент часу t.

Нехай Ω — деяка скінченна множина, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$, $n > 1$. Зафіксуємо трійку ймовірнісних дискретних мір μ, ν, η на Ω. Розподіли цих мір визначають трійку векторів $\mathbf{p}$, $\mathbf{r}$, $\mathbf{q}$:

$$\mu(\omega_i) = p_i \geq 0, \quad \nu(\omega_i) = r_i \geq 0, \quad \eta(\omega_i) = q_i \geq 0,$$

де $i = 1, 2, \ldots, n$.

Зрозуміло, що вектори $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$, $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$ та $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$ належать $\mathbb{R}^n_+$ і є стохастичними векторами, тобто

$$p_i \geq 0, \quad \|\mathbf{p}\|_1 = \sum_{i=1}^n p_i = \sum_{i=1}^n \mu(\omega_i) = \mu(\Omega) = 1,$$
$$r_i \geq 0, \quad \|\mathbf{r}\|_1 = \sum_{i=1}^n r_i = \sum_{i=1}^n \nu(\omega_i) = \nu(\Omega) = 1,$$
$$q_i \geq 0, \quad \|\mathbf{q}\|_1 = \sum_{i=1}^n q_i = \sum_{i=1}^n \eta(\omega_i) = \eta(\Omega) = 1.$$

Задамо нелінійне, некомутативне перетворення конфлікту $\divideontimes$ між трьома стохастичними векторами $\mathbf{p}$, $\mathbf{r}$, $\mathbf{q}$:

$$\mathbf{p}^1 = \mathbf{p} \divideontimes (\mathbf{r}, \mathbf{q}),$$
$$\mathbf{r}^1 = \mathbf{r} \divideontimes (\mathbf{p}, \mathbf{q}),$$
$$\mathbf{q}^1 = \mathbf{q} \divideontimes (\mathbf{r}, \mathbf{p}),$$

де нова трійка векторів $\mathbf{p}^1$, $\mathbf{r}^1$, $\mathbf{r}^1$ визначається за правилом:

$$p_i^1 = \frac{p_i(\theta + 1) + \tau_i}{z},$$
$$r_i^1 = \frac{r_i(\theta + 1) + \tau_i}{z},$$
$$q_i^1 = \frac{q_i(\theta + 1) + \tau_i}{z},$$

де $\theta = \frac{1}{3}((\mathbf{p}, \mathbf{r}) + (\mathbf{r}, \mathbf{q}) + (\mathbf{p}, \mathbf{q}))$, $\tau_i = \min\{p_i, r_i, q_i\}$, коефіцієнт $z = 1 + \theta + W$, де $W = \sum_{i=1}^n \tau_i$.

Нормуючий коефіцієнт z забезпечує стохастичність векторів $\mathbf{p}^1$, $\mathbf{r}^1$ та $\mathbf{q}^1$, які очевидно належать $\mathbb{R}^n_+$.

Таким чином, для заданої пари векторів $\mathbf{p}, \mathbf{r}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n_+$ перетворення $\divideontimes$ породжує траєкторію динамічної системи конфлікту

$$\{\mathbf{p}^N, \mathbf{r}^N, \mathbf{q}^N\} \xrightarrow{\divideontimes} \{\mathbf{p}^{N+1}, \mathbf{r}^{N+1}, \mathbf{q}^{N+1}\}, \tag{3}$$

де $N = 0, 1, \ldots$, $\mathbf{p}^0 = \mathbf{p}$, $\mathbf{r}^0 = \mathbf{r}$, $\mathbf{q}^0 = \mathbf{q}$ та

$$p_i^{N+1} = \frac{p_i^N(\theta^N + 1) + \tau_i^N}{z^N},$$
$$r_i^{N+1} = \frac{r_i^N(\theta^N + 1) + \tau_i^N}{z^N}, \qquad (4)$$
$$q_i^{N+1} = \frac{q_i^N(\theta^N + 1) + \tau_i^N}{z^N},$$

$$\theta^N = \frac{1}{3}\big((\mathbf{p}^N, \mathbf{r}^N) + (\mathbf{r}^N, \mathbf{q}^N) + (\mathbf{p}^N, \mathbf{q}^N)\big),$$
$$\tau_i^N = \min\{p_i^N, r_i^N, q_i^N\}, \qquad (5)$$
$$z^N = \theta^N + 1 + W^N, \quad W^N = \sum_{i=1}^n \tau_i^N.$$

Теорема 1. *Кожна траєкторія динамічної системи конфлікту* (3) *з довільною парою початкових стохастичних векторів* $\mathbf{p}, \mathbf{r}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}_+^n$ $(n > 1)$ *збігається до інваріантного граничного стану ДСК* $\{\mathbf{p}^\infty, \mathbf{r}^\infty, \mathbf{q}^\infty\} \in \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^n$. *Це означає, що для векторів* $\mathbf{p}^N$, $\mathbf{r}^N$, $\mathbf{q}^N$, *координати яких задані формулами* (4)*, існують границі:*

$$\mathbf{p}^\infty = \lim_{x\to\infty} \mathbf{p}^N,$$
$$\mathbf{r}^\infty = \lim_{x\to\infty} \mathbf{r}^N,$$
$$\mathbf{q}^\infty = \lim_{x\to\infty} \mathbf{q}^N.$$

Граничні вектори $\mathbf{p}^\infty$, $\mathbf{r}^\infty$, $\mathbf{q}^\infty$ *утворюють нерухому точку, причому, якщо* $\mathbf{p} = \mathbf{r} = \mathbf{q}$, *то* $\mathbf{p}^\infty = \mathbf{p}$, $\mathbf{r}^\infty = \mathbf{r}$, $\mathbf{q}^\infty = \mathbf{q}$. *Якщо* $\mathbf{p} \neq \mathbf{r} \neq \mathbf{q}$, *або* $\mathbf{p} = \mathbf{r} \neq \mathbf{q}$, *або* $\mathbf{p} = \mathbf{q} \neq \mathbf{r}$, *або* $\mathbf{r} = \mathbf{q} \neq \mathbf{p}$, *то* $\mathbf{p}^\infty = \mathbf{r}^\infty = \mathbf{q}^\infty$ *і*

$$p_i^\infty = r_i^\infty = q_i^\infty = \frac{\tau_i}{W}.$$

Доведення. Зафіксуємо довільний індекс $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Розглянемо послідовність $(\tau_i^N)_{N=0}^\infty$. Оскільки $\tau_i^N = \min\{p_i^N, r_i^N, q_i^N\}$, причому $0 \leq p_i^N, r_i^N, q_i^N \leq 1$, то

$$0 \leq \tau_i^N \leq 1, \qquad (6)$$

тобто $(\tau_i^N)_{N=0}^\infty$ є обмеженою при $N \to \infty$.

Покажемо, що $(\tau_i^N)_{N=0}^\infty$ — монотонна. З рівності (4) та (5) випливає, що

$$\tau_i^{N+1} = \frac{\tau_i^N(\theta^N + 1) + \tau_i^N}{z^N} = $$
$$= \frac{\tau_i^N(\theta^N + 2)}{z^N} = \tau_i^N \cdot \frac{\theta^N + 2}{\theta^N + 1 + W^N}. \qquad (7)$$

Позначимо $s^N = \frac{\theta^N+2}{\theta^N+1+W^N}$, тоді

$$\tau_i^{N+1} = \tau_i^N \cdot s^N.$$

Очевидно, що $0 \leq \theta^N \leq 1$. Оцінимо $W^N = \sum_{i=1}^n \tau_i^N$. З (5) та умови нормованості векторів випливає, що $W^N \leq 1$. Звідси $s^N \geq 1$ і тому

$$\tau_i^{N+1} \geq \tau_i^N. \qquad (8)$$

Отже, $(\tau_i^N)_{N=0}^\infty$ — монотонна.

Оскільки $(\tau_i^N)_{N=0}^\infty$ — монотонна обмежена послідовність, то для довільного $i = \overline{1, n}$ існує

$$\lim_{N\to\infty} \tau_i^N = \tau_i^\infty.$$

У випадку рівних початкових векторів $\mathbf{p}$, $\mathbf{r}$, $\mathbf{q}$, враховуючи умову (5), отримуємо $\mathbf{p}^N = \mathbf{r}^N = \mathbf{q}^N = \tau^N$, тобто $p_i^N = r_i^N = q_i^N = \tau_i^N$ для довільного $i = \overline{1, n}$. З доведеного вище випливає існування граничних векторів $\mathbf{p}^\infty$, $\mathbf{r}^\infty$ та $\mathbf{q}^\infty$, причому $\mathbf{p}^\infty = \mathbf{r}^\infty = \mathbf{q}^\infty = \tau^\infty$.

У випадку $\mathbf{p} = \mathbf{r} \neq \mathbf{q}$, або $\mathbf{p} = \mathbf{q} \neq \mathbf{r}$, або $\mathbf{r} = \mathbf{q} \neq \mathbf{p}$ доведення теореми випливає з існування граничних станів ДСК у термінах стохастичних векторів для пари опонентів.

Розглянемо випадок різних початкових векторів, тобто $\mathbf{p} \neq \mathbf{r} \neq \mathbf{q}$. Нехай для деякого i між координатами p_i, r_i, q_i виконується система нерівностей:

$$p_i > r_i > q_i.$$

Виконавши тотожні перетворення над цією системою нерівностей, а саме домноживши на $(\theta + 1)$, додавши до обох частин нерівностей τ_i та поділивши на z, отримаємо

$$\frac{p_i(\theta + 1) + \tau_i}{z} > \frac{r_i(\theta + 1) + \tau_i}{z} > \frac{q_i(\theta + 1) + \tau_i}{z},$$

тобто

$$p_i^1 > r_i^1 > q_i^1.$$

Аналогічними міркуваннями отримуємо систему нерівностей для всіх N:

$$p_i^N > r_i^N > q_i^N, \quad N = 0, 1, \ldots$$

Оскільки $\tau_i^N = \min\{p_i^N, r_i^N, q_i^N\}$, то $q_i^N = \tau_i^N$. Вже доведено, що $(\tau_i^N)_{N=0}^\infty$ — монотонна обмежена послідовність, тому $(q_i^N)_{N=0}^\infty$ — також монотонна обмежена послідовність, тобто існує границя:

$$\lim_{N\to\infty} q_i^N = q_i^\infty = \tau_i^\infty.$$

Безпосередньо встановлюємо, що для всіх координат τ_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ вектора τ виконуються співвідношення:

$$\frac{\tau_j^{N+1}}{\tau_i^{N+1}} = \frac{\tau_j^N \cdot \frac{\theta^N+2}{\theta^N+1+W^N}}{\tau_i^N \cdot \frac{\theta^N+2}{\theta^N+1+W^N}} = \frac{\tau_j^N}{\tau_i^N},$$
$$\frac{\tau_j^N}{\tau_i^N} = \frac{\tau_j^{N-1} \cdot \frac{\theta^{N-1}+2}{\theta^{N-1}+1+W^{N-1}}}{\tau_i^{N-1} \cdot \frac{\theta^{N-1}+2}{\theta^{N-1}+1+W^{N-1}}} = \frac{\tau_j^{N-1}}{\tau_i^{N-1}}, \ldots,$$

$$\frac{\tau_j^1}{\tau_i^1} = \frac{\tau_j^0 \cdot \frac{\theta^0+2}{\theta^0+1+W^0}}{\tau_i^0 \cdot \frac{\theta^0+2}{\theta^0+1+W^0}} = \frac{\tau_j^0}{\tau_i^0}.$$

Отже, відношення

$$\frac{\tau_j^N}{\tau_i^N} = \frac{\tau_j^0}{\tau_i^0} \tag{9}$$

є незалежним від N.

Розглянемо співвідношення

$$\frac{\tau_i^N}{W^N} = \frac{\tau_i^N}{\tau_1^N + \cdots + \tau_i^N + \cdots + \tau_n^N} = \\ = \frac{1}{\frac{\tau_1^N}{\tau_i^N} + \cdots + 1 + \cdots + \frac{\tau_n^N}{\tau_i^N}}.$$

З рівняння (9) випливає, що

$$\frac{\tau_i^N}{W^N} = \frac{1}{\frac{\tau_1^N}{\tau_i^N} + \cdots + 1 + \cdots + \frac{\tau_n^N}{\tau_i^N}} = \\ = \frac{1}{\frac{\tau_1^0}{\tau_i^0} + \cdots + 1 + \cdots + \frac{\tau_n^0}{\tau_i^0}} = \frac{\tau_i^0}{W^0}.$$

Тобто

$$\frac{\tau_i^0}{W^0} = \frac{\tau_i^N}{W^N} \tag{10}$$

для будь-якого $N = 1, 2, \ldots$

Припустимо, що для деякого фіксованого i виконується нерівність $p_i < \frac{\tau_i}{W}$. Домноживши цю нерівність на $(\theta + 1)$, додавши до обох її частин τ_i та поділивши на z, отримаємо

$$\frac{p_i(\theta+1)+\tau_i}{z} < \frac{\tau_i}{W} \cdot \frac{\theta+1+W}{z},$$

тобто $p_i^1 < \frac{\tau_i}{W} \cdot 1$. Враховуючи доведену вище рівність (10), можна стверджувати, що $p_i^1 < \frac{\tau_i^1}{W^1}$. Отже, згідно з принципом математичної індукції, нерівність

$$p_i^N < \frac{\tau_i^N}{W^N} \tag{11}$$

справедлива для довільного N.

Розглянемо різницю деякої фіксованої i-тої координати вектора $\mathbf{p}$ на N-му та $(N+1)$-му кроках

$$p_i^{N+1} - p_i^N = \frac{p_i^N(\theta^N+1)+\tau_i^N}{z^N} - p_i^N = \\ = \frac{\tau_i^N - p_i^N \cdot W^N}{z^N} = \frac{W^N}{z^N}\Big(\frac{\tau_i^N}{W^N} - p_i^N\Big).$$

Очевидно, $\frac{W^N}{z^N} > 0$. Тому, якщо для деякого фіксованого i виконується (11), то для довільного $N = 0, 1, \ldots$ виконується нерівність $p_i^N < \frac{\tau_i^N}{W^N}$, тобто послідовність $(p_i^N)_{N=0}^{\infty}$ зростає. Аналогічно $(p_i^N)_{N=0}^{\infty}$ спадає за умови $p_i^N > \frac{\tau_i}{W}$.

З попередніх міркувань випливає, що $(p_i^N)_{N=0}^{\infty}$ — монотонна по N. За теоремою про монотонну обмежену послідовність отримуємо, що існує

$$\lim_{N\to\infty} p_i^N = p_i^{\infty}.$$

Аналогічними міркуваннями, як для доведення існування граничного вектора $\mathbf{p}^{\infty}$, доводимо існування

$$\lim_{N\to\infty} r_i^N = r_i^{\infty}.$$

Отже, існують граничні вектори $\mathbf{p}^{\infty}$, $\mathbf{r}^{\infty}$, $\mathbf{q}^{\infty}$ з координатами

$$p_i^{\infty} = \lim_{N\to\infty} p_i^N, \\ r_i^{\infty} = \lim_{N\to\infty} r_i^N, \\ q_i^{\infty} = \lim_{N\to\infty} q_i^N.$$

Для доведення другої частини теореми використаємо таке твердження.

Твердження 2. *Для довільного* $i = \overline{1,n}$ *при* $N \to \infty$ *виконується*

$$\rho(\mathbf{p}^N, \mathbf{r}^N) \to 0, \\ \rho(\mathbf{r}^N, \mathbf{q}^N) \to 0, \\ \rho(\mathbf{p}^N, \mathbf{q}^N) \to 0,$$

де

$$\rho(\mathbf{p}^N, \mathbf{r}^N) = \|\mathbf{p}^N, \mathbf{r}^N\|_1, \\ \rho(\mathbf{r}^N, \mathbf{q}^N) = \|\mathbf{r}^N, \mathbf{q}^N\|_1, \\ \rho(\mathbf{p}^N, \mathbf{q}^N) = \|\mathbf{p}^N, \mathbf{q}^N\|_1.$$

Доведення. Розглянемо відстані між деякими i-тими координатами векторів $\mathbf{p}^N$, $\mathbf{r}^N$, $\mathbf{q}^N$, а саме $\rho(p_i^N, r_i^N)$, $\rho(r_i^N, q_i^N)$ та $\rho(p_i^N, q_i^N)$. З уже доведених тверджень для ДСК, з довільною початковою парою векторів $\mathbf{p}$, $\mathbf{r}$, ітерація координат яких задається формулами (4), для довільного i при $N \to \infty$ випливає

$$\rho(p_i^N, r_i^N) = d_i^N = |p_i^N - r_i^N| \to 0, \\ \rho(r_i^N, q_i^N) = \tilde{d}_i^N = |r_i^N - q_i^N| \to 0, \\ \rho(p_i^N, q_i^N) = \tilde{\tilde{d}}_i^N = |p_i^N - q_i^N| \to 0.$$

Це означає, що координати векторів $\mathbf{p}^N$, $\mathbf{r}^N$, $\mathbf{q}^N$ збігаються при $N \to \infty$ для довільного i, тобто граничні вектори рівні. Звідси випливає, що для довільного $i = \overline{1,n}$ при $N \to \infty$ виконується

$$\rho(p_i^N, r_i^N, q_i^N) \to 0.$$

Твердження доведено.

Враховуючи рівність граничних векторів та (5), отримуємо рівність $\mathbf{p}^\infty = \mathbf{r}^\infty = \mathbf{q}^\infty = \tau^\infty$. Якщо початкові вектори рівні, то $p_i = r_i = q_i = \tau_i$ та $W = 1$ для довільного i. Використовуючи формулу (4), отримуємо $p_i^1 = r_i^1 = q_i^1 = p_i = r_i = q_i$. Аналогічно $p_i^N = r_i^N = q_i^N = p_i = r_i = q_i$. Тому при $N \to \infty$

$$\mathbf{p}^\infty = \mathbf{r}^\infty = \mathbf{q}^\infty = \mathbf{p} = \mathbf{r} = \mathbf{q}.$$

Доведемо теорему для випадку різних початкових векторів. Знайдемо значення τ_i^∞. Використавши формули (7) для деякої i-тої координати вектора τ та враховуючи рівність (10), отримаємо

$$\tau_i^{N+1} = \tau_i^N \cdot \frac{\theta^N + 2}{\theta^N + 1 + W^N} = \frac{\tau_i^N}{W^N} \cdot \frac{\theta^N + 2}{\frac{\theta^N+1}{W^N} + 1} = \frac{\tau_i}{W} \cdot \frac{\theta^N + 2}{\frac{\theta^N+1}{W^N} + 1}.$$

Оскільки $\mathbf{p}^\infty = \mathbf{r}^\infty = \mathbf{q}^\infty = \tau^\infty$, то

$$\sum_{i=1}^n p_i^\infty = \sum_{i=1}^n r_i^\infty = \sum_{i=1}^n q_i^\infty = \sum_{i=1}^n \tau_i^\infty = 1,$$

тобто $\lim_{N\to\infty} W^N = 1$. Тоді

$$\tau_i^\infty = \lim_{N\to\infty} \tau_i^{N+1} = \lim_{N\to\infty} \frac{\tau_i}{W} \cdot \frac{\theta^N + 2}{\frac{\theta^N+1}{W^N} + 1} = \frac{\tau_i}{W} \lim_{N\to\infty} \frac{\theta^N + 2}{\frac{\theta^N+1}{W^N} + 1} = \frac{\tau_i}{W}.$$

Отже, при $N \to \infty$

$$p_i^\infty = r_i^\infty = q_i^\infty = \frac{\tau_i}{W}.$$

Теорему доведено.

Список літератури

1. Боднарчук М. В. Властивості граничних станів динамічної системи конфлікту / М. В. Боднарчук, В. Д. Кошманенко, Н. В. Харченко // Нелінійні коливання. — 2004. — Т. 7, № 4. — С. 446–461.
2. Боднарчук М. В. Динаміка взаємодії конфлікту між системами з внутрішньою структурою / М. В. Боднарчук, В. Д. Кошманенко, І. В. Самойленко // Нелінійні коливання. — 2006. — Т. 9, № 4. — С. 435–450.
3. Кошманенко В. Д. Розклад Гана — Жордана як рівноважний стан системи конфлікту / В. Д. Кошманенко, С. М. Петренко // Укр. мат. журн. — 2016. — Т. 67, № 1. — С. 64–77.
4. Albeverio S. Dynamics of discrete conflict interactions between non-annihilating opponents / S. Albeverio, M. Bodnarchuk, V. Koshmanenko // Methods of Functional Analysis and Topology. — 2005. — Vol. 11, no. 4. — P. 309–319.
5. Koshmanenko V. Existence theorems of the ω-limit states for conflict dynamical systems / V. Koshmanenko // Methods Funct. Anal. Topology. — 2014. — Vol. 20, no. 4. — P. 379–390.
6. Кошманенко В. Д. Спектральна теорія динамічних систем конфлікту / В. Д. Кошманенко. — К. : Наукова думка, 2016. — 287 с.
7. Кошманенко В. Д. Теорема про конфликт для пары стохастических векторов / В. Д. Кошманенко // Укр. мат. журн. — 2003. — Т. 55, № 4. — С. 555–560.
8. Кошманенко В. Д. Інваріантні точки динамічної системи конфлікту в просторі кусково-рівномірно розподілених мір / В. Д. Кошманенко, Н. В. Харченко // Укр. мат. журн. — 2004. — Т. 56, № 7. — С. 927–938.
9. Koshmanenko V. Fixed points of complex system with attractive interaction / V. Koshmanenko, N. Kharchenko // Methods of Functional Analysis and Topology. — 2017. — Vol. 23, no. 2. — P. 164–176.

O. Satur

A MODEL OF CONFLICT DYNAMICAL SYSTEM WITH ATTRACTIVE INTERACTION BETWEEN THREE PARTIES

We study a model of discrete conflict dynamical system with attractive interaction, which describes the redistribution of the conflict space between three interacting parties. The existence of the equilibrium state in dynamical systems is proven, and explicit formulas for limit distributions in terms of stochastic vectors are obtained.

Keywords: complex system, conflict dynamical system, conflict interaction, limit state, fixed point.

Матеріал надійшов 16.11.2017