УДК 004.4

Іванов Є. В.

ВЛАСТИВОСТІ АЛГЕБР СКЛАДНОІМЕННИХ ДАНИХ

У статті розглянуто питання побудови та дослідження алгебр номінативних даних зі складними іменами у рамках композиційно-номінативного підходу. Визначено сім'ю алгебр складноіменних даних і встановлено властивості операцій цих алгебр. Доведено нерозв'язність елементарної теорії алгебри складноіменних даних навіть із порожнім класом базових значень.

Ключові слова: номінативні дані, композиційно-номінативний підхід.

Вступ

Теорія програмування як наука перебуває у стадії становлення, у зв'язку з чим чимало її понять залишаються інтуїтивними і не мають адекватних математичних уточнень, або існуючі уточнення є неповними. Тому у багатьох випадках важко формулювати у точних термінах проблеми, важливі для теорії програмування.

Один із підходів, що може бути застосований для подолання вказаних труднощів, є *композиційно-номінативний підхід* до уточнення понять програмування [3, 5]. Він передбачає розробку ієрархії адекватних моделей програм різного рівня абстракції та загальності. Згідно з цим підходом, дані уточнюються як певні класи *номінативних даних* (від латинського *nomen* – ім'я), програми – як *функції над номінативними даними* (*номінативні функції*), а засоби конструювання програм – як *композиції програм* (оператори над класами номінативних функцій).

У цій статті розглядається одне із завдань композиційно-номінативного підходу, яке полягає у побудові та дослідженні алгебр номінативних даних зі складними іменами [2]. Такі алгебри можуть бути використані як формальні моделі структур даних при побудові моделей мов програмування.

У статті ми будемо використовувати такі позначення:

- V^+ – множина непорожніх слів в алфавіті V;
- $pref(u) = \{v \in V^+ \mid \exists w \in V^* \, u = vw\}$ – непорожні префікси слова $u \in V^+$;
- $u \le v$ ($u < v$) – слово u є префіксом (власним префіксом) слова v;
- $f(x)\downarrow$ – функція f визначена на аргументі x;
- $f(x)\uparrow$ – функція f не визначена на аргументі x;
- $f(x) \cong g(y)$ – сильна рівність, тобто $f(x)\downarrow$ тоді і тільки тоді, коли $g(y)\downarrow$, і тоді $f(x) = g(y)$;
- $A \xrightarrow{n} B$ – клас (часткових) функцій зі скінченним графіком.

Номінативні та складноіменні дані

Інтуїтивно номінативні дані можна трактувати як ієрархічно побудовані об'єкти, в основі яких лежить бінарне відношення *ім'я* $\mapsto$ *значення*. Такі дані можна подавати текстовим записом, подібним до наведеного нижче (де a, b, c – імена):

$$[a \mapsto 1, b \mapsto [a \mapsto 2, c \mapsto 3]].$$

Формально номінативні дані можуть визначатися індуктивно або рекурсивно на основі множини імен V і класу базових значень (атомів) W.

Індуктивне визначення має такий вигляд:

- $ND_0(V,W) = W$,
- $ND_{k+1}(V,W) = W \cup \left(V \xrightarrow{n} ND_k(V,W)\right)$ для $k \ge 0$.

Тоді усі номінативні дані складають клас

$$ND(V,W) = \bigcup_{k \ge 0} ND_k(V,W) \tag{1}$$

Визначимо *ранг* непорожнього номінативного даного d як найменше ціле число $k \ge 0$, таке, що $d \in ND_k(V,W)$. Ранг порожнього даного покладемо рівним нулю.

Рекурсивне визначення номінативних даних має такий вигляд: $ND(V,W)$ є найменшим за включенням розв'язком рівняння

$$ND(V,W) = W \cup (V \xrightarrow{n} ND(V,W)) \tag{2}$$

Еквівалентність індуктивного та рекурсивного визначення номінативних даних встановлюється наступною лемою.

Лема 1. Найменший розв'язок рівняння (2) існує та визначається рівністю (1).

Доведення цієї леми випливає з теореми Тарського-Кліні про нерухому точку.

У статті ми будемо розглядати номінативні дані спеціального вигляду – *складноіменні дані*. Для точного визначення таких даних спочатку введемо клас номінативних даних зі складними іменами $NDV(V,W) = ND(V^+,W)$. Для деяких даних класу $NDV(V,W)$ порушується *принцип однозначності структурного іменування* (ОСІ) [2]. Наприклад, в даному $[ab \mapsto 1, a \mapsto [b \mapsto 2]]$ порушується ОСІ, оскільки доцільно вважати, що складному імені ab в цьому даному відповідає два різних значення (1 і 2). Виділимо підклас $NDVC(V,W)$ класу $NDV(V,W)$, для якого виконується принцип ОСІ, який назвемо класом складноіменних даних. Перш ніж визначити цей клас даних, введемо ряд допоміжних визначень, в яких $d \in NDV(V,W)$:

- (іменним) шляхом в d називається послідовність імен $(v_1, v_2,.., v_k)$ ($k \geq 1$) така, що визначено значення $d(v_1, v_2,.., v_k) \cong (...((d(v_1))(v_2))...(v_k))$ шляху в d ; шлях називається термінальним в d, якщо його значенням в d є дане рангу 0. Для шляхів $(v_1, v_2,.., v_n)$ і $(v'_1, v'_2,.., v'_m)$ будемо писати $(v_1, v_2,.., v_n) \leq (v'_1, v'_2,.., v'_m)$, якщо $n \leq m$ і $v_i = v'_i$ для $i = \overline{1,n}$.
- $rn(d) = \{u \mid d(u)\downarrow\}$ – множина кореневих імен d ;
- $d/u = [v_1 \mapsto d(v) \mid \exists v_1 \in V^+(v \in rn(d) \wedge v = uv_1)]$ $= uv_1)]$ – ділення d на ім'я $u \in V^+$;
- $ra(d) = \{u \mid d(u)\downarrow \in W\}$ – множина атомних кореневих імен d;
- $rn_0(d) = \{u \in rn(d) \mid d(u) \notin W\}$ – множина неатомних кореневих імен d;
- $rp_0(d) = \{u \in V^+ \mid d/u \neq \varnothing\}$ – власні префікси кореневих імен d;
- $rs(d) = rp_0(d) \cup rn(d)V^*$ – слова, порівнювані кореневими іменами d.

Визначимо формально клас складноіменних даних таким чином. Нехай V – непорожня скінченна множина *базових імен*. Тоді $NDVC(V,W) = W \cup G(V,W)$, де $G(V,W)$ – дані $d \in NDV(V,W) \setminus W$ такі, що для довільних двох іменних шляхів $(v_1, v_2,.., v_n)$ та $(v'_1, v'_2,.., v'_m)$ в d, таких, що $v_1 v_2 ... v_n \leq v'_1 v'_2 ... v'_m$, виконується відношення $(v_1, v_2,.., v_n) \leq (v'_1, v'_2,.., v'_m)$.

Змістовно клас $NDVC(V,W)$ складають дані, імена в яких є словами в алфавіті V і в яких немає двох іменних шляхів (один з яких не є початком іншого), таких, що конкатенація імен вздовж одного шляху є префіксом конкатенації імен вздовж іншого шляху. Домовимося, що надалі літерою d (можливо, з індексами) будуть позначатися дані класу $NDVC(V,W)$.

Кожному складноіменному даному можна поставити у відповідність орієноване дерево з дугами, розміченими іменами та листками, розміченими значеннями таким чином: іменним шляхам даного ставляться у відповідність шляхи в дереві, що починаються з кореня, причому термінальним шляхам даного ставляться у відповідність шляхи від кореня до листа дерева. Наприклад, вважаючи, що $a,b,c,d \in V$ і $\{1,2,3,4\} \subseteq W$, даному $[a \mapsto 1, bc \mapsto 2, bd \mapsto [c \mapsto 3, d \mapsto 4]]$ відповідає дерево, подане на рис. 1.

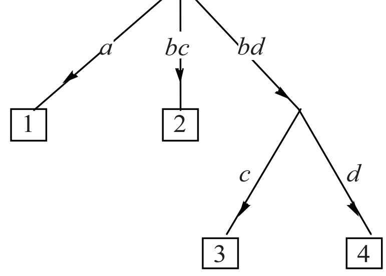

Рис. 1. Приклад дерева, що відповідає складноіменному даному

Алгебри складноіменних даних

Для роботи зі складноіменними даними введемо дві операції типу $NDVC(V,W) \to NDVC(V,W)$, залежні від параметру-імені $v \in V^+$: операція *іменування* $\Rightarrow v$ і операція *асоціативного розіменування* $v \Rightarrow_a$. Операція $\Rightarrow v$ визначається рівністю $\Rightarrow v(d) = [v \mapsto d]$. Операція $v \Rightarrow_a$ визначається індуктивно за довжиною v:

- $v \Rightarrow_a (d) = d(v)$, якщо $|v| = 1$ і $v \in rn(d)$;
- $v \Rightarrow_a (d) = d / v$, якщо $|v| = 1$, $v \notin rn(d)$ і $d / v \neq \varnothing$;
- $v \Rightarrow_a (d) \uparrow$, якщо $|v| = 1$, $v \notin rn(d)$ і $d / v = \varnothing$;
- $v \Rightarrow_a (d) \cong v_1 \Rightarrow_a (x \Rightarrow_a (d))$, якщо $|v| = n \geq 2$ і $v = xv_1$, де $|x| = 1$ і $|v_1| = n-1$.

Введемо на складноіменних даних бінарну операцію *структурного накладання* ∇_s, яка за двома даними утворює третє, що містить значення другого і ті значення з першого, що не були перевизначені (на основі імен) в другому. На прикладах вона діє таким чином:

- $[a \mapsto d_1]\nabla_s[b \mapsto d_2] = [a \mapsto d_1, b \mapsto d_2]$, $a, b \in V$, $a \neq b$;
- $[ab \mapsto d_1]\nabla_s[a \mapsto d_2] = [a \mapsto d_2]$ – значення під іменем a перевизначає значення під іменами, що є продовженнями a;
- $[a \mapsto d_1]\nabla_s[ab \mapsto d_2] = [a \mapsto d_1 \nabla_s [b \mapsto d_2]]$ – значення під іменем ab модифікує значення під іменем a.

Формальне визначення структурного накладання подамо індуктивно за рангом першого аргументу. Якщо d_1 – дане рангу нуль, то

- $d_1 \nabla_s d_2 = d_2$, якщо $d_1 = \varnothing$ і $d_2 \in NDVC(V,W) \setminus W$;
- $d_1 \nabla_s d_2 \uparrow$, якщо $d_1 \in W$ або $d_2 \in W$.

Індукційний перехід. Якщо d_1 – дане рангу $k+1$, то $d_1 \nabla_s d_2 = d$, де дане d визначено таким чином:

1) $d(u) \downarrow= d_2(u)$, якщо $u \in rn(d_2) \setminus rn(d_1)V^+$, тобто u є кореневим іменем в d_2 і не має власного префіксу, що є кореневим іменем в d_1;

2) $d(u) \downarrow= d_1(u) \nabla_s (d_2 / u)$ якщо $u \in rn_0(d_1) \cap rp_0(d_2)$, тобто u є неатомним кореневим в d_1 і власним префіксом кореневого імені в d_2;

3) $d(u) \downarrow= d_2 / u$, якщо $u \in ra(d_1) \cap rp_0(d_2)$, тобто u є атомним кореневим іменем в d_1 і власним префіксом кореневого імені в d_2;

4) $d(u) \downarrow= d_1(u)$, якщо $u \in rn(d_1) \setminus rs(d_2)$, тобто u є кореневим іменем в d_1 і не порівнюється з жодним кореневим іменем з d_2;

5) $d(u) \uparrow$, в інших випадках, тобто якщо $u \notin rn(d_1) \cup rn(d_2)$ або $u \in rn(d_1) \cap rn(d_2)V^+$, або $u \in rn(d_2) \cap rn(d_1)V^+$.

Належність $d \in NDVC(V,W)$ у цьому визначенні легко перевіряється.

Введені вище операції дозволяють визначити сім'ю алгебр складноіменних даних $\{NDA(V,W) \mid V, W\}$, залежних від параметрів V і W.

Визначимо алгебру $NDA(V,W)$ таким чином: носієм алгебри є множина $NDVC(V,W)$, а операціями є сім'я унарних операцій іменування $\{\Rightarrow u \mid u \in V^+\}$, сім'я (часткових) унарних операцій асоціативного розіменування $\{u \Rightarrow_a \mid u \in V^+\}$, (часткова) бінарна операція структурного накладання ∇_s і функція-константа $\overline{\varnothing}$.

Введення алгебр складноіменних даних є важливим, оскільки на їхній основі можна побудувати формальні мови програм обробки даних зі складними іменами. Такі формальні мови можуть відображати важливі аспекти практичних мов програмування і використовуватись як їхні моделі.

Основні тотожності в алгебрі $NDA(V,W)$ надає наступна теорема.

Теорема 1 [2]. Мають місце такі тотожності:

(1) $v \Rightarrow_a (\Rightarrow v(d)) = d$ (оберненість розіменування іменуванню);

(2) $v \Rightarrow_a (u \Rightarrow_a (d)) \cong (uv) \Rightarrow_a (d)$ (асоціативність розіменування);

(3) $d \nabla_s d = d$, якщо $d \notin W$ (обмежена ідемпотентність накладання);

(4) $d_1 \nabla_s (d_2 \nabla_s d_3) \cong (d_1 \nabla_s d_2) \nabla_s d_3$ (асоціативність накладання);

(5) $d_2 \nabla_s (d_1 \nabla_s d_2) \cong d_1 \nabla_s d_2$ (поглинання).

Нерозв'язність елементарної теорії алгебри складноіменних даних

Розглянемо проблему перевірки виконання формул 1-го порядку за участі операцій над складноіменними даними. Ця проблема є важливою, оскільки необхідність її розв'язання може виникнути при перевірці властивостей програм, що обробляють номінативні дані. Однак, як буде показано в цьому розділі, вона переважно алгоритмічно нерозв'язна.

Розглянемо випадок порожнього класу базових значень і доведемо, що елементарна теорія алгебри $NDA(V,\varnothing)$ не розв'язна (якщо $|V| \geq 2$). Для цього спочатку визначимо алгебру $NDPA(V)$, що є ізоморфною алгебрі $NDA(V,\varnothing)$, але елементами носія якої є множини слів, а не складноіменні дані. Після цього доведемо, що елементарна теорія алгебри $NDPA(V)$ не розв'язна, з чого випливатиме нерозв'язність елементарної теорії алгебри $NDA(V,\varnothing)$.

Будемо позначати $FinSet(A)$ – множина скінченних підмножин множини A. Визначимо ряд допоміжних операцій:

1) тотальна операція $\cdot : V^+ \times FinSet(V^+) \to FinSet(V^+)$ визначається рівністю $u \cdot D = \{uv \mid v \in D\}$;

2) сім'я тотальних операцій $u* : FinSet(V^+) \to FinSet(V^+)$, $u \in V^+$ визначається рівністю $u * D = \{u\} \cup \{uv \mid v \in D\}$;

3) тотальна операція $/ : FinSet(V^*) \times V^* \to FinSet(V^*)$ визначається рівністю $A / u = \{v \in V^* \mid uv \in A\}$;

4) сім'я часткових операцій $// u : FinSet(V^+) \to FinSet(V^+)$, $u \in V^+$ визначається умовами $D // u = (D / u) \setminus \{\varepsilon\}$, якщо $D / u \neq \varnothing$, і $D // u$ не визначено, якщо $D / u = \varnothing$;

5) тотальна операція $\oplus : FinSet(V^+) \times FinSet(V^+) \to FinSet(V^+)$ визначається як $D_1 \oplus D_2 = D_2 \cup \{u \in D_1 \mid pref(u) \cap D_2 = \varnothing\}$.

Визначимо алгебру $NDPA(V)$, поклавши в якості її носія множину $FinSet(V^+)$, а в якості операцій – $\{u* \mid u \in V^+\} \cup \{// u \mid u \in V^+\} \cup \{\oplus\} \cup \{\bar{\varnothing}\}$, де $\bar{\varnothing}$ – функція-константа.

Наведемо таку теорему.

Теорема 2. Алгебри $NDPA(V)$ і $NDA(V,\varnothing)$ ізоморфні (якщо їх привести до однієї сигнатури). Відображення $npc : NDVC(V,\varnothing) \to FinSet(V^+)$ визначено рівністю $npc(d) = \{u_1 u_2 .. u_k \mid k \geq 1 \wedge d(u_1, u_2, .., u_k) \downarrow\}$, $d \in NDVC(V,\varnothing)$ є ізоморфізмом між ними.

Доведення цієї теореми може бути проведено шляхом перевірки бієктивності відображення і доведення того, що воно є сильним гомоморфізмом індукцією за рангом даного.

Введемо предикати $Subset^*$, $\{succ^*_v\}_{v \in V}$, $\{succ'^*_v\}_{v \in V}$ на $(FinSet(V^*))^2$ і $Sing^*, Eps^*$ на $FinSet(V^*)$, такі, що для всіх $A, B \in FinSet(V^*)$ виконуються умови

1) $Subset^*(A,B) \Leftrightarrow A \subseteq B$;

2) $Sing^*(A) \Leftrightarrow |A| = 1$;

3) $Eps^*(A) \Leftrightarrow A = \{\varepsilon\}$;

4) $succ^*_v(A,B) \Leftrightarrow \exists u \in V^* \left(A = \{u\} \wedge B = \{vu\} \right)$ для кожного $v \in V$;

5) $succ_v'^*(A,B) \Leftrightarrow \exists u \in V^* \left(A = \{u\} \wedge B = \{uv\} \right)$ для кожного $v \in V$.

Також визначимо предикати $Subset^+$, $\{succ_v^+\}_{v\in V}$, $\{succ_v^+\}_{v\in V}$ на $(FinSet(V^+))^2 \times (FinSet(V^+))^2$ і $Sing^+, Eps^+$ на $(FinSet(V^+))^2$, такі, що для всіх $E_A, E_B, D_A, D_B \in FinSet(V^*)$ виконуються умови

1) $Subset^+((E_A, D_A),(E_B, D_B)) \Leftrightarrow E_A \subseteq E_B \wedge D_A \subseteq D_B$;

2) $Sing^+(E_A, D_A) \Leftrightarrow \left(E_A = \{x_0\} \wedge D_A = \varnothing\right) \vee \left(E_A = \varnothing \wedge |D_A| = 1\right)$;

3) $Eps^+(E_A, D_A) \Leftrightarrow E_A = \{x_0\} \wedge D_A = \varnothing$;

4) $succ_v^+((E_B, D_B),(E_A, D_A)) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow E_B = \varnothing \wedge \left(\left(E_A = \varnothing \wedge \exists u \in V^+ \left(D_A = \{u\} \wedge D_B = \{vu\} \right) \right) \vee \left(E_A = \{x_0\} \wedge D_A = \varnothing \wedge D_B = \{v\} \right) \right)$ для кожного $v \in V$;

5) $succ_v'^+((E_B, D_B),(E_A, D_A)) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow E_B = \varnothing \wedge \left(\left(E_A = \varnothing \wedge \exists u \in V^+ \left(D_A = \{u\} \wedge D_B = \{uv\} \right) \right) \vee \left(E_A = \{x_0\} \wedge D_A = \varnothing \wedge D_B = \{v\} \right) \right)$ для кожного $v \in V$.

Оберемо фіксований елемент $x_0 \in V$ і покладемо $M = \{\varnothing, \{x_0\}\} \times FinSet(V^+)$. Покладемо P_M – характеристичний предикат множини M, визначений на $(FinSet(V^+))^2$. Визначимо відображення $\varphi : FinSet(V^*) \to M$ умовами $\varphi(A) = (\varnothing, A)$, якщо $\varepsilon \notin A$ і $\varphi(A) = (\{x_0\}, A \setminus \{\varepsilon\})$, якщо $\varepsilon \in A$, де $A \in FinSet(V^*)$.

Відображення φ бієктивне: обернене до нього визначається умовами $\varphi^{-1}((\varnothing, D)) = D$ і $\varphi^{-1}((\{x_0\}, D)) = D \cup \{\varepsilon\}$, $D \in FinSet(V^+)$.

Лема 2. Для всіх $A, B \in FinSet(V^*)$ мають місце еквівалентності

1) $Subset^*(A,B) \Leftrightarrow Subset^+(\varphi(A), \varphi(B))$;

2) $Sing^*(A) \Leftrightarrow Sing^+(\varphi(A))$;

3) $Eps^*(A) \Leftrightarrow Eps^+(\varphi(A))$;

4) $succ_v^*(B,A) \Leftrightarrow succ_v^+(\varphi(B), \varphi(A))$ для кожного $v \in V$;

5) $succ_v'^*(B,A) \Leftrightarrow succ_v'^+(\varphi(B), \varphi(A))$ для кожного $v \in V$.

Доведення випливає з визначення φ і відповідних предикатів.

Доведемо, що предикати P_M, $Subset^+$, $Sing^+$, Eps^+, $\{succ_v^+\}_{v\in V}$ і $\{succ_v'^+\}_{v\in V}$ виражаються у теорії 1-го порядку алгебри $NDPA(V)$. Для цього визначимо спочатку ряд предикатів за допомогою формул 1-го порядку сигнатури алгебри $NDPA(V)$. У наведених нижче формулах зліва від двокрапки вказано предикат, а справа – формулу, якою він визначений; малими літерами позначаються змінні, які змістовно призначені для представлення одноелементних множин слів, а великими – до довільних множин слів; це узгодження – лише для зручності читача і не впливає на інтерпретацію.

1) $Const_v(d)$: $d = v * \varnothing$ для кожного $v \in V$;

2) $D_1 \mathrel{\hat{\subseteq}} D_2$: $D_2 \oplus D_1 = D_2$;

3) $Sing(D)$: $D \neq \varnothing \wedge \forall D' \left(D' \mathrel{\hat{\subseteq}} D \Rightarrow \left(D' = D \vee D' = \varnothing \right) \right)$

4) $InMax(d, D)$: $Sing(d) \wedge d \mathrel{\hat{\subseteq}} D$;

5) $IsMax(D', D)$: $D' \mathrel{\hat{\subseteq}} D \wedge \forall d \left(InMax(d, D) \Rightarrow InMax(d, D') \right) \wedge \neg \exists D'' \left(D'' \mathrel{\hat{\subseteq}} D' \wedge D'' \neq D' \wedge \forall d \left(InMax(d, D) \Rightarrow InMax(d, D'') \right) \right)$

6) $Incomp(D)$: $\exists D' \left(IsMax(D, D') \right)$;

7) $EqMin(D_1, D_2)$: $D_1 \oplus D_2 = D_2 \wedge D_2 \oplus D_1 = D_1$;

8) $IsMin(D', D)$: $Incomp(D') \wedge EqMin(D', D)$;

9) $InMin(d, D)$: $\exists D' \left(IsMin(D', D) \wedge InMax(d, D') \right)$;

10) $Subset(D_1, D_2)$:

$$\forall D \forall d \left(\left(D \mathrel{\hat{\subseteq}} D_1 \wedge InMin(d, D) \right) \Rightarrow \exists D' \left(D' \mathrel{\hat{\subseteq}} D_2 \wedge InMin(d, D') \right) \right)$$

11) $Elem(d, D)$:

$Sing(d) \wedge Subset(d, D)$;

12) $EqMax(D_1, D_2)$:

$\exists D \left(IsMax(D, D_1) \wedge IsMax(D, D_2) \right)$;

13) $succ_v(d', d)$:

$Sing(d') \wedge Sing(d) \wedge \exists d'' \left(EqMax(d'', d') \wedge d'' = v * d \right)$ для всіх $v \in V$;

14) $Pfx(d', d)$:

$Sing(d') \wedge Sing(d) \wedge \exists D \left(IsMax(d_2, D) \wedge Subset(d_1, D) \wedge Subset(d_2, D) \right)$

Для кожної множини слів A будемо позначати $\min A$ – множиною мінімальних елементів A за відношенням «бути префіксом» на словах, і відповідно $\max A$ – множиною максимальних елементів A за тим же відношенням. Потужність множини будемо позначати як $|A|$.

Лема 3. Для визначених вище предикатів існують властивості:

(1) $Const_v(d)$ еквівалентно умові $d = \{v\}$ (де $v \in V$);

(2) $D_1 \mathrel{\hat{\subseteq}} D_2$ еквівалентно умові $\{u \in D_2 \mid pref(u) \cap D_1 \neq \varnothing\} \subseteq D_1 \subseteq D_2$;

(3) $Sing(D)$ еквівалентно умові $|D| = 1$;

(4) $InMax(d, D)$ еквівалентно умові $|d| = 1 \wedge d \subseteq \max D$;

(5) $IsMax(D', D)$ еквівалентно умові $D' = \max D$;

(6) $Incomp(D)$ еквівалентно умові $\forall u, v \in D \left(u \neq v \Rightarrow \left(u \not\leq v \wedge v \not\leq u \right) \right)$;

(7) $EqMin(D_1, D_2)$ еквівалентно умові $\min D_1 = \min D_2$;

(8) $IsMin(D', D)$ еквівалентно умові $D' = \min D$;

(9) $InMin(d, D)$ еквівалентно умові $|d| = 1 \wedge d \subseteq \min D$;

(10) $Subset(D_1, D_2)$ еквівалентно умові $D_1 \subseteq D_2$;

(11) $Elem(d, D)$ еквівалентно умові $|d| = 1 \wedge d \subseteq D$;

(12) $EqMax(D_1, D_2)$ еквівалентно умові $\max D_1 = \max D_2$;

(13) $succ_v(d', d)$ еквівалентно умові $\exists u \in V^+ \left(d' = \{vu\} \wedge d = \{u\} \right)$ (де $v \in V$);

(14) $Pfx(d', d)$ еквівалентно умові $\exists u, v \in V^+ \left(d' = \{u\} \wedge d = \{v\} \wedge u \leq v \right)$.

Доведення цієї леми проводиться за визначеннями відповідних предикатів.

Наслідок 1. В теорії 1-го порядку алгебри $NDPA(V)$ виражається бінарний предикат Sfx , такий, що

$Sfx(d', d) \Leftrightarrow$

$\exists u, v \in V^+ \left(d' = \{v\} \wedge d = \{u\} \wedge u \geq v \right)$, де $u \geq v$ означає, що v є суфіксом u .

Доведення випливає з того, що згідно з лемою 3, в теорії 1-го порядку алгебри $NDPA(V)$ виражаються предикати $\{succ_v\}_{v \in V}$, що моделюють функції множення зліва на елементи V , за допомогою яких може бути виражена властивість суфіксної замкненості множини слів. Тоді $Sfx(d', d)$ має місце, якщо для кожної (скінченної) суфіксно-замкненої множини слів, в яку включається d , включається і d' . Детальніше таку побудову описано в [4].

Наслідок 2. У теорії 1-го порядку алгебри $NDPA(V)$ виражається сім'я бінарних предикатів $\{succ'_v\}_{v \in V}$, така, що

$$succ'_v(d', d) \Leftrightarrow \exists u \in V^+ \left(d' = \{uv\} \wedge d = \{u\} \right)$$

для всіх $v \in V$.

Доведення випливає з того, що предикати $Const_v$, Pfx і Sfx виражаються у теорії 1-го порядку алгебри $NDPA(V)$ і має місце така еквівалентність:

$$succ'_v(d', d) \Leftrightarrow \exists u \in V^+ \left(d' = \{uv\} \wedge d = \{u\} \right)$$

$$\Leftrightarrow \exists u, w \in V^+ \left(d' = \{w\} \wedge d = \{u\} \wedge u \leq w \wedge w \geq v \wedge u \neq w \wedge \forall u' \in V^+ \left(u' \leq w \Rightarrow (u' \leq u \vee u' = w) \right) \right).$$

Лема 4. Предикати $Subset^{+}$, $Sing^{+}$, Eps^{+}, $\{succ_v^{+}\}_{v\in V}$, $\{succ_v'^{+}\}_{v\in V}$ і P_M виражаються у теорії 1 порядку алгебри $NDPA(V)$.

Доведення. З визначення $Subset^{+}$, $Sing^{+}$, Pfx^{+}, Eps^{+} і $\{succ_v^{+}\}_{v\in V}$ випливає, що

1) $Subset^{+}$ виражається за допомогою $Subset$;

2) $Sing^{+}$ виражається за допомогою $Const_{x_0}$, $Sing$ і константи $\varnothing$;

3) Eps^{+} виражається за допомогою $Const_{x_0}$ і константи $\varnothing$;

4) $succ_v^{+}$ виражається за допомогою $Const_{x_0}, Const_v$, $succ_v$ і константи $\varnothing$.

5) $succ_v'^{+}$ виражається за допомогою $Const_{x_0}, Const_v$, $succ_v'$ і константи $\varnothing$.

Оскільки $P_M(E,D) \Leftrightarrow E=\{x_0\} \vee E=\varnothing$, то P_M виражається за допомогою $Const_{x_0}$ і константи $\varnothing$. Тоді твердження леми випливає з того, що $\varnothing$ належить сигнатурі алгебри $NDPA(V)$, а предикати $Const_{x_0}$, $Subset$, $Sing$, $\{succ_v\}_{v\in V}$, $\{succ_v'\}_{v\in V}$ виражаються у теорії 1-го порядку алгебри $NDPA(V)$ за лемою 3 і наслідком 2 з неї.

Лему доведено.

Теорема 3. Якщо $|V|\geq 2$, то елементарна теорія алгебри $NDPA(V)$ не розв'язна.

Доведення. Припустимо від супротивного, що елементарна теорія алгебри $NDPA(V)$ розв'язна. Тоді згідно з лемою 2 і обчислюваності відображення φ (і φ^{-1}), є розв'язною теорія 1-го порядку структури S =($FinSet(V^{*})$; $Subset^{*}$, $Sing^{*}$, Eps^{*}, $\{succ_v^{*}\}_{v\in V}$, $\{succ_v'^{*}\}_{v\in V}$). Відомо ([4]), що предикатів $Subset^{*}$, $Sing^{*}$, Eps^{*}, $\{succ_v'^{*}\}_{v\in V}$ достатньо для того, щоб виразити всі предикати, які виражаються у слабкій сингулярній теорія 2 порядку $k=|V|\geq 2$ функцій слідування $WSkS$ [1,4,6] – теорії 2 порядку структури $(V^{*};r_1,..,r_k)$, де $r_i: V^{*}\to V^{*}$ – функції множення справа на елементи V. З другого боку, відомо ([6, теорема 11.6]), що доповнення $WSkS$ функціями множення зліва на елементи V, які моделюються предикатами $\{succ_v^{*}\}_{v\in V}$, веде до нерозв'язної теорії. Таким чином, теорія 1-го порядку структури S не розв'язна. Ми отримали суперечність, звідки випливає твердження теореми.

Теорему доведено.

Наслідок. Якщо $|V|\geq 2$, то елементарна теорія алгебри $NDA(V,\varnothing)$ не розв'язна.

Доведення випливає з того, що алгебри $NDPA(V)$ і $NDA(V,\varnothing)$ ізоморфні.

Зауважимо, що у доведенні теореми 3 операція $//u$ не використовувалася, тому її виключення з сигнатури алгебри $NDPA(V)$ (або, відповідно, виключення асоціативного розіменування з сигнатури $NDA(V,\varnothing)$) не впливає на висновки теореми.

Доведена теорема вказує також на складнощі, які можуть виникнути при перевірці властивостей програм обробки складноіменних даних. Разом з тим, деякі вужчі задачі, що стосуються алгебр складноіменних даних, можуть виявитися розв'язними. Цей напрям вимагає подальших досліджень.

Висновки

У статті побудовано сім'ю алгебр складноіменних даних і встановлено властивості операцій побудованих алгебр. Доведено нерозв'язність елементарної теорії алгебри складноіменних даних із порожнім класом базових значень. Отримані результати можуть бути корисними у застосуванні композиційно-номінативного підходу для аналізу та верифікації програм.

1. Лисовик Л. П. Теория трансдьюсеров / Л. П. Лисовик. – К. : Феникс, 2005. – Том 1. Гл. 13–17. Кн. 3 : Алгебра и автоматы. – 2005. – 262 с. – ISBN 966-651-250-5 (кн. 3).
2. Нікітченко М. С. Властивості композиційно-номінативних мов програм з асоціативним розіменуванням / М. С. Нікітченко, Є. В. Іванов // Матеріали XVI Всеукраїнської наукової конференції «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики» (Львів, 8–9 жовтня 2009). – Л. : ЛНУ ім. Івана Франка, 2009. – С. 157–158.
3. Никитченко Н. С. Композиционно-номинативный подход к уточнению понятия программы / Н. С. Никитченко // Проблемы программирования. – 1999. – № 1. – С. 16–31.
4. Comon H. Tree Automata Techniques and Applications [Електронний ресурс] / H. Comon. – Режим доступу : http://tata.gforge.inria.fr.
5. Nikitchenko N. S. A composition nominative approach to program semantics / N. S. Nikitchenko. – Technical University of Denmark, Report IT-TR : 1998-020, 1998. – 103 p.
6. Thomas W. Automata on infinite objects / Wolfgang Thomas // Handbook of theoretical computer science. Volume B. Formal models and semantics. – USA, Cambridge, MA, MIT Press, 1990. – P. 133–191. – ISBN 0-444-88074-7.

I. Ivanov

PROPERTIES OF ALGEBRAS OF COMPLEX-NAMED DATA

In the article the problem of defining and developing algebras of nominative data with complex names within composition-nominative approach is considered. A class of algebras of complex-named data is defined and properties of the operations of these algebras are investigated. Elementary theory of algebra of complex-named data even with empty class of base values is shown to be undecidable.

Keywords: nominative data, composition-nominative approach.