

ОГЛЯД БІБЛІОГРАФІЇ ПО ТЕОРІЇ МУЛЬТИМНОЖИН

Статтю присвячено огляду літератури з теорії та застосування мультимножин (сукупностей з повтореннями). По кожному із 26 джерел наведено основні результати. Основні статті розглянуто більш детально.

Ключові слова: мультимножина, реляційні бази даних, реляційна алгебра .

Зручною моделлю для подання та представлення об'єктів, особливістю яких є повторюваність і множинність даних, є мультимножини. Змістовно кажучи, мультимножини – це сукупності з повтореннями. Поняття мультимножини з'явилося порівняно недавно, хоча в практичних задачах мультимножини використовувалися досить часто.

У 60-х роках Д. Кнутом було поставлено питання про відсутність адекватної термінології та позначень для такої глобальної концепції як мультимножина. Вперше термін «мультимножина» (multiset, bag) запропонував Н. Г. де Брейн (N. G. de Bruijn) у приватній кореспонденції з Д. Кнутом. У 70-х роках цей термін набув широкого поширення і зараз є стандартним.

Тривалий час поняття мультимножини різними науковцями інтерпретувалося по-різному. Відома оглядова стаття В. Близарда (W. Blizard) [2] – це спроба систематизувати усю існуючу на той час (1989) інформацію. У ній представлено розгорнутий огляд розвитку теорії мультимножин, умовно поділений на дві частини: «Математика і логіка» та «Обчислювальна математика». Автор у хронологічному порядку викладає основні ідеї та здобутки різних науковців, починаючи від розгляду поняття множини та потужності множини у Кантора і закінчуючи результатами, отриманими у цій сфері сучасними вченими (Кнут (D. Knuth), Ягер (R. Yager) та ін.). У частині робіт, розглянутих автором, мультимножини представлені як математичні об'єкти, тоді як в інших роботах мультимножини досліджуються з точки зору певного специфічного застосування. Розглядаються не тільки мультимножини зі скінченною та нескінченною кратністю елементів, а й мультимножини з від'ємною кратністю (так звані гібридні множини). В роботі розглядаються також нечіткі (fuzzy) та жорсткі (rough) мультимножини. Крім цього, розглянуто застосування мультимножин у теорії категорій та комбінаториці, наведено філософські аспекти теорії мультимножин.

У більшості робіт визначення мультимножини формулюється на основі класичної теорії множин або через числення предикатів першого порядку.

Проте деякі роботи розвивають теорію видів (theory of sorts), яка радикально відрізняється від класичної математики своєю тривірною природою (tripartite) природою (об'єкти можуть бути однакові, різні або двоїсті).

Існує більш сучасна (2007 року) оглядова робота [11], яка відштовхується від робіт В. Близарда. Стаття нараховує більш ніж 80 джерел щодо теорії мультимножин та її застосування. У цій роботі розглядаються методи представлення мультимножин, визначаються операції об'єднання, перетину та суми мультимножин і наводяться деякі їхні властивості. Друга частина цієї роботи присвячена саме використанню мультимножин у різних сферах (здебільшого в комп'ютерних науках).

Поширеним є застосування мультимножин у табличних базах даних, цьому присвячено багато робіт.

Проте мультимножини використовуються не лише в математиці та комп'ютерних науках, а й у багатьох інших галузях.

Усю бібліографію, присвячену мультимножинам, можна умовно розділити на такі категорії: роботи щодо абстрактної теорії мультимножин, оглядові роботи, роботи щодо використання мультимножин. Крім цього, виокремимо роботи із застосування теорії мультимножин саме в базах даних. Отже, маємо чотири розділи, представлені в табл. 1.

Детальніше прокоментуємо деякі більш важливі, на наш погляд, роботи.

Стаття [12] (**№ 4 у таблиці**) підсумовує фактологію теорії мультимножин та складається з шести розділів. Перший розділ – вступний, другий – присвячений визначенню мультимножин та операцій над ними, третій розділ описує гібридні множини, у четвертому – мультимножини розглядаються в теорії категорій, розділи п'ять та шість присвячені відповідно нечітким та частково впорядкованим мультимножинам.

Таблиця 1. Бібліографія з теорії та застосування мультимножин

№ п/п	Рік	Автор(и)	Головні результати	Посилання
АБСТРАКТНА ТЕОРІЯ МУЛЬТИМНОЖИН				
1.	1980	Э. Рейнгольд, Ю. Нивергельт, Н. Део	У монографії наводиться змістовне визначення мультимножини. Зазначається, що мультимножини можна розглядати як послідовності пар (кожна пара складається з елементу та його кратності). Тому, як і для послідовностей, найкращий метод представлення мультимножин суттєво залежить від операцій, які виконуються над ними.	[23]
2.	1991	J. Albert	Автор подає формальне визначення мультимножини та операцій над ними; наводить алгебраїчні властивості мультимножин.	[1]
3.	2000	Д. Кнут	Автор подає змістовне визначення поняття мультимножини; визначає операції об'єднання, перетину та суми мультимножин.	[17]
4.	2001	A. Syropoulos	Робота складається з декількох частин і підсумовує усе, що пов'язано з теорією мультимножин станом на 2001 рік. Спочатку автор дає визначення мультимножини, визначає операції додавання, об'єднання та перетину мультимножин, вводить означення потужності та відношення включення мультимножин. Далі розглядаються гібридні множини, нечіткі та частково впорядковані мультимножини, а також наводиться категоріальна модель мультимножин.	[12]
5.	2002, 2003	А. Б. Петровський	У першій монографії автор вводить основні визначення теорії мультимножин: мультимножини, характеристичної функції, операцій над мультимножинами. Крім цього, він розглядає властивості основних операцій над мультимножинами, методи графічного представлення мультимножин і дає короткий огляд застосування мультимножин у різних галузях. У другій монографії автор розглядає метричні простори множин та мультимножин, описує нові види метрик.	[21, 22]
ОГЛЯДОВІ СТАТТІ				
6.	1989	Wayne D. Blizard	Автор подає розгорнутий огляд теорії мультимножин станом на 1989 рік. Робота складається з двох частин: теорія мультимножин та її застосування. У першій частині роботи, починаючи від Кантора та його визначення поняття множини, автор наводить визначення поняття мультимножини різних авторів. У другій частині роботи мультимножини розглядаються насамперед як об'єкти певних практичних задач.	[2]
7.	2007	D. Singh, A. M. Ibrahim, T. Yohanna, J. N. Singh	У роботі розглядаються різноманітні представлення мультимножин (у мультиплікативній, лінійній формах, у вигляді послідовності, як сімейство множин, у вигляді числової послідовності). Визначаються операції над мультимножинами та розглядаються деякі їхні властивості, а також подається короткий огляд застосувань мультимножини в математиці, комп'ютерних науках та інших областях.	[11]
МУЛЬТИМНОЖИНИ В ТАБЛИЧНИХ БАЗАХ ДАНИХ				
8.	1993, 1997	L. Libkin, L. Wong	У першій роботі автори розглядають теоретичні питання, що стосуються реляційних баз даних, основою яких є мультимножини. Вони будують мову запитів для мультимножин BQL (Bag Query Language) та досліджують зв'язок між отриманою мовою і так званою вкладеною реляційною алгеброю (nested relation algebra). Друга робота присвячена виразній силі мови запитів для мультимножин, а також використанню деяких конструкцій для мультимножин, множин та списків.	[6, 7]
9.	1999	Д. Б. Буй, С. А. Поляков	У роботі задано композиційну семантику таблиць з дублікатами рядків і таблиць, «впорядкованих» конструкцією ORDER BY.	[15]
10.	2001	В. Н. Редько, Ю. Й. Брона, Д. Б. Буй, С. А. Поляков.	Монографію присвячено табличним алгебрам і SQL-подібним мовам. Наведено формальне визначення мультимножини, характеристичної функції мультимножини, а також визначено операції над мультимножинами: об'єднання, перетину, різниці, декартового з'єднання, фільтрації, повного образу, агрегатної функції.	[23]
11.	2001	G. Lamperti, M. Melchiori, M. Zanella	Статтю присвячено розширенню можливостей баз даних за рахунок використання мультимножин. Автори зауважують, що сучасні комерційні реляційні бази даних дають змогу здійснювати мультимножинно-орієнтовані маніпуляції над таблицями, навіть якщо бази даних ґрунтуються на формальній множинно-орієнтованій моделі.	[5]

Продовження табл. 1

№ п/п	Рік	Автор(и)	Головні результати	Посилання
12.	2003	С. Д. Кузнецов	Розглядається існування такого структурного типу як мультимножина (BAG) в декларативній мові обмежень OCL. Цей тип є різновидом колекцій і має відповідні операції.	[18]
13.	2003	Стандарт SQL:2003	Починаючи зі стандарту SQL:2003 у мову SQL було введено конструктор типу MULTiset. Значення мультимножин задаються шляхом використання спеціальної конструкції multiset value constructor. Крім цього, для мультимножин введено операції об'єднання, перетину та різниці (multiset union, multiset intersect, multiset except), а також нові агрегатні функції (collect, fusion, intersect).	[20]
14.	2004	K. A. Ross, J. Stoyanovich	Наведено симетричний зв'язок між k -арними сутностями бази даних як мультимножину потужності k , де k – натуральне число. Обґрунтовано необхідність підтримки базами даних мультимножин, обмежених по потужності (cardinality-bounded multisets), які природним чином виникають при вирішенні реальних задач. Також запропоновано методи реалізації. Описано синтаксис розширення SQL, що дає змогу формулювати запити над симетричними зв'язками.	[10]
15.	2004	Г. Гарсія-Молина, Дж. Ульман, Дж. Уидом	Подано визначення мультимножини у термінах табличних баз даних. Також над мультимножинами вводяться основні (об'єднання, перетин, різниця, проєкція, вибір з мультимножини або селекція, декартовий добуток) та додаткові (агрегування, сортування, групування) операції.	[16]
ІНШІ ЗАСТОСУВАННЯ МУЛЬТИМНОЖИН				
16.	1985	Х. Барендрегт	При розгляді сильно еквівалентних рекурсій в теорії λ -числення вводяться мультимножини, основами яких виступають скінченні множини натуральних чисел, для таких мультимножин вводяться ординали.	[13]
17.	1992	Д. Кнут	Автор визначає мультимову як мультимножину рядків і буде контекстно-вільну мультимову.	[4]
18.	1998	J. W. Lloyd	Автор пропонує новий спосіб підтримки мультимножин у декларативній мові програмування Escher. Він вводить стандартне визначення мультимножини, а потім визначає мультимножину відповідними засобами мови. Реалізує операції додавання, об'єднання, перетину та різниці над мультимножинами, а також допоміжні функції для роботи з ними.	[8, 9]
19.	2000, 2005	В. А. Башкин, И. А. Ломазова	Мультимножини застосовуються для визначення основних понять мереж Петрі.	[14, 25]
20.	2004	Г. В. Сухольский	Використання мультимножини у методах психології.	[27]
21.	2005	С. Bonchis, С. Izbasa, G. Ciobanu	Статтю присвячено представленню та кодуванню інформації в термінах теорії мультимножин. Інформаційний ресурс розглядається як такий, що породжує мультимножинні повідомлення. Досліджується норма ентропії мультимножинного інформаційного ресурсу.	[3]
22.	2005	Г. Г. Малинецкий, С. А. Науменко	Мультимножини використано у такій новій області знань, як обчислення на ДНК – розділі так званих молекулярних обчислень (нового міждисциплінарного напрямку досліджень на межі молекулярної біології і комп'ютерних наук).	[19]
23.	2006	О. А. Славин	Мультимножини застосовано в задачах розпізнавання символів. Різноманітні з погляду зображення типи символів можуть містити декілька графем, тобто типів зображення, що відповідають одному символу. Алфавіт навчання як множина класів є носієм мультимножини всіх допустимих графем. Кратність елементу цієї мультимножини є кількість графем, нерозрізнюваних з погляду алфавіту навчання.	[26]

Автор визначає мультимножину, допускаючи, що в заданій множині елементи можуть повторюватися скінченне число разів. Далі наводяться три методи формального визначення мультимножини: метод списку (мультимножина визначається шляхом вказування всіх її елементів), метод правила (the rule method, мультимножина

визначається через певну властивість, притаманну її елементам) та метод характеристичної функції (мультимножина визначається через характеристичну функцію).

Автор розрізняє поняття *мультимножини* (мультимножини з нерозрізнюваними елементами, що повторюються) та *дійсної мультимножини*

ни (мультимножини з розрізнюваними елементами, що повторюються) та наводить відповідні означення.

У другому розділі також подано визначення опорної множини та підмультимножини. Наведено означення потужності мультимножини, операцій над мультимножинами (додавання, різниці, об'єднання та перетину) та деякі властивості операцій. Крім цього, вводиться досить специфічна операція, що не має аналога для множин – бінарна операція мультиперетину, одним аргументом якої виступає мультимножина, іншим – множина.

Наступний розділ статті присвячений гібридним множинам – сукупностям, кратність елементів яких може бути як додатною або рівною 0, так і від'ємною. Автор наводить формальне означення гібридної множини, визначає операції об'єднання, перетину та суми над ними. Також наводить визначення підмножини гібридної множини.

У четвертому розділі розглядається категорна модель мультимножин. Дається визначення двох категорій всіх можливих мультимножин *MSet* та *Bags*.

П'ятий розділ статті описує нечіткі мультимножини. Автор дає формальне визначення, представлення нечіткої мультимножини у вигляді рангової послідовності. Крім цього, визначаються операції об'єднання та перетину нечітких мультимножин, наводяться означення підмультимножини нечіткої мультимножини, рівності нечітких мультимножин та операції α -обмеження нечіткої мультимножини.

Останній розділ присвячено частково впорядкованим мультимножинам (*poset*). Наведено визначення частково впорядкованої мультимножини та розглянуто три основні операції над ними: спеціальний перетин (*concurrency*), спеціальне з'єднання (*concatenation*) і так звані ортоперетин (*orth concurrency*).

У [3] (**№ 21 у таблиці**) розглянуто випадок представлення інформації в термінах мультимножин і кодування інформації за допомогою мультимножин. На початку статті подано короткий огляд теорії інформації Шеннона. Далі дискретний інформаційний ресурс розглядається як такий, що продукує мультимножинні повідомлення (тобто повідомлення з мультимножиною символів). Також досліджується норма ентропії мультимножини інформаційного ресурсу. Потім розглянуто кодування мультимножин, яке включає кодування рядка та кодування довжини, і відповідно для кожного кодування визначається пропускна здатність каналу.

У [4] (**№ 17 у таблиці**) Д. Кнут застосовує мультимножини в контекстно-вільних мультимножинах. У статті подано означення мультимножи-

ни, наведено визначення деяких операцій над мультимножинами (об'єднання, перетин, додавання, множення тощо). Визначається мультимова як мультимножина слів (тоді як мова – це множина слів) та контекстно-вільна мультимова. Д. Кнут зазначає, що заміна множини слів на мультимножину слів більш природна з точки зору програмування.

У [8, 9] (**№ 18 у таблиці**) представлено новий спосіб підтримки мультимножин в декларативній мові програмування. Спочатку наведено стандартне визначення мультимножини, потім мультимножина визначається відповідними засобами мови. Наведено реалізацію операцій над мультимножинами: додавання, різниця, об'єднання, перетин і допоміжні функції: функція, що визначає, чи є заданий елемент членом мультимножини; функція конвертування списку в мультимножину; функція визначення суми всіх елементів мультимножини (визначення потужності); функція, що визначає чи є задана мультимножина підмультимножиною мультимножини; функція, що визначає, чи рівні дві мультимножини; функція видалення дублікатів; функція видалення елементів мультимножини; функція стандартизації (застосовується для представлення мультимножини у стандартному вигляді). Усі ідеї реалізовані у мові програмування Escher. Статтю доповнено прикладами.

Стаття [15] (**№ 9 у таблиці**) належить до розділу «Мультимножини в табличних базах даних», проте її також можна віднести до розділу «Абстрактна теорія мультимножин», адже в першій частині роботи вводяться означення, що відповідають безпосередньо теорії мультимножин. Автори дають формальні визначення мультимножини та її характеристичної функції. Вводять поняття 1-мультимножини – мультимножини, областю значення яких є одноелементна множина $\{1\}$. Визначають операції об'єднання, перетину та різниці над мультимножинами в термінах характеристичних функцій. Автори розрізняють операції \cup_{All} , \cap_{All} , \setminus_{All} та операції \cup_1 , \cap_1 , \setminus_1 . Останні будують 1-мультимножини, основи яких отримуються відповідно теоретико-множинними об'єднанням, перетином та різницею основ відповідних мультимножин.

Також у роботі введено операцію $Dist(\alpha)$, що буде 1-мультимножиною, основа якої збігається з основою вихідної мультимножини. Розглянуто операцію декартового з'єднання двох мультимножин та введено аналог повного образу для мультимножин.

У цій роботі розглядаються функції над таблицями (таблиці розуміються як мультимножини, основами яких є множини односхемних рядків): функції об'єднання, перетину, різниці (вводяться як обмеження однойменних операцій над

мультимножинами), функція декартового з'єднання таблиць і функція вилучення дублікатів.

Другий розділ статті присвячено розгляду таблиць як мультимножин рядків. Спочатку вводиться означення рядку (як кортежу та як іменної множини) і розглядаються основні функції нарядках: роз'яменування, іменування, з'єднання та доступу до елемента рядка за номером. Далі таблиця розглядається як скінченна мультимножина рядків однієї схеми, описується загальна процедура розповсюдження теоретико-множинних операцій над таблицями, які складаються з кортежів, до операцій над таблицями, які складаються з рядків. Встановлюється відповідність між рядками та кортежами та між таблицями рядків і таблицями кортежів.

Останній розділ присвячено уточненню таблиць, що полягає у розгляді таблиці як мультимножини з бінарним відношенням, яке індукується фразою ORDER BY. Тобто таблиці уточнюються як моделі, носії яких є таблиці в попередньому розумінні, а сигнатури містять єдиний предикатний символ.

Роботу [5] (**№ 11 у таблиці**) присвячено питанню розширення можливостей баз даних (БД) за рахунок використання мультимножин. Автори зазначають, що сучасні комерційні реляційні системи БД дозволяють проводити мультимножинно-орієнтовані маніпуляції над таблицями, навіть якщо вони ґрунтуються на формальній множинно-орієнтованій моделі. В статті дається визначення операціям проєкції, селекції, добутку, з'єднання (natural и theta-), перейменування таблиць як мультимножин рядків, а також визначення аналогів теоретико-множинних операцій (об'єднання, перетину, різниці).

Наведемо визначення основних операцій.

Операція проєкції таблиці є мультимножиною рядків:

$$\pi_Y(m) \stackrel{\text{def}}{=} [t_{(Y)} \mid t \in m],$$

де m – мультимножина рядків схеми X (X – множина атрибутів), причому $Y \subseteq X$.

Тут і далі використовуються позначення із [5]: зокрема, $t_{(Y)}$ – обмеження кортежу t за множиною атрибутів Y , запис $t \in m$ слід розуміти як належність кортежу t основі мультимножини m ; $\text{Occ}(t, m)$ – кількість дублікатів (екземплярів) кортежу t в мультимножині m .

На відміну від операції проєкції множини рядків, дублікати рядків, які з'явилися після виконання операції, не вилучаються. Кількість ду-

блікатів кожного кортежу визначається наступною формулою:

$$\text{Occ}(t, \pi_Y(m)) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{t' \in m, t'_{(Y)} = t} \text{Occ}(t', m).$$

Визначимо операцію селекції мультимножин. Операція селекції на мультимножині рядків m просто застосовує предикат селекції до кожного кортежу та повертає як результат такі кортежі $t \in m$, на яких предикат приймає значення істини:

$$\delta_\rho(m) \stackrel{\text{def}}{=} [t \in m \mid \rho(t)].$$

Залежно від значення предикату на кортежі t , усі дублікати цього кортежу або входять до результуючої таблиці, або ні:

$$\text{Occ}(t, \delta_\rho(m)) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \text{Occ}(t, m), & \text{якщо } \rho(t), \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases}$$

Розглянемо ще операцію декартового з'єднання мультимножин.

Нехай є дві мультимножини m_1 і m_2 , визначених на схемах X і Y відповідно, причому $X \cap Y = \emptyset$. Добуток $m_1 \otimes m_2$ – це мультимножина рядків схеми $X \cup Y$, що складається з усіх кортежів, які утворилися в результаті конкатенації кортежів з m_1 і m_2 :

$$m_1 \otimes m_2 \stackrel{\text{def}}{=} \left[t \text{ над } X \cup Y \mid \exists t_1 \exists t_2 \left(\begin{array}{l} t_1 \in m_1, t_2 \in m_2, \\ t_{(X)} = t_1, t_{(Y)} = t_2 \end{array} \right) \right].$$

Змістовно кажучи, кожен кортеж m_1 з'єднується з кожним кортежем m_2 , незалежно від того – дублікат це чи ні; кількість дублікатів знаходиться так:

$$\text{Occ}(t_1 \cup t_2, m_1 \otimes m_2) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Occ}(t_1, m_1) \cdot \text{Occ}(t_2, m_2).$$

Висновки

У статті подано систематизований огляд літератури з теорії та застосування мультимножин. Усі розглянуті роботи умовно розділено на чотири частини: абстрактна теорія мультимножин, оглядові роботи по мультимножинам, застосування мультимножин у табличних базах даних та інші застосування мультимножин. Бібліографію кожної частини представлено у таблиці в хронологічному порядку, по кожній роботі наведено перелік головних результатів. Основні роботи розглянуто більш детально.

1. Albert J. Algebraic properties of bag data types / J. Albert // Seventeenth International Conference on Very Large Data Bases. – Barcelona, Spain, 1991. – P. 211–219.
2. Blizard W. The Development of Multiset Theory / Wayne D. Blizard // Notre Dame Journal of Formal Logic. – 1989. – Vol. 30, No. 1. – P. 36–66.
3. Bonchis C. Information Theory over Multiset / C. Bonchis, C. Izbasa, G. Ciobanu // Research Institute «re-Austria», Institute of Computer Science, 2005.
4. Knuth D. Context-Free Multilanguages / D. E. Knuth // Theoretical Studies in Computer Science. – Academic Press, 1992. – P. 1–13.

5. Lamperti G. On Multisets in Database Systems / G. Lamperti, M. Melchiori, M. Zanella // *Multiset Processing: Mathematical, Computer Science, and Molecular Computing Points of View*, number 2235 in *Lecture Notes in Computing Since*. – Berlin : Springer-Verlag, 2001. – P. 147–215.
6. Libkin L. Query Language for Bags and Aggregates Function / L. Libkin, L. Wong // *Journal of Computer and System Sciences*. – 1997. – Vol. 55, No. 1. – P. 241–272.
7. Libkin L. Some Properties of Query Language for Bags / L. Libkin, L. Wong // *Proceedings of 4th International Workshop on Database Programming Languages*. – New York, 1993. – P. 97–114.
8. Lloyd J. Programming with Multisets / J. W. Lloyd // *Department of Computer Science University of Bristol*, 1998.
9. Lloyd J. Programming with Sets and Multisets / J. W. Lloyd // *Department of Computer Science University of Bristol*, 1998.
10. Ross K. Symmetric relations and cardinality-bounded multisets in database systems / K. A. Ross, J. Stoyanovich // *Proceedings of the 30th International conference on Very Large Database Endowment*, August 31 – September 3, 2004. – Vol. 30. – Toronto, Canada : Morgan Kaufmann Publishers, 2004. – P. 912–923.
11. Singh D. An Overview of the Applications of Multisets / D. Singh, A. M. Ibrahim, T. Yohanna, J. N. Singh // *Novi Sad Journal of Mathematics*. – 2007. – Vol. 37, No. 2. – P. 73–92.
12. Syropoulos A. Mathematics of Multisets / Apostolos Syropoulos // *Multiset Processing: Mathematical, Computer Science, and Molecular Computing Points of View*, number 2235 in *Lecture Notes in Computing Since*. – Berlin : Springer-Verlag, 2001. – P. 347–358.
13. Барендрегт Х. Лямбда-исчисление. Его синтаксис и семантика: [пер. с англ.] / Х. Барендрегт. – М. : Мир, 1985. – 606 с.
14. Башкин В. А. Подобие обобщенных ресурсов в сетях Петри [Электронный ресурс] / В. А. Башкин, И. А. Ломазова. – Режим доступа : <http://lvk.cs.msu.su/files/mco2005/bashkin.pdf>.
15. Буй Д. Б. Композиційна семантика SQL-подібних мов: мультимножини, рядки, впорядковані таблиці / Д. Б. Буй, С. А. Поляков // *Вісник Київського університету. Сер. : фіз.-мат. науки*. – 1999. – Вип. 2. – С. 183–194.
16. Гарсиа-Молина Г. Системы баз данных: [полный курс. : пер. с англ.] / Г. Гарсиа-Молина, Дж. Ульман, Дж. Уидом. – М. : Вильямс, 2004. – 1088 с.
17. Кнут Д. Искусство программирования : [2 том, 3-е изд.: пер. с англ.] / Д. Кнут. – М. : Вильямс, 2000. – 832 с.
18. Кузнецов С. Д. Концептуальное проектирование реляционных баз данных с использованием языка UML [Электронный ресурс] / С. Д. Кузнецов. – Режим доступа : <ftp://ftp.doi.ru/pub/users/cgntv/download/sbornic/sbornic9/Doc13.doc>.
19. Малинецкий Г. Г. Вычисления на ДНК. Эксперименты. Модели. Алгоритмы. Инструментальные средства [Электронный ресурс] / Г. Г. Малинецкий, С. А. Науменко. – Режим доступа : http://www.keldysh.ru/papers/2005/prep2005_57.html.
20. Наиболее интересные новшества в стандарте SQL:2003 [Электронный ресурс] / Режим доступа : <http://www.nestor.minsk.by/sr/2004/03/40331.html>.
21. Петровський А. Б. Основные понятия теории мультимножеств / А. Б. Петровський. – М. : Едиториал УРСС, 2002. – 80 с.
22. Петровський А. Б. Пространства множеств и мультимножеств / А. Б. Петровський. – М. : Едиториал УРСС, 2003. – 248 с.
23. Рейнгольд Э. Комбинаторные алгоритмы: теория и практика / Э. Рейнгольд, Ю. Нивергельт, Н. Део. – М. : Мир, 1980. – 476 с.
24. Редько В. Н. Реляційні бази даних: табличні алгебри та SQL-подібні мови / В. Н. Редько, Ю. Й. Брона, Д. Б. Буй, С. А. Поляков. – К. : Академперіодика, 2001. – 198 с.
25. Сети Петри [Электронный ресурс]. – Режим доступа : http://www.iacr.dvo.ru/lab_11/otchet/ot2000/pn3.html#theory.
26. Славин О. А. Использование мультимножеств в распознавании символов / О. А. Славин // *Труды Института системного анализа Российской академии наук*. – 2006. – Том. 23. – С. 198–205.
27. Сухольский Г. В. Математические методы в психологии / Г. В. Сухольский. – Харьков : ФОЛІО, 2004. – 282 с.

D. Buy, J. Bogatyreva

THE REVIEW OF MULTISSET' THEORY BIBLIOGRAPHY

The article is devoted the review of the existing literature about the theory and application of multisets (substantially speaking, sets with repetitions). On each of 26 sources the basic results are given. The main articles are considered in more details.

Keywords: multiset, relation databases, relation algebra.