3. Демчук М. Б. Математичне моделювання процесу нагнітання в'яжучого розчину в пористе середовище / М. Б. Демчук // Математичне та комп'ютерне моделювання : зб. наук. пр. Сер. фіз.-мат. науки. – 2010 – Вип. 4. – С. 61–75.
4. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – М. : Наука, 1968. – 720 с.
5. Прандтль Л. Гидроаэромеханика / Л. Прандтль; [пер. с немец. Г. А. Вольперта]. – М. : Изд-во иностр. лит., 1951. – 575 с.
6. Федоренко Р. П. Введение в вычислительную физику / Р. П. Федоренко. – М.: Издательство Московского физико-технического института, 1994. – 526 с.
7. Bear J. Introduction to modeling of transport phenomena in porous media / J. Bear, Y. Bachmat. – Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1990. – 553 p.
8. Bouchelaghem F. Mathematical and numerical filtration-advection-dispersion model of miscible grout propagation in saturated porous media / F. Bouchelaghem, L. Vulliet // International journal for numerical and analytical methods in Geomechanics. – 2001. – Vol. 25, № 12. – P. 1195–1227.
9. Chupin O. Modeling of a semi-real injection test in sand / O. Chupin, N. Saiyouri, P.-Y. Hicher // Computers and Geotechnics. – 2009. – Vol. 36. – P. 1039-1042.
10. Chupin O. Numerical modeling of cement grout injection in saturated porous media / O. Chupin, N. Saiyouri, P.-Y. Hicher [electronic resource] : Proceedings of the 16th Engineering Mechanics conference, (University of Washington, Seatle, 2003). – Режим доступу : www.ce.washington.edu/em03/proceedings/papers/627.pdf. – Назва з екрана.
11. Chupin O. The effects of filtration on the injection of cement-based grouts in sand columns / O. Chupin, N. Saiyouri, P.-Y. Hicher // Transport in porous media. – 2008. – Vol. 72. – P. 227–240.
12. Sharma M. M. Transport of particulate suspensions in porous media: model formulation / M. M. Sharma, Y. C. Yortsos // American Institute of Chemical Engineers Journal. – 1987. – Vol. 33.
13. Vlasyuk A. P. Numerical solution of a problem of giving water-side structure foundation strength / A. P. Vlasyuk, M. B. Demchuk // Scientific Bulletin of Chelm. Section of mathematics and computer science. – 2007. – No 1. – P. 211–222.

M. Demchuk

A MODEL OF A CEMENT GROUT INJECTION IN A SATURATED POROUS MEDIUM WITH BOUNDARY CONDITIONS CONFORMING TO INITIAL ONES

A mathematical model of a standard laboratory test of a cement grout injection in a saturated porous medium with boundary conditions conforming to conditions at the initial moment of time is formulated.

Keywords: mathematical model, a standard laboratory test of a cement grout injection in a saturated porous medium, boundary condition, initial condition, a system of equations in partial derivatives.

Матеріал надійшов 22 квітня 2011 р.

УДК 621.391:517.518:510.52

Литвин О. М., Нечуйвітер О. П.

2 D КОЕФІЦІЄНТИ ФУР'Є НА КЛАСІ ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ ТА ОПЕРАТОРИ КУСКОВО-СТАЛОЇ СПЛАЙН-ІНТЕРЛІНАЦІЇ

У статті запропоновано та досліджено кубатурні формули обчислення 2 D коефіцієнтів Фур'є з використанням операторів кусково-сталої інтерлінації на деякому класі диференційованих функцій. Інформація про функцію задана її слідами на системі взаємно-перпендикулярних прямих. Доведено, що оцінку похибки кубатурної формули можна виразити через відповідні оцінки похибки квадратурних формул.

Ключові слова: цифрова обробка сигналів, інтерлінація функцій, 2 D коефіцієнтів Фур'є, кубатурні формули.

Вступ

Сучасні задачі цифрової обробки сигналів потребують вміння наближено обчислювати інтеграли від швидкоосцилюючих функцій двох змінних за допомогою інформаційних операторів різних типів. За дані можуть слугувати значення функції у вузлових точках, сліди функції на лініях, інтеграли від наближуваної функції вздовж вибраної системи ліній, що перетинають досліджуваний об'єкт. Зокрема, задачу наближеного обчислення 2 D коефіцієнтів Фур'є у випадках, коли початкова інформація задається різними інформаційними операторами, дає змогу ефективно розв'язувати апарат інтерлінації функцій [1] на різних класах функцій. Важливим кроком у розв'язанні такої задачі є обчислення 2 D коефіцієнтів Фур'є за допомогою операторів кусково-сталої сплайн-інтерлінації (інформація про $f(x, y)$ задається її слідами на системі взаємно-перпендикулярних прямих). Актуальним є питання оцінки похибки кубатурної формули, а також отримання оцінки похибки кубатурної формули через відповідні оцінки похибки квадратурних формул.

У [2–4] розглядалася задача наближеного обчислення 2 D коефіцієнтів Фур'є за допомогою інтерлінації функцій у випадку, коли інформація про $f(x, y)$ задається слідами на системі взаємно-перпендикулярних прямих. Однак питання отримання оцінки похибки побудованих кубатурних формул через відповідні оцінки похибки квадратурних формул розглядається вперше.

Постановка задачі: побудова кубатурних формул для обчислення 2 D коефіцієнтів Фур'є з використанням інтерлінації функцій на класі дійсних функцій двох змінних, визначених на $G = [0,1]^2$ і таких, що $\left|f^{(1,0)}(x,y)\right| \le M$, $\left|f^{(0,1)}(x,y)\right| \le M$, $\left|f^{(1,1)}(x,y)\right| \le \tilde{M}$ тоді, коли інформація про функцію задана її слідами на системі взаємно-перпендикулярних прямих $x_k = k\Delta - \dfrac{\Delta}{2},\ y_j = j\Delta - \dfrac{\Delta}{2},\ k, j = \overline{1,\ell},\ \Delta = \dfrac{1}{\ell}$. Довести, що оцінку похибки побудованих кубатурних формул можна отримати різними способами, зокрема, виразити через відповідні оцінки похибки квадратурних формул.

Оцінки похибки обчислення 2 D коефіцієнтів Фур'є

Нехай $p_k(x)$, $p_j(y)$ – сплайни порядку 0,1,2,3 з властивостями

$$p_k(x_\alpha) = \delta_{\alpha k},\ p_j(y_\beta) = \delta_{\beta j},\ \alpha, \beta = \overline{1,\ell} \text{ і}$$

$$O_1 f(x,y) = \sum_{k=1}^{\ell} f(x_k, y) p_k(x),$$

$$O_2 f(x,y) = \sum_{j=1}^{\ell} f(x, y_j) p_j(y),\ k, j \in \overline{1,\ell},$$

$$R_1(f; x, y) = f(x,y) - \sum_{k=1}^{\ell} f(x_k, y) p_k(x) = f(x,y) - O_1 f(x,y),$$

$$R_2(f; x, y) = f(x,y) - \sum_{j=1}^{\ell} f(x, y_j) p_j(y) = f(x,y) - O_2 f(x,y).$$

Оператор сплайн-інтерлінант $Of(x,y)$ представлений операторам $O_\mu f(x,y)$, $\mu = 1,2$ так:

$$Of(x,y) = O_1 f(x,y) + O_2 f(x,y) - O_1 O_2 f(x,y).$$

Лема 1. Для залишку

$$R(f) = \int_0^1\int_0^1 (f(x,y) - Of(x,y)) \sin 2\pi mx dx \sin 2\pi ny dy,$$

справедлива наступна рівність:

$$R(f) = \int_0^1\int_0^1 R_1 R_2 f(x,y) \sin 2\pi mx dx \sin 2\pi ny dy,$$

Доведення. Оскільки

$$f(x,y) - Of(x,y) =$$
$$= f(x,y) - O_1 f(x,y) - O_2 f(x,y) + O_1 O_2 f(x,y) =$$
$$= [I - O_1 - O_2 + O_1 O_2] f(x,y) =$$
$$= [I - O_1 + I - O_2 + I - O_1 O_2] f(x,y) =$$
$$= [(I - O_1)(I - O_2)] f(x,y) = R_2 R_1 f(x,y), \text{ то}$$

$$R(f) =$$
$$= \int_0^1\int_0^1 (f(x,y) - Of(x,y)) \sin 2\pi mx dx \sin 2\pi ny dy =$$
$$= \int_0^1\int_0^1 R_1 R_2 f(x,y) \sin 2\pi mx dx \sin 2\pi ny dy \text{, то}$$

Лема 1 доведена.

Нехай

$$\tilde{R}_1(f;y) =$$
$$= \int_0^1 \left(f(x,y) - \sum_{k=1}^{\ell} f(x_k, y) p_k(x) \right) \sin 2\pi mx dx =$$
$$= \int_0^1 \left(f(x,y) - O_1 f(x,y) \right) \sin 2\pi mx dx,$$

$$\tilde{R}_2(f;x) =$$
$$= \int_0^1 \left(f(x,y) - \sum_{j=1}^{\ell} f(x, y_j) p_j(y) \right) \sin 2\pi ny dy =$$
$$= \int_0^1 \left(f(x,y) - O_2 f(x,y) \right) \sin 2\pi ny dy.$$

Лема 2. Для залишку $R(f)$ справедлива така рівність:

$$R(f) =$$
$$= \int_0^1\int_0^1 (f(x,y) - Of(x,y)) \sin 2\pi mx dx \sin 2\pi ny dy =$$
$$= \tilde{R}_1 \tilde{R}_2 f(x,y).$$

Доведення.

Розглянемо

$$\tilde{R}_1 \tilde{R}_2 f(x,y) =$$
$$= \int_0^1 \left(\tilde{R}_2(f;x) - \sum_{k=1}^{\ell} \tilde{R}_2(f;x_k) p_k(x) \right) \sin 2\pi mx dx =$$
$$= \int_0^1 \left\{ \int_0^1 \left(f(x,y) - \sum_{j=1}^{\ell} f(x, y_j) p_j(y) \right) \sin 2\pi ny dy - \right.$$
$$\left. - \sum_{k=1}^{\ell} \int_0^1 \left(f(x_k, y) - \sum_{j=1}^{\ell} f(x_k, y_j) p_j(y) \right) 2\pi ny dy p_k(x) \right\} 2\pi mx dx =$$
$$= \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(f(x,y) - \sum_{j=1}^{\ell} f(x, y_j) p_j(y) \right) \sin 2\pi ny dy \right) \sin 2\pi mx dx -$$
$$- \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{\ell} \int_0^1 \left(f(x_k, y) - \sum_{j=1}^{\ell} f(x_k, y_j) p_j(y) \right) \sin 2\pi ny dy p_k(x) \right) \sin 2\pi mx dx =$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\sin 2\pi mx \sin 2\pi ny dxdy -$$
$$-\int_0^1 \int_0^1 \sum_{j=1}^{\ell} f(x,y_j)p_j(y)\sin 2\pi ny dy \sin 2\pi mx dx -$$
$$-\int_0^1 \int_0^1 \sum_{k=1}^{\ell} f(x_k,y)p_k(x)\sin 2\pi mx dx \sin 2\pi ny dy +$$
$$+\int_0^1 \int_0^1 \sum_{k=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{\ell} f(x_k,y_j)p_k(x)p_j(y) \sin 2\pi mx dx \sin 2\pi ny dy =$$
$$= \int_0^1 \int_0^1 \left\{ f(x,y) - \sum_{k=1}^{\ell} f(x_k,y)p_k(x) - \sum_{j=1}^{\ell} f(x,y_j)p_j(y) + \right.$$
$$\left. + \sum_{k=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{\ell} f(x_k,y_j)p_k(x)p_j(y) \right\} \sin 2\pi mx dx \sin 2\pi ny dy =$$
$$= \int_0^1 \int_0^1 (f(x,y) - Of(x,y))\sin 2\pi mx dx \sin 2\pi ny dy = R(f).$$

Лема 2 доведена.

Далі як $p_k(x)$, $p_j(y)$ будемо розглядати кусково-сталі базисні сплайни.

2. Кубатурна формула обчислення 2 D коефіцієнтів Фур'є з використанням операторів кусково-сталої сплайн-інтерфлетації

Введемо позначення

$$h_{0k}(x) = \begin{cases} 1, x \in X_k \\ 0, x \notin X_k, \end{cases} \quad k = \overline{1,\ell};$$
$$H_{0j}(y) = \begin{cases} 1, y \in Y_j, \\ 0, y \notin Y_j, \end{cases} \quad j = \overline{1,\ell},$$
$$X_k = [x_{k-1/2}, x_{k+1/2}],\ Y_j = [y_{j-1/2}, y_{j+1/2}],$$
$$x_k = k\Delta - \frac{\Delta}{2},\ y_j = j\Delta - \frac{\Delta}{2},\ k,j = \overline{1,\ell}, \Delta = \frac{1}{\ell}.$$

Нехай $Jf(x, y)$ – оператор-інтерлінант

$$Jf(x,y) = \sum_{k=1}^{\ell} f(x_k,y)h_{0k}(x) + \sum_{j=1}^{\ell} f(x,y_j)H_{0j}(y) -$$
$$-\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{\ell} f(x_k,y_j)h_{0k}(x)H_{0j}(y).$$

Лема 3. [1] Для $Of(x, y)$ виконуються наступні властивості:

1. $Jf(x_k,y) = f(x_k,y), \quad k = \overline{1,\ell},$
2. $Jf(x,y_j) = f(x,y_j), \quad j = \overline{1,\ell},$
3. $|f(x,y) - Jf(x,y)| = O\left(\frac{1}{\ell^2}\right) = O(\Delta^2), \forall (x,y) \in G.$

Для обчислення інтегралів $I_k^2(m,n)$, $k = 1, 2, 3$

$$I_1^2(m,n) = \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\sin 2\pi mx \sin 2\pi ny dxdy,$$
$$I_2^2(m,n) = \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\cos 2\pi mx \cos 2\pi ny dxdy,$$
$$I_3^2(m,n) = \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)e^{-i2\pi mx}e^{-i2\pi ny} dxdy$$

пропонуються формули:

$$\Phi_1^2(m,n) = \int_0^1 \int_0^1 Jf(x,y)\sin 2\pi mx \sin 2\pi ny dxdy,$$
$$\Phi_2^2(m,n) = \int_0^1 \int_0^1 Jf(x,y)\cos 2\pi mx \cos 2\pi ny dxdy,$$
$$\Phi_3^2(m,n) = \int_0^1 \int_0^1 Jf(x,y)e^{-i2\pi mx}e^{-i2\pi ny} dxdy.$$

Підставимо у ці формули вираз для оператора-інтерлінанта $Jf(x, y)$ та отримаємо відповідні кубатурні формули:

$$\Phi_1^2(m,n) = \sum_{k=1}^{\ell} \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} \sin 2\pi mx dx \int_0^1 f(x_k,y)\sin 2\pi ny dy +$$
$$+\sum_{j=1}^{\ell} \int_0^1 f(x,y_j)\sin 2\pi mx dx \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \sin 2\pi ny dy -$$
$$-\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{\ell} f(x_k,y_j) \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} \sin 2\pi mx dx \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \sin 2\pi ny dy,$$

$$\Phi_2^2(m,n) = \sum_{k=1}^{\ell} \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} \cos 2\pi mx dx \int_0^1 f(x_k,y)\cos 2\pi ny dy +$$
$$+\sum_{j=1}^{\ell} \int_0^1 f(x,y_j)\cos 2\pi mx dx \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \cos 2\pi ny dy -$$
$$-\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{\ell} f(x_k,y_j) \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} \cos 2\pi mx dx \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \cos 2\pi ny dy,$$

$$\Phi_3^2(m,n) = \sum_{k=1}^{\ell} \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} e^{-i2\pi mx} dx \int_0^1 f(x_k,y)e^{-i2\pi ny} dy +$$
$$+\sum_{j=1}^{\ell} \int_0^1 f(x,y_j)e^{-i2\pi mx} dx \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} e^{-i2\pi ny} dy -$$
$$-\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{\ell} f(x_k,y_j) \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} e^{-i2\pi mx} dx \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} e^{-i2\pi ny} dy.$$

Теорема. Для кубатурної формули $\Phi_1^2(m,n)$ обчислення $I_1^2(m,n)$ справедлива наступна оцінка

$$\rho\left(I_1^2(m,n),\Phi_1^2(m,n)\right)=\left|R(f)\right|\le\frac{\tilde{M}}{16\ell^2}.$$

Доведення. Маємо наступну оцінку (лема 1)

$$\rho\left(I_1^2(m,n),\Phi_1^2(m,n)\right)=$$
$$\left|\int_0^1\int_0^1\left(f(x,y)-Jf(x,y)\right)\sin(2\pi mx)\sin(2\pi ny)dxdy\right|\le$$
$$=\left|\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{\ell}\int_{x_{k-\frac12}}^{x_{k+\frac12}}\int_{y_{j-\frac12}}^{y_{j+\frac12}}\left[f(x,y)-Jf(x,y)\right]\sin 2\pi mx\sin 2\pi ny dxdy\right|\le$$
$$\le\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{\ell}\int_{x_{k-\frac12}}^{x_{k+\frac12}}\int_{y_{j-\frac12}}^{y_{j+\frac12}}\left|\int_{x_k}^{x}\int_{y_j}^{y}f^{(1,1)}(\xi,\eta)d\xi d\eta\right|dxdy\le$$
$$\le\widetilde{M}\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{\ell}\int_{x_{k-\frac12}}^{x_{k+\frac12}}|x-x_k|dx\int_{y_{j-\frac12}}^{y_{j+\frac12}}|y-y_j|dy=$$
$$=\widetilde{M}\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{s=1}^{\ell}\left(-\frac{(x-x_k)^2}{2}\Bigg|_{x_{k-\frac12}}^{x_k}+\frac{(x-x_k)^2}{2}\Bigg|_{x_k}^{x_{k+\frac12}}\right)\times$$
$$\times\left(-\frac{(y-y_j)^2}{2}\Bigg|_{y_{j-\frac12}}^{y_j}+\frac{(y-y_j)^2}{2}\Bigg|_{y_j}^{y_{j+\frac12}}\right)=$$
$$=\widetilde{M}\ell^2\frac{\Delta^2}{4}\frac{\Delta^2}{4}=\frac{\widetilde{M}}{16}\frac{1}{\ell^2}.$$

Доведення теореми можна здійснити на основі леми 2, використовуючи оцінки похибки квадратурних формул.

Дійсно, якщо $g(x)\in C^1[0,1]$, $|g'(x)|\le M$, $x_k=k\Delta-\frac{\Delta}{2}$, $k=\overline{1,\ell}$, $\Delta=\frac{1}{\ell}$, то для функції однієї змінної мають місце наступні оцінки:

$$\left|\tilde{R}_1\right|=\left|\sum_{k=0}^{\ell-1}\int_{x_{k-\frac12}}^{x_{k+\frac12}}\left(g(x)-g(x_k)\right)\sin 2\pi mxdx\right|\le$$
$$\le\sum_{k=0}^{\ell-1}\int_{x_{k-\frac12}}^{x_{k+\frac12}}\left|g(x)-g(x_k)\right|dx=\sum_{k=0}^{\ell-1}\int_{x_{k-\frac12}}^{x_{k+\frac12}}\left|\int_{x_k}^{x}g'(\xi)d\xi\right|dx\le$$
$$\le M\sum_{k=0}^{\ell-1}\int_{x_{k-\frac12}}^{x_{k+\frac12}}|x-x_k|dx=$$
$$=M\sum_{k=0}^{\ell-1}\left(-\frac{(x-x_k)^2}{2}\Bigg|_{x_{k-\frac12}}^{x_k}+\frac{(x-x_k)^2}{2}\Bigg|_{x_k}^{x_{k+\frac12}}\right)=$$
$$=M\ell\frac{\Delta^2}{4}=\frac{M\Delta}{4}.$$

Тоді, за лемою 2, маємо $\rho\left(I_1^2(m,n),\Phi_1^2(m,n)\right)\le$ $\le\left|\tilde{R}_1\tilde{R}_2(f;x,y)\right|\le\tilde{M}\frac{\Delta^2}{4^2}=\frac{\tilde{M}}{16\ell^2}$. Теорема доведена.

3. Чисельний експеримент

Нехай

$$f(x,y)=\frac12\left(cos(2x-2y)-cos(2x+2y)\right),$$

тоді $\left|f^{(1,0)}(x,y)\right|\le 2$, $\left|f^{(0,1)}(x,y)\right|\le 2$, $\left|f^{(1,1)}(x,y)\right|\le 4$. Якщо обчислювати інтеграл за кубатурою формули $\Phi_1^2(2,3)$, коли $\ell=19$, то

$$\left|R(f)\right|=\left|I_1^2(2,3)-\Phi_1^2(2,3)\right|=$$
$$=\left|0.008785471951418-0.008785470342025\right|=$$
$$=0.000000001609393.$$

Функцію $f(x, y)$ можна представити у вигляді $f(x,y)=\cos 2x\cos 2y$, тому, якщо $g(u)=\cos 2u$, $u=x,y$, можна отримати наступні результати обчислень для

$$\tilde{R}_i(g,u,s)=\left|\sum_{k=0}^{\ell-1}\int_{u_k}^{u_{k+1}}\left(g(u)-g(u_k)\right)\sin 2\pi sudu\right|,$$

$i=1,2$, при $\ell=19$:

$$\tilde{R}_1(g,x,2)=0{,}000051056063201,$$
$$\tilde{R}_2(g,y,3)=0{,}000031522074555.$$

Отже,

$$\left|R(f)\right|=\left|I_1^2(2,3)-\Phi_1^2(2,3)\right|=$$
$$=\tilde{R}_1(g,x,2)\cdot\tilde{R}_2(g,y,3)=$$
$$=0{,}000051056063201\cdot 0{,}000031522074555=$$
$$=0{,}000000001609393.$$

Висновки

У статті досліджено кубатурні формули обчислення 2 D коефіцієнтів Фур’є з використанням операторів кусково-сталої інтерлінації на деякому класі диференційованих функцій. Інформація про функцію задана її слідами на системі взаємно-перпендикулярних прямих. Доведено, що оцінку похибки кубатурних формул можна виразити через відповідні оцінки похибки квадратурних формул. Чисельний експеримент підтверджує теоретичний результат.

Література

1. Литвин О. М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування / О. М. Литвин. – Харків : Основа, 2002. – 544 с.
2. Литвин О. М. Оптимальний за порядком точності метод обчислення 2 D коефіцієнтів Фур'є за допомогою інтерлінації / О. М. Литвин, О. П. Нечуйвітер // Праці науково-технічної конференції з міжнародною участю «Комп'ютерне моделювання в наукоємних технологіях», 18 – 21 травня, 2010. – Харків. – Ч. 1. – 2010. – С. 211–213.
3. Литвин О. М. Про одну кубатурну формулу для обчислення 2 D коефіцієнтів Фур'є з використанням інтерлінації функцій / О. М. Литвин, О. П. Нечуйвітер // Доповіді НАН України. – 2010. – № 3. – С. 24–29.
4. Литвин О. М. Кубатурна формула для обчислення 2 D коефіцієнтів Фур'є з використанням інтерлінації функцій / О. М. Литвин, О. П. Нечуйвітер // Вісник ХНУ. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». – 2010. – № 926. – С. 153–160.

O. Lytvyn, O. Nechuyviter

2 D FOURIER COEFFICIENTS ON CLASSES OF DIFFERENTIABLE FUNCTIONS AND OPERATORS PIECEWISE-STEEL SPLINE-INTERLINEATION

Cubature formulas of the calculation of 2 D Fourier's coefficients are presented by using piecewice operators of spline-interlineation in the case when information about function is set of lines on one class of differentiable functions. The error of the cubature formulas is evaluated by errors of quadratures formulas.

Keywords: digital signal processing, functions interlineation, 2 D Fourier coefficients, cubature formulas.

Матеріал надійшов 11 травня 2011 р.

УДК 004.932.2

O. Buchko

FOURIER DESCRIPTORS FOR SHAPE CHARACTERIZATION

This paper reports shape characterization methods based on Fourier descriptors. Fourier descriptors were implemented based on angular and complex shape representation and their ability to characterize the shapes of different objects were evaluated. A new shape descriptor using Fourier descriptors was proposed.

Keywords: **shap**e representation, shape description, Fourier descriptors.

Introduction

Objects can be characterized by certain features: grey levels, textures, edges, boundaries, shapes, locations, etc. An object or regions of interest consists of interior points or contents which are surrounded by a boundary often called the contour of an object. There is no universal definition of what shape of an object is. The shape of an object is the important visual feature for describing image content and is generally considered as the form of the object's boundary, consisting of a set of points, curves, surfaces, etc.

Here we consider shape boundary of the object as a closed planar curve that can be defined as function:

– in an explicit form as $y = (x)$;

– in an implicit form as $f(x, y) = 0$;

– in a parametric form by natural parameterization $c(t) = ((x(t), y(t))$. We will consider that the parameter t is given by the arc-length parameterization with $0 \le t \le L$, where L is the length of the shape boundary.

– a parametric form in the polar coordinates as $\tau(t) = ((d(t), \theta(t))$.

– a parametric form in the complex plane, $z(t) = x(t) + j \cdot y(t)$.

Usually a pre-segmented binary shape is represented by its external characteristics (shape representation) and then shape characterization or shape description is used as a post-processing technique. It generates descriptors of the shape. Descriptors of the shape are a set of numbers that describe specific characteristics or features of an object and are considered as shape parameters that allow comparing