вих однозначних, тотальних неоднозначних і часткових неоднозначних квазіарних предикатів реномінативного та кванторного рівнів. На основі різних співвідношень між областями істинності та хибності предикатів визначено «істиннісний», «хибнісний», «сильний», «неспростовнісний», «насичений» логічні наслідки для множин формул. Досліджено властивості відношень логічного наслідку для множин формул у різних семантиках для загального випадку логік квазіарних предикатів, для логік еквітонних і логік антитонних предикатів. На основі цих властивостей планується побудова відповідних числень секвенційного типу.

Література

1. Нікітченко М. С. Математична логіка та теорія алгоритмів / М. С. Нікітченко, С. С. Шкільняк. – К. : ВПЦ Київський університет, 2008. – 528 с.
2. Никитченко Н. С. Композиционно-номинативный подход к уточнению понятия программы / Н. С. Никитченко // Проблемы программирования. – 1999. – № 1. – С. 16–31.
3. Смирнова Е. Д. Логика и философия / Е. Д. Смирнова. – М. : РОССПЕН, 1996. – 304 с.
4. Шкільняк С. С. Відношення логічного наслідку в композиційно-номінативних логіках / С. С.Шкільняк // Проблеми програмування. – 2010. – № 1 – С. 15–38.

S. Shkilniak

RELATION OF LOGICAL CONSEQUENCE FOR SETS OF FORMULAS IN COMPOSITION-NOMINATIVE LOGICS

Relation of logical consequence for composition-nominative logics of partial single-valued, total multiple-valued and partial multiple-valued quasi-ary predicates is studied. We propose various formalizations of relation of logical consequence for sets of formulas. Properties of the defined formalizations are investigated in different semantics for general case of logics of quasi-ary predicates and for cases of logics of equitone predicates and logics of antitone predicates.

Keywords: logic, predicate, composition-nominative approach, semantics, logical consequence.

Матеріал надійшов 17 березня 2011 р.

УДК 519.81

Михалевич В. М.

ДО СИСТЕМИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕННЯ

Уведено і формалізовано поняття системи прийняття рішення, засноване на підході В. І. Іваненка (див.: [15; 50]). Загальність введеної моделі системи прийняття рішення проілюстровано на прикладах задач прийняття рішення за наявності випадковості, описаної як стохастичними розподілами (ймовірнісна випадковість), так і закономірностями масових явищ («випадковість в широкому сенсі» [15]).

Ключові слова: ситуація, параметрична ситуація, схема ситуації, модель ситуації, задача рішення.

Долучаючись до слів відомого фахівця в галузі теорії прийняття рішень Е. Й. Вілкаса: «Хоча насправді прийняття рішень є процесом, за своєю складністю і характером порівнюваним з процесом мислення в цілому, тут під “прийняттям рішень” будемо мати на увазі одноразовий акт вибору деяких альтернатив з їх заданої множини. Таке обмеження проблеми може бути виправдано тим, що є багато реальних задач саме такого типу, і, крім того, навіть у цьому випадку проблема залишається дуже складною. З іншого боку, і дуже загальний процес прийняття рішень можна уявляти собі як послідовність таких виборів альтернатив [7], тому він у відомому сенсі зводиться до розглянутого випадку» [5], – під *рішенням* ми будемо мати на увазі *вибір* дії з заданої їхньої множини і позначати це рішення тим самим символом, що і дію.

Очевидно, що маючи відношення переваг на рішеннях, ТПР, використовуючи весь арсенал методів теорії оптимального вибору, можна спробувати досягти своєї мети, однак це вже матиме безпосереднє відношення до теорії і методів оптимізації.

Що стосується питання встановлення ТПР відношення переваг на множині наслідків, то він, радше, належить до питань психології і тому його прямий аналіз ми опускаємо, хоча і посилаємося в відповідних місцях на відомі нам дослідження в цьому напрямку. Непрямий аналіз питання вибору переваг на наслідках відбувається в аналізі вибору переваг на рішеннях.

Якщо розглядати дійсність (природу) з позиції суб'єкта, що впливає на неї під час діяльності, то доходимо до основного поняття теорії прийняття рішення – **системи прийняття рішення**. За термінологією В. І. Іваненка [15], система прийняття рішення представляє собою вказаний суб'єкт, **того, хто приймає рішення** (ТПР), що розглядається в парі з об'єктом своєї діяльності – оточуючою цього ТПР дійсністю (зовнішнім світом), так званою **ситуацією прийняття рішення** (СПР) або просто ситуацією, в якій він перебуває. Таким чином, експериментуючи, ТПР може вплинути на СПР за допомогою конкретної дії, після чого спостерігати результат дії, що надалі називатимемо наслідком. Водночас СПР опосередковано впливає на ТПР, ініціюючи дію останнього. Вплив СПР на ТПР у цій системі прийняття рішення, тобто «подія, яку ми не можемо контролювати або передбачити, а її результати неминуче позначаться на результаті наших дій» [40], будемо називати значенням **параметра, що неспостерігаємо**, (станом природи) в момент дії ТПР-а. Для порівняння: «У статистиці прийнято називати сукупність причин, що керують ходом випадкових подій, **станом природи**» [42].

Деталізуючи це поняття, процитуємо ще одного фахівця в галузі теорії прийняття рішення: «Поняття станів природи є каменем спотикання сучасної теорії прийняття рішень в умовах невизначеності. Представлені у Севіджа [52] стани природи формалізують ідею повного усунення невизначеності та є способом представлення унікального наслідку для кожної можливої дії (формально, стан природи є функцією на множині дій зі значеннями в множині наслідків). Наприклад, у разі ставки на результат кінних перегонів, стани природи відповідають порядку, в якому коні можуть фінішувати (це є станом природи, за Енскомбом і Ауманом [45]).

Теорії прийняття рішень в умовах невизначеності, в яких необхідно вводити простір станів (що є множиною всіх можливих станів природи), потребують, щоб стани були визначені так, аби реалізація альтернативних подій (які є підмножинами простору станів) була незалежною від дій ТПР, а оцінка наслідків – незалежною від стану, в якому вони настали. Таким чином, якщо на можливий результат кінних перегонів можуть впливати дії того, хто приймає рішення (наприклад, жокея), тоді результати перегонів не вважаються станами природи» [51].

Саме з таких позицій ситуацію в системі прийняття рішення можна розглядати як певний механізм формувань значень невідомого параметра незалежно від дій ТПР і результату цієї дії, що залежить від ТПР. Своєю чергою, ТПР в системі прийняття рішення можна розглядати як певний механізм формування (вибору) дії в ситуації цієї системи.

Під **основною задачею** прийняття рішення для ТПР у ситуації прийняття рішення або коротко **задачею рішення** (ЗР) ми будемо розуміти встановлення цим ТПР відношення переваг на наслідках – **(перша ЗР)** і рішеннях – **(друга ЗР)** у цій ситуації.

Здійснимо порівнювальний аналіз базових понять теорії ймовірностей і теорії прийняття рішень.

«Першопочаткове поняття у вивченні навколишнього світу – поняття **події**. Подія визначається тим, відбувається чи не відбувається певне явище. Абстрактне поняття події стосується лише того, сталося воно чи ні, а не його природи» [23].

Як відомо, під час вивчення експериментатором законів природи, події експериментатор розділяє на **умови** і **результати експерименту**, що часто називають в теорії прийняття рішень **дією**. Умови, які спричиняють дію, – це події, припустимі чи реалізовані, з можливістю їх багаторазового повторення ТПР. «Аналізуючи конкретну систему, ми фактично розглядаємо виділену нами частину більш повної складної системи. Саме це виділення ми використовуємо, оскільки не в змозі охопити і досить компактно математично описати, дослідити все різноманіття властивостей повної системи. Те, яку частину більш повної системи ми виділяємо, визначено метою дослідження і нашими уявленнями про повну систему» [39]. Ці міркування уможливили пояснити поняття наслідків дії: наслідки дії – це події, які є очікуваними ТПР результатами цієї дії, тобто можуть відбутися, коли він виконує умови цієї дії.

Умови, що викликають дію, спільно з алгеброю його наслідків утворюють **випробування**. Говорячи про повторні випробуваннях однієї і тієї ж дії, ми маємо на увазі, що вони збігаються (мають однакові умови та алгебри наслідків) і є цілком незалежними (тобто, при здійсненні випробувань у будь-якому порядку, відомості про наслідки будь-якого з них і всіх попередніх йому випробувань не впливають на наслідки наступних за ним випробувань).

В основі теоретико-множинного методу викладу теорії ймовірностей лежить припущення, що випробуванню, яке розглядається, поставлено як відповідність деяку множину подій, а точніше – наслідків, названу **простором елементарних наслідків** цього випробування. Це *найменша множина наслідків, кожний з яких дає найповнішу інформацію про очікувані результати даного випробування*. Іншими словами елементарний наслідок випробування – це такий наслідок цього випробування, який тягне за собою будь-який інший або протилежний йому наслідок цього випробування. При цьому кажуть, що подія A тягне за собою подію B або A сприяє B, якщо з того, що відбувається, подія A випливає, то подія B також відбувається. А протилежною подією до події A називають таку подію, що відбувається лише тоді, коли $\bar{A}$ не відбувається.

У теорії прийняття рішень, як і в теорії ймовірностей, не розглядається технічна сторона випробування, а лише те, які події в ньому можуть спостерігатися і що внаслідок виконаного випробування дійсно спостерігалось. Таким чином, з кожним експериментом пов'язують деяку множину подій, про які можна робити висновки, здійснилась вона в даному експерименті чи ні. Такі події називають, як і наслідки дії (експерименту), також **подіями, що спостерігаються** при (у) даній дії (випробуванні). Тоді, якщо маємо довільну подію, що спостерігаємо при (у) даній дії (випробуванні), то її **інтерпретацією** в множині елементарних подій цієї дії (випробування) називається підмножина всіх елементарних подій, які сприяють події, що розглядається. У теоретико –множинній моделі теорії прийняття рішень (теорії ймовірностей) події цієї дії (випробування), що спостерігаються **ототожнюються** з їхніми інтерпретаціями в множині його елементарних подій. Отже, подія, що спостерігається, або наслідок дії (випробування) – це підмножина множини наслідків (елементарних наслідків) цієї дії (випробування), які їй (події) сприяють.

Вважатимемо, що будь-яка непорожня сукупність випробувань **задає** ситуацію. Сукупності випробувань, які задають ситуацію, відповідають множині дій, яку будемо назвати **множиною рішень (в) цій ситуації**.

В основі теоретико – множинного методу викладу теорії прийняття рішень лежить припущення, що певній ситуації поставлено у відповідність деяку множину подій, а саме наслідків випробувань, що задають цю ситуацію, яка називається **множиною наслідків** цієї ситуації і що є найменшою множиною подій, кожна з яких дає найповнішу інформацію про очікувані результати випробувань, що задають ситуацію. Іншими словами, наслідок ситуації – це такий наслідок випробування, з тих, що задають цю ситуацію, який тягне за собою будь-який інший чи протилежний йому наслідок будь-якого випробування з множини тих, що задають ситуацію.

Таким чином, ситуація, що задається деякою множиною випробувань, представляє собою певний механізм, що ставить у відповідність будь-якому елементу множини рішень цієї ситуації якийсь елемент з множини наслідків цієї ситуації.

Для констатації того факту, що дослідник не може (у разі складності цього механізму) або не хоче отримати точний його опис, тобто модель, використовується поняття «випадковості» у повсякденному сенсі.

Вживаючи слово «модель» ми матимемо на увазі деякий опис, що відображає всі особливості досліджуваного механізму, тобто всі особливості явища, які цікавлять дослідника. Таке розуміння моделі явища повністю узгоджується з трактуванням М. М. Моісеєва поняття моделі процесу в системному аналізі: «Вживаючи слова “модель”, “модельний опис”, ми будемо мати на увазі деякий опис, що відображає саме ті особливості досліджуваного процесу, які цікавлять дослідника. Точність, якість такого опису визначаються насамперед відповідністю моделі вимогам щодо дослідження, відповідністю одержуваних за допомогою моделі результатів, що спостерігається течією процесу» [38, с. 137].

Як відомо з теорії ймовірностей, випадковим називається випробування, результат якого не можна передбачити заздалегідь. А те, що ми не можемо отримати точний опис аналізованого механізму означає лише те, що нам не вистачає (можливо, поки що) доступних засобів для цього. Однак це не зупиняє дослідника на шляху пізнання вказаного механізму, і він переходить від його аналізу як одиничного явища, модель якого представляла детермінований закон, до аналізу результатів його багаторазової реалізації, що привело до недетермінованих стохастичних моделей. Це підтверджують слова М. Лоєва: «Наука, по суті, має справу з закономірностями в повторюваних випробуваннях. Протягом довгого часу *Homo sapiens* вивчала лише *детерміновані випробування*, в яких умови (причини) повністю визначають результати (наслідки). В азартних іграх вже давно спостерігався інший тип закономірності, але лише в недавній час *Homo sapiens* була наведена на думку про раціональну інтерпретацію явищ природи з точки зору таких закономірностей: природа грає в найбільшу з усіх азартних ігор зі спостерігачем» [23, с. 13]. Цей тип закономірності, названий стохастичною випадковістю, властивий випробуванню і виявляється під час переходу від його одиничного аналізу до аналізу нескінченного числа повторюваних для нього випробувань. Визначається це й тим, що частота результату у відповідних повторних випробуваннях має границю, коли число останніх необмежено зростає. Однак природа не тільки «грає», а й спричиняє виникнення поняття випадковості, що використовується в повсякденному житті, і яке суттєво ширше ніж те, яке вивчається в теорії ймовірностей. Щоб розібратися у цьому підході, зупинимося докладніше на понятті масових явищ без припущення їх стохастичності.

Поняттю «масовий» дуже близькі поняття «випадковий» (у повсякденному, а не ймовірнісному сенсі) і «статистичний». Як відомо, поняття випадковості, яким користуються у повсякденному житті, істотно ширше ніж те, яке вивчається в теорії ймовірностей. Наприклад, в О. М. Колмогорова про це сказано: «Кажучи про випадковості в повсякденному сенсі цього слова, ми маємо на увазі ті явища, в яких не виявляємо закономірностей, що дає змогу нам передбачати їх поведінку. Взагалі кажучи, немає причин припускати, що випадкові в цьому сенсі явища підкоряються якимось імовірнісним законам. Отже, потрібно відрізняти випадковість у широкому сенсі і стохастичну випадковість (яка є предметом теорії ймовірностей) [18]. Однак, що означають слова «не знаходимо закономірностей, які дають можливість передбачати поведінку»? Навряд чи їх слід розуміти так як їх взагалі не існує. Значить, одне з двох: або шукану закономірність неможливо виявити, користуючись фіксованими засобами, або вона з якоїсь причини не цікава для нас» [15, с. 42].

Перша точка зору була запропонована А. Чорчем [47] і потім вивчалася в працях цілого ряду авторів (див. список літератури). Інша була запропонована В. І. Іваненком та В. А. Лабковским і призвела до поняття випадкових у широкому сенсі явищ, що підпорядковані статистичним закономірностям. Далі цьому поняттю буде дане точне визначення, але його суть полягає в тому, що аналізуючи механізм, який представляє ситуацію, з тих чи інших причин ми можемо обмежитися грубим описом цього механізму, так званою статистичною закономірністю, що не деталізоване, а характеризує явище «в цілому», тобто орієнтуючись на деякі усереднені, отримані в результаті повторних випробувань, характеристики, а значить, розглядаючи даний механізм з позицій масового явища, тобто при переході до нескінченного числа «випробувань». Саме так відбувається в процесі пізнання світу під час ймовірнісної інтерпретації випадковості випробування, але з додатковою при цьому вимогою стійкості частоти результату, якої в інтерпретації випадковості випробування в теорії прийняття рішення немає. Задача опису «масових», але не стохастичних явищ, також почала вивчатися недавно [13; 14; 21]. Хоча той факт, що поняття випадковості, вживане у повсякденному житті, істотно ширше, ніж поняття стохастичності, досліджуване теорією ймовірностей загальновідомий (див., наприклад, [18], однак, зусилля дослідників у цій галузі концентрувалися, починаючи з праці [49], у галузі відшукування умов, що гарантують стохастичність даного явища. Відмова від стійкості частоти результату під час повторних випробувань приводить до поняття статистичної закономірності. Таким чином отримуємо значення поняття випадковості в широкому сенсі. «Випадковими в широкому сенсі називаються масові явища, в яких ми цікавимося тільки їх статистичними закономірностями», – таке евристичне визначення випадковості в широкому сенсі зазначено в [15]. Це викликає необхідність розробки математичного апарату опису повторних випробувань без припущення стохастичності випробування, що їх визначає. Зазначений математичний апарат розроблено у працях В. І. Іваненка і В. А. Лабковського [13–15; 20], а також у дослідженнях [33–35].

Випадковий (у повсякденному сенсі) елемент у теорії прийняття рішень є аналогом випадкового елемента в теорії ймовірностей [19]. Відмінність лише в галузі визначення випадкового елементу: в теорії ймовірностей – це множина елементарних наслідків ймовірнісного простору, а в теорії прийняття рішень – це множина наслідків ситуації, випадкових у «повсякденному сенсі».

Таким чином, під **заданою ситуацією** ми розуміємо *довільну непорожню множину випадкових (в повсякденному сенсі) елементів*.

Ситуацію можна задавати вербально, використовуючи при цьому реальні дії або використовуючи абстрактні форми задання ситуації, найгрубішими з яких є схеми ситуації, які строго вводяться нижче. Зрозуміло, що описуючи ситуацію, ми вже задаємо певну закономірність, властиву «механізму випадковості» результатів кожної дії з множини рішень цієї ситуації.

Нарешті, ми твердитимемо, що ТПР перебуває у **визначеній** (без невизначеності) **ситуації**, розуміючи під цим опис цієї ситуації, що дає змогу ТПР математично коректно, тобто однозначно, розв'язати задачу знаходження відношень переваг на множинах наслідків і рішень цієї ситуації – основну задачу рішення для заданої системи прийняття рішень.

Повернемося до предмета теорії прийняття рішень – системи прийняття рішення. **Мета** ТПР – обрати найкращу (оптимальну) з його точки зору дію в ситуації, в якій він перебуває, інакше здійснити процедуру прийняття рішення або визначити своє рішення в цій ситуації. Допомогти ТПР в досягненні цієї мети може задача теорії прийняття рішень. При цьому «нас особливо турбують ситуації, в яких наслідки будь-яких дій, які ми можемо зробити, невідомі достеменно через те, що вони залежать ще й від деяких подій, які ми не можемо контролювати або передбачити, а їх результати неминуче позначаться на результаті наших дій», а також, однак, «індивідум, який зіткнувся з проблемою вибору в умовах невизначеності, повинен вийти з цього положення, обравши дію, що найліпше відповідає його індивідуальним оцінками і перевагам» [40, с. 8–9].

Проте «нескладно зрозуміти, що звести такі задачі з невизначеностями до точно поставлених математичних задач не можна в принципі, для цього потрібно тим чи іншим чином «зняти» невизначеність, тобто ввести які-небудь гіпотези. Але формування гіпотез – це вже прерогатива змістовного аналізу, це формалізація неформальних ситуацій» [39, с. 9].

На шляху формалізації поняття ситуації природним чином постає поняття схеми цієї ситуації. Під **схемою ситуації задачі рішення** (ССЗР) розумітимемо відповідність (багатозначне відображення) $\hat{Z} := (X, U, R)$, де X – довільна множина елементів множини наслідків цієї ситуації, названа **множиною наслідків ССЗР**, U – довільна множина елементів множини рішень цієї ситуації, названа **множиною рішень ССЗР**, а R – графік цієї відповідності. ССЗР такого виду ми будемо називати лотерейною формою ССЗР, розглядаючи поряд з нею (якщо відомо множину значень невідомого параметра) так звану матричну форму схеми цієї ситуації. Ситуацію, для якої відомо множину значень невідомого параметра, будемо називати параметричною, а звідси – матричну форму ССЗР природно називати також параметричною ССЗР. Тоді в параметричній ситуації з лотерейною формою її схеми $\hat{Z} := (X, U, R)$ під параметричною ССЗР ми будемо розуміти відображення $g : \Theta \times U \to X$, яке представлятимемо як четвірку $\hat{Z} := (X, \Theta, U, g)$, де Θ – довільна множина значень невідомого параметра, названа **множиною значень невідомого параметра ССЗР**, а g – будь-яке, для якого $\bigcup_{u \in U} (u, g(\Theta, u)) = R$.

Важливість поняття ССЗР обумовлена тим, що ССЗР обов'язкова складова **моделі ситуації для ТПР-а**, що перебуває у цій ситуації. А моделюючи ситуацію, ТПР визначає її.

Використовуючи введені позначення, можемо визначити такі класи ССЗР:

– клас всіх ССЗР, що позначається $\hat{\mathbb{Z}}$, тобто $\hat{\mathbb{Z}} := \{\hat{Z} : \hat{Z}$ – будь-яка ССЗР$\} =: \{(\cdot,\cdot,\cdot)\}$;

– клас всіх параметричних ССЗР, що позначається $\hat{\mathbb{Z}}$, тобто $\hat{\mathbb{Z}} := \{Z : Z$ – *будь-яка параметрична ССЗР*$\} =: \{(\cdot,\cdot,\cdot)\}$;

– клас всіх ССЗР з вирішеною першою основною ЗР, що позначається $\boldsymbol{\hat{Z}}$, тобто $\boldsymbol{\hat{Z}} := \{\hat{Z} := ((X, \mu), U, R) : (X, U, R) \in \hat{\mathbb{Z}}$, $(\succcurlyeq)$ – будь-яке відношення переваг на $X\} := \{((\cdot,\cdot),\cdot,\cdot)\}$;

– клас всіх параметричних ССЗР з вирішеною першою основною ЗР, позначуваний $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{Z} := \{Z := ((X, \succcurlyeq), \Theta, U, g) : (X, \Theta, U, g) \in \mathbb{Z}$, $(\succcurlyeq)$ тобто – будь-яке відношення переваг на $X\} =: \{((\cdot,\cdot),\cdot,\cdot,\cdot)\}$;

– клас всіх ССЗР зі заданою множиною наслідків X, що позначається $\mathbb{Z}(X)$, тобто $\hat{\mathbb{Z}} := = \{\hat{Z} := (X, U, R) : \hat{Z} \in \hat{\mathbb{Z}}$, X – *задано*$\} =: \{(X,\cdot,\cdot)\}$;

– клас всіх параметричних ССЗР із заданою множиною наслідків X, що позначається $Z(X)$, тобто $\mathbb{Z}(X) := \{Z := (X, \Theta, U, g) : Z \in \mathbb{Z}$, X – *задано*$\} =: \{(X,\cdot,\cdot,\cdot)\}$;

Аналогічно визначаються і позначаються такі класи ССЗР: $\mathbb{Z}(X, \Theta) := \{(X, \Theta,\cdot,\cdot)\}$, $\boldsymbol{\hat{Z}}((X, \succcurlyeq)) := \{((X, \succcurlyeq),\cdot,\cdot)\}$, $\boldsymbol{Z}((X, \succcurlyeq)) := \{((X, \succcurlyeq),\cdot,\cdot,\cdot)\}$, $\boldsymbol{Z}((X, \succcurlyeq), \Theta) := \{((X, \succcurlyeq), \Theta,\cdot,\cdot)\}$.

Розглядаючи параметричну ССЗР, якщо про невідомий параметр θ нічого невідомо, то рішення порівнюють, як правило, за максимальними втратами (мінімаксний критерій), якщо θ випадковий з заданим розподілом, то зазвичай віддають перевагу рішенню, що призводить до менших середніх втрат (байєсівський критерій) і т. д. Проте чим продиктований саме такий вибір критерія? Чи можна стверджувати, що як тільки ССЗР фіксована, вибір критерію тим самим вже визначений?

Як відомо із , у загальному випадку це не так, отже, у виборі критерія беруть участь ще якісь міркування, природа яких поки не зовсім зрозуміла. Необхідність же ясності в цьому питанні очевидна, оскільки свавілля у виборі критерія є, по суті, свавіллям у виборі рішення, яке в результаті виявляється слабо пов'язаним з прийнятою математичною моделлю.

Скажімо, при ССЗР $Z = ((\boldsymbol{R}, \leq), \Theta, U, g) \in \boldsymbol{Z}((\boldsymbol{R}, \leq), \Theta)$ параметр θ випадковий із заданим стохастичним розподілом p. У цьому випадку невизначеність вибору критерію зазвичай називають байєсівською [11; 15; 36]. Байєсівську невизначеність інтенсивно вивчали у 1950–1970 роках, зокрема, в задачах багатокрокових рішень й управління [37; 43; 44]. При цьому *прийнято* обирати u з розрахунку мінімізації середніх втрат

$$\int_{\Theta} g(\theta, u)\, p(d\theta) \to \inf_{u \in U}.$$

Якщо про θ нічого не відомо, то невизначеність вибору критерію називають повною [15]. У такому випадку *прийнято* мінімізувати максимальні втрати

$$\sup_{\theta \in \Theta} g(\theta, u) \to \inf_{u \in U}.$$

Зрозуміло, що обидві ці невизначеності в якомусь сенсі полюсні, однак у практичних ситуаціях рідко буває точно відомий розподіл, а ще рідше – зовсім нічого невідомо.

Дещо гнучкішою є «гібридна» конструкція. Відомо, що параметр θ випадковий з якимось невідомим розподілом із заданого класу $\mathcal{P}$ стохастичних розподілів на Θ. Таку невизначеності називають стохастичною [15]. У цьому випадку задачу формулюють так

$$\sup_{p \in \mathrm{P}} \int_{\Theta} g(\theta, u) p(d\theta) \to \inf_{u \in U}.$$

Очевидно, якщо множина $\mathcal{P}$ складається з одного елемента, то стохастична невизначеність перетворюється на байєсівську, а якщо $\mathcal{P}$ складається з різноманітних розподілів на Θ, то вона перетворюється на повну, проте тільки щодо вибору розподілу. Справа в тому, що стохастичний розподіл параметра θ означає, щонайменше, те, що частоти потрапляння його значень у всі підмножини, цікаві для нас, прямують до певних меж. Чи можна уявити собі експеримент, який показує, що якась частота прямує до своєї межі, але не показує до якої саме?

Виявляється, що можна, коли відома фіксована множина «випадкових механізмів», один і тільки один з яких буде реально використовуватись для вироблення значень цього параметра. Наприклад, відомо, що буде кидатися якась монета або гральна кістка – можливо, несиметрична. Зрозуміло, що в такому випадку очевидна зміна позначень справді призводить до повної невизначеності стосовно «випадкового механізму».

Більш реалістична ситуація, коли не відомий не лише сам розподіл, а й взагалі неможливо описати поведінку параметра θ за допомогою стохастичного розподілу. Однак і тут говорити, що ми маємо справу з повною невизначеністю, також було б не завжди правильно. Бо, називаючи якусь невизначеність повною, ми тим самим не виключаємо ніякий можливий вид поведінки невідомого параметра. Зокрема, не виключається і те, що він вибирається свідомим противником. Звідси і виникає бажання мінімізації максимальних втрат. Насправді ж, в більшості практичних ситуацій прийняття рішень ніякого свідомого супротивника не існує, і ми про це чудово знаємо. Виявилося, що невизначеність за відсутності свідомої протидії, названа «байдужою» невизначеністю [15], в широкому класі випадків може бути зведена до стохастичної. Однак не завжди, що і призвело до поняття статистичної закономірності. З іншого боку, це ж поняття з'являється і в аксіоматичному підході до проблеми прийняття рішень у «загальній задачі рішення» [15].

Підхід, спрямований на аналіз систем прийняття рішення задля отримання рекомендацій ТПР, що полегшують йому рішення ЗР, полягає в моделюванні ТПР щодо розв'язання ним ЗР у певному класі ситуацій сукупністю аксіом прийняття рішення, з якими згоден цей ТПР і які дають йому змогу звести ЗР до математично коректно поставленої задачі. Наступна задача теорії прийняття рішень полягає в розробці методів розв'язання отриманої математичної задачі, проте це не належить до кола питань, пов'язаних з проблемою невизначеності в задачах прийняття рішень так як ми її представили.

Очевидно, для більшості ТПР схеми ситуації не досить для розв'язання ними основної ЗР [26], а значить під час моделювання ними ситуації, крім ССЗР, необхідна додаткова інформація.

Таким чином, ми доходимо до визначення моделі ситуації для ТПР в описі цієї ситуації, до якої, про що зазначили, обов'язково повинна належати її ССЗР і, можливо, певна додаткова характеристика цієї ситуації, яку, йдучи за , будемо називати інформативною частиною цієї моделі, і яка дає змогу вказаному ТПР дати єдине можливе для нього (тобто таке, що не суперечить його правилами вибору) рішення основної ЗР. Іншими словами, модель ситуації для ТПР визначає (у розумінні відсутності невизначеності) для останнього цю ситуацію.

Щоб задати клас ТПР із «раціональними» правилами рішення основної ЗР, нам знадобитися поняття правила вибору переваг (ПВП) у класі ССЗР $\mathbb{Z}' \subseteq \mathbb{Z}(\boldsymbol{Z}' \subseteq \boldsymbol{Z})$, що є відображенням, яке ставить у відповідність кожній ССЗР класу $\mathbb{Z}(Z')$ деяке відношення переваг на її множині наслідків і деяке відношення переваг на її множині рішень. По суті, ПВП у деякому класі ССЗР втілює рішення основної ЗР для цього класу ССЗР, тобто ПВП в класі ССЗР $\mathbb{Z}' \subseteq \mathbb{Z}(\boldsymbol{Z}' \subseteq \boldsymbol{Z})$ (скорочено ПВП для $\mathbb{Z}(\boldsymbol{Z}')$) можна інтерпретувати як модель ТПР, розглянутого лише з точки зору його розв'язків основної ЗР у ситуаціях зі схемами, що не збігаються. Повна сукупність їх утворює клас $\mathbb{Z}(\boldsymbol{Z}')$ як модель цього ТПР щодо цього класу ситуацій.

Для будь-якого ТПР, що відповідає цим правилам і перебуває у будь-якій із ситуацій зазначеного класу, критерієм можливості отримання рішення основної ЗР, тобто визначення ним цієї ситуації, є можливість моделювання ним цієї ситуації. Сукупність моделей всіх ситуацій розглянутого класу цього ТПР визначає його ПВП у цьому класі ситуацій.

Таким чином, у вказаному підході до проблеми невизначеності в задачах прийняття рішень задачею дослідника є задання такої системи АПР, що ПВП, які їм задовольняють, визначають широкий клас ТПР, інакше кажучи – моделювання широкого класу ТПР щодо розв'язання ними ЗР.

Як було зазначено, зв'язок ТПР – ситуація представляє собою систему прийняття рішень. Взаємозв'язок ТПР і ситуації обумовлений тим, що *мета* ТПР – вплинути на ситуацію за допомогою конкретної дії u. Лише після цього можна спостерігати результат ТПР впливу як наслідок x. Своєю чергою, ситуація впливає на ТПР завдяки тому, що обумовлює його *конкретну* дію. Параметр ситуації, який визначає цей вплив, будемо називати неспостережуваним параметром і позначати θ. Наголосимо, що точне значення параметра θ, взагалі кажучи, ТПР невідоме (в інакшому випадку, задача вибору дії ТПР зводиться до оптимізаційної задачі), проте, ТПР, перебуваючи в цій ситуації, збирає, в міру своїх можливостей, інформацію про неспостережуваний параметр і використовує її під час вибору своїх дій. Таким чином, ситуацію можна розглядати як детермінований, але невідомий, ТПР механізм формування значення параметра θ і недетермінований, але відомий ТПР механізм формування наслідку x, залежно від дії ТПР і значення параметра θ. Водночас, ТПР можна розглядати як недетермінований механізм формування дії u, залежно від значення параметра θ (наприклад, він може використовувати, у певних значеннях параметра θ, рулетку, формуючи так зване рандомізоване рішення).

Аналізуючи систему прийняття рішень («досліджуючи операцію» прийняття рішення в термінології дослідження операцій), дослідник огрублює її так:

1. Формує непорожню множину U можливих, на його думку, дій аналізованого ТПР аналізованої ситуації.

2. Формує непорожню множину X несумісних наслідків дій із множини U, можливих, на його думку, в аналізованій ситуації.

3. Вважає невідомий йому механізм виникнення наслідків обраної дії $u \in U$ в аналізованій ситуації «випадковим в звичайному сенсі», тобто «явища, в якому ми не виявляємо закономірностей, що дають нам змогу передбачати їх поведінку» [18]. Цей механізм ми називаємо СЗР.

4. Розглядає аналізованого ним ТПР з точки зору визначення останнім відношення переваг на множині наслідків X і множині дій U (перша і друга головні ЗР). Такого ТПР будемо називати ТПР щодо СЗР, або ПВП для цієї СЗР.

Огрублену систему прийняття рішення ми коротко називатимемо системою ЗР. Таким чином, виділяється частина системи прийняття рішень. Ситуація замінюється на СЗР, а ТПР – на ПВП. Надалі під завданням ТПР і ситуації в системі прийняття рішень розумітимемо, відповідно, ПВП і СЗР.

Якщо ЗР зводиться до математично коректної постановки задачі, інакше кажучи без невизначеності рішення, то виділена частина системи прийняття рішення ставитиме **моделлю системи прийняття рішення** («модель операції» за [38]). Побудова моделі системи прийняття рішення є *метою дослідника* цієї системи.

Перш ніж перейти до уточнення понять ПВП та СЗР, зважаючи на різнобіжності у дослідженнях, уточнимо деякі терміни та визначення, що будуть вживатися надалі.

Означення 1. *Для множин A і B підмножина R добутку $A \times B$ визначає* ***відповідність (бінарне відношення)*** *з областю відправлення A, областю прибуття B і графіком R або, коротко, відповідність R з A в B, що позначається (R, A, B).*

В контексті заданих множин A і B відповідність, (R, A, B) $R \subseteq A \times B$ часто позначають просто R, а також кажуть, що елементові a відповідає елемент b або що a відповідає R з b, якщо $(a, b) \in R$. Останню умову також часо записують як aRb, або $R(a) = b$. Якщо відповідності R з A в B присвоюється для стислості ім'я, наприклад, φ, то його графік будемо позначати Γ_φ.

При $B = A$ відповідність R у визначенні (1.1.1) будемо коротко називати відповідністю на множині A.

Означення 2. *Для відповідності* (R, A, B) *множини* $domR:= \{a{\in}A{:}\exists b{\in}B,\ (a, b){\in}R\}$, $imR:= \{b{\in}B{:}\exists a{\in}A,\ (a, b){\in}R\}$ *називається відповідно* ***областю визначення*** *R і* ***областю значень*** *або* ***образом*** *R.*

Якщо R – відповідність з A в B, то

$$R^{-1}:= \{(b, a){\in}B{\times}A{:}(a, b){\in}R\}; \tag{1}$$

– відповідність з B в A і називається **оберненою** до R,

$$\overline{R} := A \times B \setminus R; \tag{2}$$

– відповідність з A в B і називається **не** R.

Ясно, що R обернене до R^{-1} і не $\overline{R}$, тобто $R = (R^{-1})^{-1} = \overline{\overline{R}}$.

Означення 3. *Відповідність* (R, A, B) *називається* ***однозначною відповідністю****, якщо для кожного $a \in A$ з умови $(a, b_1) \in R$ і $(a, b_2) \in R$ випливає, що $b_1 = b_2$. В іншому випадку R –* ***багатозначна відповідність****.*

Зокрема, якщо $A' \subseteq A$ і $\Delta_{A'}:= \{(a, a){\in}A^2{:}\ a{\in}A'\}$, то $\Delta_{A'}$ – однозначна відповідність, яка називається **тотожним відношенням** на A'.

Означення 4. *Відповідність* (R, A, B) *називається* ***взаємно-однозначною*** *або* ***ін'єктивною****, якщо відповідності R і R^{-1} однозначні.*

Нехай (R, A, B) – відповідність і $A' \subseteq A$. Відповідність $(R \cap (A'{\times}B) \subseteq A'{\times}B)$ називають **звуженням** R на A' або **слідом** R на A' і позначають $R|_{A'}$. Своєю чергою відповідність R називають **продовженням (розширенням)** $R|_{A'}$ на A.

Множину $R(A') := imR|_{A'}$ називають **образом** множини A' у відношенні R.

Для елементів $a \in A$ і $b \in B$ пишуть скорочено $R(a)(R(a)=b)$, маючи на увазі вираз $R(\{a\})\times (R(\{a\}=\{b\})$.

Означення 5. *Відношення $R \subseteq A \times B$ називають* ***відображенням*** *(однозначним) множини A в множину B, якщо R – однозначне (функціональність відношення) і domR = A. Якщо R – багатозначна і domR = A, то таку відповідність називають багатозначним відображенням.*

Відображення (R, A, B) позначають символом $R: A\to B$.

Ін'єктивна відповідність, що є відображенням, називається **однозначним відображенням** (обернена відповідність до відображення не обов'язково є відображенням) або **ін'єкцією**.

Означення 6. *Відображення $R: A\to B$ називається відображенням A* ***на*** *B або* ***сюр'єкцією****, якщо imR = B.*

Ін'єктивне відображення A на B (ін'єктивна сюр'єкція) називається **взаємно-однозначним відображенням** або **біекцією**.

Замість відображень іноді кажуть про сімейства (параметричних) елементів. Точніше відображення $R: A\to B$, за бажання, називають **сімейством** елементів B і позначають просто $(B_a)_{a\in A}$ або $a\to b_a(a\in A)$.

Допускаючи загальність, ми не будемо розрізняти сімейство і його область значень.

Означення 7. *Якщо $(X_\omega)_{\omega\in\Omega}$ – сімейство мно жин, де $\Omega \neq \varnothing$, то їх* ***добутком****, що позначається $\prod_{\omega\in\Omega} X_\omega$, називається сукупність відображень $x:\Omega \to \bigcup_{\omega\in\Omega} X_\omega$, для яких $x_\omega := x(\omega)\in X_\omega$ для кожного $\omega \in \Omega$.*

У випадку, коли $X_\omega = X$ для будь-якого $\omega \in \Omega$, використовують позначення $X^\Omega := \prod_{\omega\in\Omega} X_\omega$. Якщо, до того ж, $\Omega := \{1,2,\ldots,n\}$, $n\in N$, то вважають $X^n := \prod_{\omega\in\Omega} X_\omega$.

Означення 8. *Для $R \subseteq A \times B$ и $Q \subseteq C \times D$ множину $Q\circ R := \{(a,d)\in A\times D : \exists b\ (a,b)\in R, (b,d)\in Q\}$ називають* ***суперпозицією*** *відповідностей Q і R. При цьому $Q\circ R$ розглядають як відповідність з A в D. А множину $R \times Q$ називають* ***добутком*** *відповідностей R і Q. Тоді $R \times Q$ розглядають як відповідність з $A \times C$ в $B \times D$. У разі відображень φ і ψ добуток φ на ψ будемо позначати (φ,ψ).*

Означення 9. ***Відношення строгої переваги*** *на множині À будемо називати будь-яку асиметричну відповідність R в множині A, тобто $R^{-1}\subseteq \overline{R}$ і позначати $(A,\succ)$.*

Означення 10. ***Відношення переваг*** *(нестроге) на множині A будемо називати будь-яку рефлексивну відповідність R в множині A, тобто $I_A \subseteq R$, і позначати (A,μ). Симетричну й асиметричну частини (μ) будемо позначати, як звичай, $(:)$ і $(\succ)$, відповідно. При цьому, записуючи співвідношення $a\mu b$ для довільних $a,b\in A$, говоритимемо, що a нестрого краще ніж b або, коротко, a переважає b. Записуючи співвідношення $a\succ b$, говоритимемо, що a строго краще ніж b, а для співвідношення $a{:}b$, що байдуже a або b (a толерантне b). Крім того $(\preccurlyeq)((\prec)$ позначає $(\succcurlyeq)^{-1}((\succ)^{-1})$. Тоді $(\sim)=(\succcurlyeq)\cap(\succcurlyeq)^{-1}$, а $(\succ)=(\succcurlyeq)\setminus(\succcurlyeq)^{-1} = (\succcurlyeq)\setminus(\sim)$.*

Часто додатковою властивістю відношення переваги вважають транзитивність, тим самим замість відношення переваг використовують квазіпорядок [19]. Умова зв'язності призводить до нестрогого порядку (тобто зв'язного квазіпорядку, що еквівалентно зв'язному передпорядку [2].

Означення 11. *Для довільних непорожніх множин A,Θ і відношення переваг $(A, \succcurlyeq)$ відображення $f_1, f_2 \in A^\Theta$ називаються* ***комонотонними*** *щодо $(\succcurlyeq)$, якщо ні для яких $\theta_1,\theta_2\in\Theta$ не виконується $f_1(\theta_1)\succ f_1(\theta_2)$ і $f_2(\theta_2)\succ f_2(\theta_1)$, як зазвичайно, то позначає асиметричну частину $(\succcurlyeq)$.*

Зрозуміло, що коли A є множиною дійсних чисел, яку скрізь будемо позначати $\mathbb{R}$, тобто за умови $A=\mathbb{R}$ з порядком зростання чи спадання, тобто $(\mathbb{R},\leq)$ або $(\mathbb{R},\geq)$, то відображення $f_1, f_2\in\mathbb{R}^\Theta$ будуть комонотонними щодо цього порядку тоді і тільки тоді, коли

$$(F_1(\theta_1)-f_1(\theta_2))(f_2(\theta_1)-f_2(\theta_2))\geq 0$$
$$\text{для } всіх\ \theta_1,\theta_2\in\Theta.$$

Означення 12. Вважатимемо, *що відображення ω на багатьох A у множину B* ***зберігає відношення переваг*** *$(A, \succcurlyeq^*)$, $(B, \succcurlyeq)$, якщо для будь-яких $a', a''\in A$ відбувається*

$$a'\succcurlyeq^* a'' \Leftrightarrow \omega(a')\succcurlyeq\omega(a'')\ \ (a'\succcurlyeq^* a'' \Leftrightarrow \omega(a'')\succcurlyeq\omega(a')).$$

Означення 13. *Відображення множини A в множину R^n, $n \in N$, називається дійсною* ***функцією*** *заданою на множині A. При n = 1 функцію називають дійсною.*

Далі матимемо справу лише з дійсними функціями, часто називаючи їх функціями корисності (шкідливості або ранжування), якщо $\mathbb{R}$ впорядковано за зростанням, тобто $(\mathbb{R},\leq)$ (за спаданням, тобто $(\mathbb{R},\geq)$.

Означення 14. *Дійсна функція ω на множині A називається* ***функцією корисності (шкідливості або ранжування) відносно*** *$(A, \succcurlyeq)$, якщо вона зберігає (обертає) [41]відношення $(A, \succcurlyeq)$, тобто для будь-яких $a,b\in A$ відбувається*

$$a\succcurlyeq b \Leftrightarrow \omega(a)\geq\omega(b), \tag{3}$$

$$(a\succcurlyeq b \Leftrightarrow \omega(a)\leq\omega(b)). \tag{4}$$

Зрозуміло, що ω функція корисності відносно $(A, \succcurlyeq)$ тоді і тільки тоді, коли $(-\,\omega)$ є функцією шкідливості відносно $(A, \succcurlyeq)$.

Говоритимемо, що **функція корисності (шкідливості)** Ω на A **визначає** відношення переваги (A, $\succcurlyeq$), якщо виконується). Таку функцію корисності (шкідливості) надалі будемо коротко називати **«критерієм»** корисності (шкідливості) для (A, $\succcurlyeq$).

Означення 15. *Відображення* ω *на множині* U *в множині* X *називається* ***відображенням корисності (шкідливості)*** *відносно* (U, $\succcurlyeq^*$), (X, $\succcurlyeq$), *якщо воно зберігає (повертає) відношення переваги* (U, $\succcurlyeq^*$), (X, $\succcurlyeq$)*, тобто для будь-яких* u_1, $u_2 \in U$ *відбувається*

$$u_1 \succcurlyeq^* u_2 \Leftrightarrow \omega(u_1) \succcurlyeq \omega(u_2), \tag{5}$$

$$(u_1 \succcurlyeq^* u_2 \Leftrightarrow \omega(u_2) \succcurlyeq \omega(u_1)). \tag{6}$$

Вважатимемо, що відображення корисності (шкідливості) ω з U в множину X з відношенням переваги $(X,\succcurlyeq)$ **визначає** відношення переваги (U, $\succcurlyeq^*$), якщо виконується). Таке відображення корисності (шкідливості) ми будемо називати **«критерієм»** корисності (шкідливості) для (U, $\succcurlyeq^*$).

Надалі через $B_\Sigma(\Theta)$, або просто $B(\Theta)$ B у контексті з фіксованим Σ (фіксованими $\Theta^3\Sigma$), де Θ – довільна множина з заданою алгеброю підмножини Σ, позначимо множину всіх Σ-вимірних обмежених функцій на Θ. Зрозуміло, що $B_\Sigma(\Theta)$ є щільною в просторі $B(\Theta, \Sigma)$, всіх рівномірних границь скінченних лінійних комбінацій характеристичних функцій множин з Σ. Норма у $B(\Theta, \Sigma)$ визначається формулою $\| f \| = \sup_{\theta\in\Theta} | f(\theta) |$ [10, с. 261].

Означення 16. ***Статистичною закономірністю на*** Θ*, де* Θ *– довільна множина із заданою алгеброю підмножини* Σ *(якщо* Σ *не задається, то, за замовчуванням, вважається, що* $\Sigma = 2^\Theta$*) називається довільна непорожня замкнена множина* P *в топології* $\tau(\Theta)$ *простору*

$$PF(\Theta) := \{p \in ([0,1])^\Sigma : p(\Theta) = 1, \tag{7}$$

$$p(C \cup D) = p(C) + p(C \setminus D),\ \forall C, D \in \Sigma\}. \tag{8}$$

всіх адитивних імовірнісних мір на Θ, що є слідом *– слабкої топології в спряженому до банахового простору $B_\Sigma(\Theta)$ з нормою $\| f \| := \sup_{\theta\in\Theta} | f(\theta) |$. Іншими словами, для топології $\tau(\Theta)$ визначальною системою околів точки p в просторі $PF(\Theta)$ є множини виду

$$U_{\varepsilon, f_1, f_2, \ldots, f_n}(p) = \{p' \in PF(\Theta) : |\int_\Theta f_i p(d\theta) -$$

$$-\int_\Theta f_i p'(d\theta) | < \varepsilon \quad \forall i \in \overline{1,n}\},$$

для будь-яких $\varepsilon > 0$, $n \in N$, $f_1, f_2, \ldots, f_n \in B_\Sigma(\Theta)$.

Зауваження. Дане визначення узагальнює означення статистичної закономірності на Θ наведене в [15], коли $\Sigma = 2^\Theta$, тобто $f \in M(\Theta)$.

Сімейство всіх статистичних закономірностей на Θ будемо позначати $P(\Theta)$.

Зазначимо також, що в топології $\tau(\Theta)$ простір $PF(\Theta)$ компактний.

Означення 17. *Впорядковану трійку* (Θ, Σ, P)*, де* Θ *– довільна непорожня множина з заданою алгеброю підмножин* Σ*, а* P *– статистична закономірність на* Θ*, будемо називати* ***простором з розподілом.***

Під найгрубішою СЗР, коли про параметр θ, який ми не спостерігаємо, нічого не відомо, за винятком, можливо, множини його значень Θ, розумітимемо деякий клас розбиття множини всіх ССЗР, що визначаються нижче в лотерейній чи матричній формі. Оскільки в теорії прийняття рішень, природа як стохастичних експериментів, що визначають СЗР, так і їх наслідків нас не цікавить, то ССЗР, які належать одному класу цього розбиття, ми будемо називати **еквівалентними ССЗР** і позначати це відношення еквівалентності через $(\approx)$.

Перейдемо до уточнення поняття ССЗР.

Обов'язковою складовою ССЗР є множина можливих дій (рішень) U і множина елементарних подій X для аналізованої СЗР. При цьому множина X розглядається в парі з деякою фіксованою (довільною) алгеброю Ξ своїх підмножин. Алгебра Ξ буде або наявна в контексті, або, за замовчуванням, вважаємо $\Xi = 2^X$. Елементи алгебр 2^X і Ξ називатимемо, відповідно, **подіями (наслідками)** і **випадковими подіями** для множини наслідків X.

Означення 18. ***Лотерейною формою ССЗР*** *називається впорядкована трійка виду* (X, U, R), *де* R *є графіком відповідності з довільної непорожньої множини* U *в довільну непорожню множину* X*, для якої* $domR = U$ *і* $imR = X$.

При цьому X називається **множиною наслідків**, U – **множиною рішень,** R – **відповідністю ССЗР** (X, U, R).

Клас усіх впорядкованих трійок виду $\hat{Z}$:= (X, U, R) позначимо $\hat{\mathbb{Z}}$.

Означення 19. *ССЗР* (X', U', R')$\in\hat{\mathbb{Z}}$ *називається підсхемою ССЗР* (X, U, R)$\in\hat{\mathbb{Z}}$*, якщо* $X' \subseteq X, U' \subseteq U, R' = U' \times X' \cap R$.

Підсхему (X', U', R') ССЗР $\hat{Z}$:= (X, U, R)$\in \hat{\mathbb{Z}}$ будемо позначати $\hat{Z}|_{X',U'}$.

Означення 20. *ССЗР* (X, U, R)$\in \hat{\mathbb{Z}}$ *називається приведеною за рішеннями, якщо для будь-яких* u, $u'\in U$*, що не збігаються, справджується* $R(u) \neq R(u')$.

Означення 21. *Дві ССЗР* (X_1, U_1, R_1), (X_2, U_2, R_2)$\in\hat{\mathbb{Z}}$ *називаються ізоморфними, що позначатимемо* (X_1, U_1, R_1)$\simeq$(X_2, U_2, R_2), *якщо знайдуться такі бієкції* i: $X_1 \to X_2$, j: $U_1 \to U_2$*, що*

$$R_2 \circ j = i \circ R_1, \tag{9}$$

тобто $\forall u \in U_1, x \in X_1$ маємо $(u,x) \in R_1 \Leftrightarrow (j(u), i(x)) \in R_2$ або $x \in\in R_1(u) \Leftrightarrow x \in [i^{-1} \circ R_2 \circ j](u)$.

Як ми зазначали раніше, абстрактне поняття дії має відношення до того, які в нього наслідки, а не до його природи. Своєю чергою, абстрактне поняття елементарного наслідку стосується лише того, відбувається він чи ні, а не до його природи.

Тоді природно вважати, що ізоморфні ССЗР задають одну і ту саму найбільш грубу абстрактну СЗР або, згідно з зазначеним, еквівалентні, а також, що еквівалентні ССЗР в лотерейній формі ізоморфні.

Припущення 1. Дві ССЗР у лотерейній формі еквівалентні тоді і тільки тоді, коли вони ізоморфні.

У випадку параметричної ситуації непорожню множину значень невідомого параметра позначатимемо через Θ. При цьому множина Θ розглядається в парі з деякою фіксованою (довільною) алгеброю Σ своїх підмножин, елементи якої називатимемо **випадковими подіями** для множини значень невідомого параметра Θ. Коли алгебра Σ не задається, то за замовчуванням вважається, що $\Sigma = 2^{\Theta}$.

Далі, якщо вважати, що множина всіх можливих дій в аналізованій СЗР є підмножиною множини X^{Θ} всіх відображень з множини всіх значень невідомго параметра Θ в множину наслідків цієї СЗР *X*, тобто, що $U \in X^{\Theta}$, то дія визначається як відображення з Θ в *X*. Саме так вважають «у підході, який поширили Севідж то інші автори, замість того, щоб визначити стани (мається на увазі стани природи, тобто значення невідомого параметра як функції, що відображає дії в результати; маються на увазі наслідки» [41, с. 255]. В цьому випадку елемент *f* простору можливих дій X^{Θ} визначається як дія, що за будь-якого значення θ невідомого параметра простору Θ призводить до наслідку *f*(θ). А ССЗР можна представити як трійку (*X*, Θ, *U*), де $U \subseteq X^{\Theta}$.

У підході, який Фішберн протиставив підходу Севіджа, елемент φ простору невідомого параметра X^U визначається як значення, де будь-яка дія *u* простору можливих дій *U* спричиняє наслідок φ(*u*). А ССЗР можна представити як трійку (*X*, Θ, *U*), де $\Theta \subseteq X^U$.

Означення 22. ***Матричною формою ССЗР*** *називається впорядкована четвірка вигляду* (*X*, Θ, *U*, *g*), *де g – відображення з* $\Theta \times U$ *на X для довільних непорожніх множин X*, Θ, *U*.

При цьому множина *X* називається **множиною наслідків**, Θ – **множиною значень невідомого параметра**, *U* – **множиною рішень**, а *g* – **відображенням наслідків** ССЗР (*X*, Θ, *U*, *g*).

Умовно матричну форму ССЗР можна зобразити як графік Γ_g відображення *g*, з «проекцією на горизонтальну площину» графіка, що збігається з множиною $\Theta \times U$.

А. В. Скороход зазначив у передмові до монографії В. І. Іваненка і В. А. Лабковского, що «незважаючи на вдавану простоту описаної ситуації, вона може використовуватись у дуже широких межах: всі складнощі заховані в просторах *X*, Θ, *U* і функції *g*» [15].

Зокрема підхід, в якому «досить доречно назвати станами елементи множини всіх функцій, що відображають дії в наслідки», природно вкладається в матричну форму ССЗР. У цьому випадку трійку (*X*, Θ, *U*), де $\Theta \subseteq X^U$ можна представити ССЗР в матричній формі як (*X*, Θ, *U*, *g*), де для будь-яких $u \in U, g(\theta, u) := \theta(u)$.

Аналогічно, підхід, в якому дія визначається як елементи множини всіх відображень простору невідомого параметра в множину елементарних наслідків, вкладається в матричну форму ССЗР. У цьому випадку трійку (*X*, Θ, *U*), де $U \subseteq X^{\Theta}$ можна представити ССЗР у матричній формі виду (*X*, Θ, *U*, *g*), де для будь-яких $\theta \in \Theta, g(\theta, u) := u(\theta)$.

ССЗР у матричній формі задає СЗР із так званою «дурною невизначеністю» [3], що означає в цьому випадку повну невизначеність щодо механізму випадковості, якому підпорядковується значення невідомого параметра, тобто про параметр, який ми не спостерігаємо, не відомо нічого, крім множини його можливих значень. Аналізові ЗР у таких ситуаціях (ці ситуації часто називають «іграми з природою») присвячена теорія ігор і статистичних рішень, основна складність при цьому полягає в обґрунтуванні критерію, серед яких найвідоміші критерії Вальда, Севіджа, Гурвіца, Лапласа. Тим більше, що чинна методика обґрунтування цих критеріїв виходить за рамки суто математичних методів і, крім того, «не можна також забувати про те, що будь-яке рішення прийняте в умовах «дурної невизначеності» – неминуче погане рішення, і навряд чи варто обґрунтовувати його за допомогою тонких і кропітких розрахунків. Радше, слід подумати про те, звідки можна було б взяти відсутню інформацію. Тут всі засоби придатні – лише б прояснити ситуацію» [3]. Слід зауважити, що цей вид невизначеності почали вивчати раніше, ніж всі інші. Вже саме формулювання «принципу недостатнього обґрунтування» передбачає, що значення параметра «вибирає» Природа, а не розумний противник, – інакше було б дивно вважати, що його поведінку можна описати рівномірним розподілом. У цьому сенсі задачі математичної статистики також можна розглядати як «гру проти Природи». Взагалі до появи теорії ігор і спроб математичного опису соціальних явищ, математика не розглядала завдань боротьби з розумним противником, і отже, його відсутність не вимагала спеціальних застережень.

У теперішній час успіхи, досягнуті теорією ігор, викликають все частыше прагнення використовувати її результати у «грі проти Природи». Цьому присвячена велика кількість праць ([4; 6; 24; 46; 48; 49] та ін.) здебільшого аксіоматичного напрямку, в яких зроблено спроби, не відповідаючи на питання, як поводить себе Природа, описати набір умов, яким повинен задовольняти розумний вибір рішення в таких умовах.

Альтернативний підхід було описано в [8]. Там вказано: «зайве перестрахування», яке зазвичай пов'язують з використанням в «іграх проти Природи» принципу гарантованого результату, не випливає із самого принципу, а з'являється тільки через невміння враховувати в постановці задачі всю наявну інформацію. З цієї точки зору, справа полягає в тому, щоб вказати формальне обмеження на множину можливих реакцій Природи, що відображає її «байдужість». Перші спроби в цьому напрямку, наскільки нам відомо, було зроблено у дослідженні [13], надалі цей підхід розвивали у [20], [21].

Нехай $\mathbb{Z}$ – клас всіх впорядкованих четвірок виду $Z := (X, \Theta, U, g)$. Тоді $\mathbb{Z}(X, \Theta) := \{(X, \Theta, \cdot, \cdot) \in \mathbb{Z}\}$.

Через $\mathbb{Z}_F$ ($\mathbb{Z}_S$) позначимо клас всіх ССЗР у матричній формі, що представляють всі можливі трійки виду $Z_F := (X, \Theta, U)$, де $\Theta \subseteq X^U$ ($Z_S := (X, \Theta, U)$, де $U \subseteq X^\Theta$).

Означення 23. *ССЗР* $(X', \Theta', U', g') \in \mathbb{Z}$ *називається підсхемою ССЗР* $(X, \Theta, U, g) \in \mathbb{Z}$, *якщо* $X' \subseteq X, \Theta' \subseteq \Theta, U' \subseteq U$, *і* $g'(\theta, u) := g(\theta, u)$ *для будь-яких* $\theta \in \Theta', u \in U'$.

Підсхему (X', Θ', U', g') ССЗР $Z := (X, \Theta, U, g) \in \mathbb{Z}$ будемо позначати $Z|_{\Theta', U'}$.

Означення 24. *ССЗР* $(X, \Theta, U, g) \in \mathbb{Z}$ *називається приведеною, якщо для будь-яких* $\theta, \theta' \in \Theta$, $u, u' \in U$, *що не збігаються, має місце* $g(\theta, \cdot) \neq g(\theta', \cdot)$, $g(\cdot, u) \neq g(\cdot, u')$.

Означення 25. *Дві ССЗР* $(X_1, \Theta_1, U_1, g_1)$, $(X_2, \Theta_2, U_2, g_2) \in \mathbb{Z}$ *називаються ізоморфними, що будемо позначати* $(X_1, \Theta_1, U_1, g_1);(X_2, \Theta_2, U_2, g_2)$, *якщо існують такі бієкції* $i : X_1 \to X_2, j : U_1 \to U_2, k : \Theta_1 \to \Theta_2$, *що для будь-яких* $\theta \in \Theta_1$, $u \in U_1$, $g_2(k(\theta)\, j(u)) = i(g_1(\theta\,, u))$.

Розглядаючи ситуації на рівні схем, ми можемо обмежитися приведеними за невідомим параметром. Так само, як і в непараметричній формі природно вважати, що ізоморфні ССЗР в матричній формі еквівалентні.

Припущення 2. Дві ССЗР класу $\mathbb{Z}$ еквівалентні тоді і тільки тоді, коли вони ізоморфні.

Нарешті, для повного означення ССЗР, нам залишилось з'ясувати коли еквівалентні пари ССЗР, одна з яких в матричній формі, а інша в лотерейній.

Означення 26. ***Проекцією*** *ССЗР класу* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_F$, $\mathbb{Z}_S$ *називається таке відображення* $\hat{\Pi}\mathrm{p}: \mathbb{Z} \cup \mathbb{Z}_F \cup \mathbb{Z}_S \to \hat{\mathbb{Z}}$, *що для будь-якої ССЗР* $(X, \Theta, U, g) \in \mathbb{Z}$ $\hat{\Pi}\mathrm{p}((X, \Theta, U, g)) = (X, U, R) \in \hat{\mathbb{Z}}$, *де для будь-яких* $u \in U$

$$R(u) = X_u = g(\Theta, u). \tag{10}$$

Аналогічно визначаються проекції ССЗР класів $\mathbb{Z}_F$ і $\mathbb{Z}_S$. При цьому для будь-якої ССЗР $(X, \Theta, U) \in \mathbb{Z}_F$ $\hat{\Pi}\mathrm{p}((X, \Theta, U)) = (X, U, R) \in \hat{\mathbb{Z}}$, де $\forall u \in U$ $R(u) = X_u = \{\theta(u) : \theta \in \Theta\}$, а для будь-якої ССЗР $(X, \Theta, U) \in \mathbb{Z}_S$ $\hat{\Pi}\mathrm{p}((X, \Theta, U)) = (X, U, R) \in \hat{\mathbb{Z}}$, де $\forall u \in U$ $R(u) = X_u = u(\Theta)$.

Означення 27. *Операцією* ***розтягування*** *ССЗР класу* $\hat{\mathbb{Z}}$ *називається відповідність* Р *з* $\hat{\mathbb{Z}}$ *в* $\mathbb{Z}$, *що задовольняє умові: для будь-яких ССЗР* $(X, U, R) \in \hat{\mathbb{Z}}$, *ССЗР* $(X', \Theta, U', g) \in \mathbb{Z}$ $(X', \Theta, U', g) \in$ Р $((X, U, R))$ *тоді і тільки тоді, коли*

1) $X = X', U = U'$;

2) $\Theta \subseteq \prod_{u \in U} R(u)$;

3) для будь-яких $u \in U, \theta \in \Theta \mod 2cm \theta(u) = g(\theta, u)$;

4) для будь-яких $u \in U \mod 3cm R(u) = g(\Theta, u)$.

З цього означення випливає, що domР $= \hat{\mathbb{Z}}$.

Означення 28. ***Розтягуванням*** *ССЗР класу* $\hat{\mathbb{Z}}$ *називається будь-яке відображення* $\tau : \hat{\mathbb{Z}} \to \mathbb{Z}$, *що для будь-якої ССЗР* $(X, U, R) \in \hat{\mathbb{Z}}$ $\tau(X, U, R) \in$ Р $((X, U, R))$.

Введемо відображення ρ: $\hat{\mathbb{Z}} \to \mathbb{Z}$ таким чином. Для будь-якої ССЗР $(X, U, R) \in \hat{\mathbb{Z}}$ $\rho((X, U, R)) = (X, \Theta, U, g) \in$ Р$((X, U, R))$, а

$$\Theta = \prod_{u \in U} R(u). \tag{11}$$

Зрозуміло, що відображення ρ є розтягуванням ССЗР класу $\hat{\mathbb{Z}}$.

Теорема 1.

1. $\hat{\Pi}\mathrm{p} \circ \mathrm{P} = I_{\hat{\mathbb{Z}}}$, $\mathrm{P} \circ \hat{\Pi}\mathrm{p}|_{\mathbb{Z}_F} \neq I_{\mathbb{Z}_F}$.
2. $\hat{\Pi}\mathrm{p} \circ \rho = I_{\hat{\mathbb{Z}}}$, $\rho \circ \hat{\Pi}\mathrm{p}|_{\mathbb{Z}_F} \neq I_{\mathbb{Z}_F}$.
3. $\mathrm{P}(\hat{\mathbb{Z}}) = \mathbb{Z}_F$.
4. $\hat{\Pi}\mathrm{p}(\mathbb{Z}) = \hat{\Pi}\mathrm{p}(\mathbb{Z}_F) = \hat{\mathbb{Z}}$.

Доведення.

1. Із пункту 1) означення 27 й означення 26 маємо, що $\hat{\Pi}\mathrm{p}$ Р $= \hat{\Pi}\mathrm{p}|_{\mathbb{Z}_F} \circ$ Р. Проте $(\hat{\Pi}\mathrm{p}|_{\mathbb{Z}_F})^{-1} =$ Р, в силу пунктів 1), 3) означення 1.2.10 і означення 1.2.9. Але для будь-якої відповідності Q маємо $Q \circ Q^{-1} \supseteq I_{imQ}$, а $Q \circ Q^{-1} = I_{imQ}$ тоді і тільки тоді, коли $Q|_{domQ}$ – відображення. Взявши як Q відповідність $\hat{\Pi}\mathrm{p}|_{\mathbb{Z}_F}$ отримаємо потрібну рівність. *А* при $Q =$ Р, оскільки Р багатозначна відповідність, то отримаємо потрібну нерівність.

2. Випливає з того, що $dom\rho = \hat{\mathbb{Z}}$, $dom\hat{\Pi}\mathrm{p}|_{\mathbb{Z}_F} = \mathbb{Z}_F$, $\Gamma_\rho \subseteq$ Р і доведеного пункту 1.

3. Включення $\mathrm{P}(\hat{\mathbb{Z}}) \subseteq \mathbb{Z}_F$ відразу випливає з пункту 1) означення 27. Інше включення визначаємо з того, що $\mathrm{P}(\hat{\mathbb{Z}}) \subseteq \rho(\hat{\mathbb{Z}})$, оскільки $\mathrm{P} \supseteq \tilde{A}_\rho$, а $\rho(\hat{\mathbb{Z}}) = \mathbb{Z}_F$ із доведеного пункту 2.

4. Із доведених пунктів 1 і 3 маємо, що $\hat{\mathbb{Z}} = \hat{\Pi}\mathrm{p} \circ \mathrm{P}(\hat{\mathbb{Z}}) == \hat{\Pi}\mathrm{p}(\mathrm{P}(\hat{\mathbb{Z}})) = \hat{\Pi}\mathrm{p}(\mathbb{Z}_F)$. Тобто $\hat{\Pi}\mathrm{p}(\mathbb{Z}_F) = \hat{\mathbb{Z}}$. Однак $\hat{\Pi}\mathrm{p}(\mathbb{Z}) \supseteq \hat{\Pi}\mathrm{p}(\mathbb{Z}_F) = \hat{\mathbb{Z}}$, то $\hat{\Pi}\mathrm{p}(\mathbb{Z}) \supseteq \hat{\mathbb{Z}}$.

Однак за означенням проекції, $\hat{\Pi}\mathrm{p}(\mathbb{Z}) \subseteq \hat{\mathbb{Z}}$. Звідси – $\hat{\Pi}\mathrm{p}(\mathbb{Z}) = \hat{\mathbb{Z}}$, теорема повністю доведена.

Припущення 3. ССЗР у лотерейній формі $(X, U, R) \in \hat{\mathbb{Z}}$ і ССЗР в матричній формі $(X', \Theta, U', g) \in \mathbb{Z}$ еквівалентні між собою тоді і тільки тоді, коли $(X', \Theta, U', g) \simeq \rho(X, U, R)$.

Дане припущення природне через наступні причини: по-перше, досліджуючи питання про еквівалентність ССЗР, можна обмежитись зазначеними ССЗР у матричній формі. По-друге, очевидно, якщо ССЗР (X, Θ, U, g) еквівалентна ССЗР (X, U, R), то (X, Θ, U, g) повинна отримуватись з (X, U, R) операцією розтягування, тобто має бути розтягуванням класу $\hat{\mathbb{Z}}$. Що стосується умови $\Theta = \prod_{u \in U} R(u)$, то його прийняття, якщо так зручно, можна вважати просто технічною умовою. Проте, насправді, існують цілком виразні інтуїтивні передумови для того, щоб бачити в цьому щось більше. Виявляється умова (11) для будь-якого однотипного розтягування класу $\hat{\mathbb{Z}}$, тобто розтягування, за якого огрублення ССЗР в лотерейній формі не призводить до розширення множини невідомих параметрів, буде виконуватись. Сформулюємо точніше це твердження як наступну теорему, попередньо визначивши однотипність.

Означення 29. *Розтягування* φ *класу* $\hat{\mathbb{Z}}$ *називається* ***однотипним*** *класу* $\hat{\mathbb{Z}}$, *якщо для будь-яких непорожніх множин X, U з умов* $R' \subseteq R \subseteq U \times X$ *і* $\varphi((X,U,R)) = (X,\theta,U,g)$, $\varphi((X,U,R')) = (X,\Theta',U,g')$ *випливає* $\Theta' \subseteq \Theta$.

Теорема 2. *Однотипне розтягування класу* $\hat{\mathbb{Z}}$ *збігається з відображенням* ρ.

Доведення. Нехай $\varphi \neq \rho$. Тоді, оскільки φ – розтягування, то знайдуться непорожні множини X, U і $R \subseteq U \times X$, що $\varphi((X, U, R)) = (X, \Theta, U, g)$ і $\Theta \subset \prod_{u \in U} R(u)$. Нехай

$$\bar{\theta} \in \prod_{u \in U} R(u) \setminus \Theta. \tag{12}$$

В такому випадку розглянемо $(X, U, \Gamma_{\bar{\theta}}) \in \hat{\mathbb{Z}}$. Тоді $\varphi((X, U, \Gamma_{\bar{\theta}})) == (X, \{\bar{\theta}\}, U, g_{\bar{\theta}})$. Однак через однотипність розтягування, φ, $\{\bar{\theta}\} \subseteq \Theta$, що суперечить (12).

Теорема доведена.

З аксіоми 3 випливає що, маючи ССЗР у лотерейній формі $(X, U, R) \in \hat{\mathbb{Z}}$, ми можемо замінити її на еквівалентну ССЗР в матричній формі $\rho((X, U, R)) \in \mathbb{Z}$. Одне слово, клас ССЗР $\hat{\mathbb{Z}}$ природнім чином вкладається в клас ССЗР $\mathbb{Z}$, тобто $\hat{\mathbb{Z}} \subset \mathbb{Z}$.

Як і природа стохастичних експериментів, що визначають СЗР, так і спосіб отримання ТПР відносин переваги на елементарних наслідках і рішеннях цієї СЗР у теорії прийняття рішень нас не цікавить. Таким чином, під абстрактним ТПР у СЗР ми розумітимемо клас розбиття множини всіх ТПР, куди належать ТПР, які отримують однакові відповіді під час розв'язання ЗР в цій СЗР, і лише вони. Це дає підставу замість моделі ТПР у вибраній дослідником СЗР ввести таке поняття.

Означення 30. ***Правилом вибору переваг*** *(ПВП) для ЗР в класі ССЗР* $\mathbb{Z}' \subseteq \mathbb{Z}$ $(\hat{\mathbb{Z}}' \subseteq \hat{\mathbb{Z}})$ *(коротко ПВП в* $\mathbb{Z}' \subseteq \mathbb{Z}$ $(\hat{\mathbb{Z}}' \subseteq \hat{\mathbb{Z}})$) *будемо називати будь-яке відображення* $\pi = (\pi_1, \pi_2)$, *визначене на* $\mathbb{Z}'(\hat{\mathbb{Z}}')$ *і, яке ставить у відповідність кожній* $Z = (X, \Theta, U, g) \in \mathbb{Z}'$ $(\hat{Z} = (X, U, R) \in \hat{\mathbb{Z}}')$ *деяку пару відповідностей* $(X, \succcurlyeq_Z)((X, \succcurlyeq_{\hat{Z}}))$ *і* $(U, \succcurlyeq^*_Z)(U, \succcurlyeq^*_{\hat{Z}})$, *тобто*

$$\pi = (\pi_1, \pi_2) \in (2^{(X^2)} \times 2^{(U^2)})^{\mathbb{Z}'}$$

$$(\pi = (\pi_1, \pi_2) \in (2^{(X^2)} \times 2^{(U^2)})^{\hat{\mathbb{Z}}'}),$$

що позначатимемо також

$$\pi_Z = (\pi_{1Z}, \pi_{2Z}) = ((X, \succcurlyeq_Z), (U, \succcurlyeq^*_Z))(\pi_{\hat{Z}} = (\pi_{1\hat{Z}}, \pi_{2\hat{Z}}) = ((X, \succcurlyeq_{\hat{Z}}), (U, \succcurlyeq^*_{\hat{Z}}))).$$

Клас всіх ПВП в $\mathbb{Z}' \subseteq \mathbb{Z}$ $(\hat{\mathbb{Z}}' \subseteq \hat{\mathbb{Z}})$ *позначатимемо* $\prod(\mathbb{Z}')$ $(\prod(\hat{\mathbb{Z}}')$.

Зауваження. Кожен ТПР має конкретне (своє) ПВП для класу $\mathbb{Z}'(\hat{\mathbb{Z}}')$, яке є моделлю ТПР щодо розв'язання ним ЗР в класі $\mathbb{Z}'(\hat{\mathbb{Z}}')$. Знаючи ПВП для $\mathbb{Z}' \subseteq \mathbb{Z}$ $(\hat{\mathbb{Z}}' \subseteq \hat{\mathbb{Z}})$ довільного ТПР, ми можемо дізнатися його (даного ТПР) розв'язання основної ЗР для $Z \in \mathbb{Z}' \subseteq \mathbb{Z}$ $(\hat{Z} \in \hat{\mathbb{Z}}' \subseteq \hat{\mathbb{Z}})$.

Означення 31. ***ПВП*** *в* $\boldsymbol{Z}' \subseteq \boldsymbol{Z}$ $(\hat{\boldsymbol{Z}}' \subseteq \hat{\boldsymbol{Z}})$ *будемо називати будь-яке відображення ї, визначене на* $\boldsymbol{Z}'(\hat{\boldsymbol{Z}}')$, *яке ставить у відповідність кожній* $Z = ((X, \succcurlyeq), \Theta, U, g) \in \boldsymbol{Z}'$ $(\hat{Z} = ((X, \succcurlyeq), U, R) \in \hat{\boldsymbol{Z}}')$ *певну відповідність* $(U, \succcurlyeq^*_Z)((U, \succcurlyeq^*_{\hat{Z}}))$, *тобто* $\pi \in [2^{(U^2)}]^{\mathbb{Z}'}$ $(\pi \in [2^{(U^2)}]^{\hat{\mathbb{Z}}'})$, *що позначатимемо також* $\pi_Z = (U, \succcurlyeq^*_Z)$ $(\pi_{\hat{Z}} = (U, \succcurlyeq^*_{\hat{Z}}))$. *Клас всіх ПВП в* $\boldsymbol{Z}' \subseteq \boldsymbol{Z}$ $(\hat{\boldsymbol{Z}}' \subseteq \hat{\boldsymbol{Z}})$ *означимо* $\Pi(\boldsymbol{Z}')$ $(\Pi(\hat{\boldsymbol{Z}}')$.

Проте ПВП, яке моделює ТПР щодо ЗЗР, є, взагалі кажучи, не конструктивним об'єктом. Тому наступним завданням дослідника системи прийняття рішення після формування ССЗР є ефективне моделювання ПВП (а значить, і ТПР щодо СЗР). Це веде до наступного визначення.

Означення 32. ***Моделлю ПВП*** *(МПВП)* (Ω – ***параметричною моделлю ПВП*** (Ω – *МПВП*)) *у класі ССЗР* $\mathbb{Z}' \subseteq \mathbb{Z}$ $(\hat{\mathbb{Z}}' \subseteq \hat{\mathbb{Z}}$, $\boldsymbol{Z}' \subseteq \boldsymbol{Z}$, $\hat{\boldsymbol{Z}}' \subseteq \hat{\boldsymbol{Z}})$ *називатимемо кінцеву сукупність умов (аксіом)* ***У*** *на ПВП для класу* $\mathbb{Z}'(\hat{\mathbb{Z}}', \boldsymbol{Z}', \hat{\boldsymbol{Z}}')$, *які задають єдине ПВП (з точністю до параметра* $\omega \in \Omega$, *де* Ω *– множина значень параметра* ω), *і позначатимемо [****У****] в класі* $\mathbb{Z}'(\hat{\mathbb{Z}}', \boldsymbol{Z}', \hat{\boldsymbol{Z}}')$ *(з параметром* $\omega \in \Omega$).

МПВП у класі $\mathbb{Z}'(\hat{\mathbb{Z}}')$ зручно інтерпретувати як модель ТПР-а щодо основної ЗР, а МПВП в класі $\boldsymbol{Z}'(\boldsymbol{Z}')$ – як модель ТПР щодо другої основної ЗР, за відомого його (цього ТПР) розв'язання першої основної ЗР.

Завданням дослідника системи прийняття рішення є отримання її моделі, тобто МСЗР і МПВП для певного класу ССЗР.

Модель системи прийняття рішення при випадковості прийняття значень параметра, який не спостерігається, описуваної статистичними закономірностями, розглядається в праці В. І. Іваненка, В. А. Лабковського. Досліджена там МСЗР, так звана «загальна задача рішення» характеризується тим, що її клас ССЗР становить собою усі схеми з множиною наслідків, що є множиною дійсних чисел $\mathbb{R}$ із порядком неспадання (,) як відношення переваг ТПР-а і g – довільною функцією втрат, для якої $\inf\{g(\theta,u): \theta\in\Theta, u\in U\} > -\infty$ і за будь-якого $u\in U$ $\sup\{g(\theta,u): \theta\in\Theta\} < +\infty$. А МПВП, названа там класом правил вибору критерія (позначається Π_0), для яких переваги на рішеннях задаються функцією корисності, названою критерієм, що задовольняє трьом природним умовами (монотонність, невід'ємна лінійність і певна форма принципу гарантованого результату). При цьому для зазначеної моделі отримано явний вигляд цього критерію.

Виявляється, що МСЗР для стохастичних розподілів визначається аналогічно МСЗР для статистичних закономірностей у параметричних ситуаціях, з тією лише різницею, що під P розуміється будь-який стохастичний розподіл на Θ, *в загальному випадку,* неможливо. Бо в цьому випадку представленню МСЗР відповідає представлення випадкового. Тоді існування такого представлення рівнозначне твердженню теореми Колмогорова про узгоджені розподіли [9; 22], що не можна довести, не виходячи за рамки теорії міри (в доведенні теореми Колмогорова у використано повноту і сепарабельність метричного простору X, а у [22] – його локальну компактність).

Непараметричні моделі системи прийняття рішення у випадковому прийнятті значень параметру θ, який не спостерігається, описаний стохастичними розподілами дає, наприклад, відома теорія очікуваної корисності фон Неймана-Моргенштерна [5; 11; 41].

Параметричні моделі системи прийняття рішення за випадкового прийняття значень параметра θ, який не спостерігається, описуваної стохастичними розподілами продукує, наприклад, відома теорія суб'єктивної очікуваної корисності Севіджа [5; 41].

У згаданих моделях для стохастичних розподілів переваги на рішеннях визначаються так званим байєсівським критерієм.

Література

1. Блекуэлл Д. Теория игр и статистических решений / Пер. с англ. ; Д. Блекуэлл Д., М. А. Гиршик. – М. : Изд-во иностр. л-ры, 1958. – 374 с.
2. Бурбаки Н. Теория множеств / Н. Бурбаки ; Пер. с франц. – М. : Изд-во «Мир», 1965. – 456 с.
3. Вентцель Е. С. Исследование операций (задачи, принципы, методология) / Е. С. Вентцель. – М. : Наука, 1980. – 208 с.
4. Вилкас Э. Й. Аксиоматический подход к принципам оптимальности / Э. Й. Вилкас // Современное состояние теории исследования операций. – М. : Наука, 1979. – С. 101–115.
5. Вилкас Э. Й. Оптимальность в играх и решениях / Э. Й. Вилкас. – М. : Наука, 1990. – 255 с.
6. Вилкас Э. Й. Понятие оптимальности в теории игр / Э. Й. Вилкас // Современные направления в теории игр. – Вильнюс : Минтис, 1976. – С. 25–43.
7. Вилкас Э. Й. Решения : теория, информация, моделирование / Э. Й. Вилкас, Е. З. Майминас. – М. : Радио и связ», 1981. – 328 с.
8. Гермейер Ю. Б. Введение в теорию исследования операций / Ю. Б. Гермейер. – М. : Наука, 1971. – 383 с.
9. Гихман И. И. Введение в теорию случайных процессов / И. И. Гихман, А. В. Скороход. – М. : Наука, 1965. – 656 с.
10. Данфорд Н. Линейные операторы (общая теория) / Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц ; Пер. с англ. – М. : Изд-во иностр. л-ры, 1962. – 896 с.
11. Де Гроот М. Оптимальные статистические решения / М. де Гроот ; Пер. с англ. – М. : Изд-во «Мир», 1974. – 496 с.
12. Звонкин А. К. Сложность конечных объектов и обоснование понятий информации и случайности с помощью теории алгоритмов / А. К. Звонкин, Л. А. Левин // УМН. – 1970. – Т. 25. – Вып. 6. – С. 85–127.
13. Иваненко В. И. Об одном виде неопределённости / В. И. Иваненко, В. А. Лабковский // ДАН СССР. – 1979. – Т. 248, № 3. – С. 539–542.
14. Иваненко В. И. Об одном обобщении понятия стохастического эксперимента / В. И. Иваненко, В. А. Лабковский // Труды симпозиума ИФАК «Стохастическое управление». – Вильнюс. – 1986. – С. 147–149.
15. Иваненко В. И. Проблема неопределённости в задачах принятия решений / В. И. Иваненко, В. А. Лабковский. – К. : Наук. думка, 1990. – 136 с.
16. Иваненко В. И. К вопросу о неопределённости в задачах принятия решений / В. И. Иваненко, В. М. Михалевич // Кибернетика и системный анализ. – 2008. – Т. 2. – С. 116–119.
17. Иваненко В. И. К моделированию стохастических ситуаций принятия решения / В. И. Иваненко, В. М. Михалевич // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2010. – Т. 1. – С. 78–80.
18. Колмогоров А. Н. О логических основаниях теории вероятностей / А. Н. Колмогоров // Теория вероятностей и математическая статистика. – М. : Наука, 1986. – С. 467–471.
19. Куратовский К. Теория множеств / К. Куратовский, А. Мостовский : Пер. с англ. – М. : Изд-во «Мир», 1970. – 416 с.
20. Лабковский В. А. Об одном примере безразличной неопределённости / В. А. Лабковский // Кибернетика. – 1981. – № 1. – С. 15–18.
21. Лабковский В. А. Управление в условиях безразличной неопределённости / В. А. Лабковский // ДАН УССР. Сер. А. – 1986. – № 4. – С. 73–78.
22. Ламперти Дж. Вероятность / Дж. Ламперти : Пер. с англ. – М. : Наука, 1973. – 184 с.
23. Лоэв М. Теория вероятностей / М. Лоэв : Пер. с англ. – М. : Изд-во иностр. л-ры, 1962. – 720 с.
24. Льюс Р. Д. Игры и решения / Р. Д. Льюс, Х. Райфа : Пер. с англ. – М. : Изд-во иностр. л-ры, 1961. – 642 с.
25. Михалевич В. М. До класифікації задач рішень / В. М. Михалевич // Наукові записки НаУКМА. Фізико-математичні науки. – 2007. – Т. 61 – С. 14–16.
26. Михалевич В. М. До невизначеності в непараметричних ситуаціях задач прийняття рішень / В. М. Михалевич // Наукові записки НаУКМА. Фізико-математичні науки. – 2010. – Т. 100. – С. 11–29.

27. Михалевич В. М. К моделированию ситуации в задаче решения с денежными потерями / В. М. Михалевич // Доповіді Національної академії наук України. – 2010. – № 11. – С. 30–34.
28. Михалевич В. М. К моделированию ситуации в задаче решения с денежными доходами / В. М. Михалевич // Доповіді Національної академії наук України. – 2010. – № 12. – С. 38–42.
29. Михалевич В. М. До моделювання ситуації у стохастичних задачах рішень / В. М. Михалевич // Наукові записки НаУКМА. Фізико-математичні науки. – 2008. – Т. 74. – С. 10–11.
30. Михалевич В. М. К задаче принятия решений с денежными последствиями / В. М. Михалевич // Кибернетика и вычислительная техника. –2011. – № 163 – С. 3–22.
31. Михалевич В. М. К моделированию системы принятия решения для необайесовских задач / В. М. Михалевич // Доповіді Національної академії наук України. – 2011. – № 5. – С. 45–51.
32. Михалевич В. М. К параметрической задаче решения с денежными потерями / В. М. Михалевич // Кибернетика и системный анализ. – 2011. – № 2. – С. 131–143.
33. Михалевич В. М. К системе принятия решения» / В. М. Михалевич // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія : Фізико-математичні науки : зб. наук. праць / Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова Національної академії наук України, Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка. – Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка. – 2010. – Вип. 4. – С. 139–148.
34. Михалевич В. М. О некоторых классах правил выбора предпочтений в задачах принятия решения / В. М. Михалевич // Кибернетика и системный анализ. – 2010. – № 6. – С. 140–154.
35. Михалевич В. М. Одна форма принципа гарантированного результата при многократном выборе / В. М. Михалевич // Кибернетика и вычислительная техника. – 2010. – № 161. – С. 28–34.
36. Михалевич В. С. Байесовський вибір між двома гіпотезами про середнє значення нормального процесу / В. С. Михалевич // Вісник КДУ. – 1965. – Т. 1, № 1. – С. 101–104.
37. Михалевич В. С. Последовательные алгоритмы оптимизации и их применение. 1 / В. С. Михалевич // Кибернетика. – 1965. – № 1. – С. 45–56; № 2. – С. 85–89.
38. Моисеев Н. М. Математические задачи системного анализа / Н. М. Моисеев. – М. : Наука, 1981. – 488 с.
39. Орловский С. А. Проблемы принятия решений при нечёткой исходнй информации / С. А. Орловский. – М. : Наука, 1981. – 208 с.
40. Райфа Г. Анализ решений (введение в проблему выбора в условиях неопределённости) / Г. Райфа ; Пер. с англ. – М. : Наука, 1977. – 408 с
41. Фишберн П. Теория полезности для принятия решений / П. Фишберн ; Пер. с англ. – М. : Наука, 1978. – 352 с.
42. Чернов Г. Элементарная теория статистических решений / Г. Чернов, Л. Мозес ; Пер. с англ. – М. : Советское радио, 1962. – 408 с.
43. Ширяев А. Н. К теории решающих функций и управлению процессом наблюдения по неполным данным / А. Н. Ширяев // Trans. 3-rd Prague Confer. on Inform. Theory etc., 1962. – P. 657–681.
44. Ширяев А. Н. Некоторые новые результаты в теории управляемых случайных процессов / А. Н. Ширяев // Trans. 4-rd Prague Confer. on Inform. Theory etc., 1965. – P. 131–203.
45. Anscombe F. A definition of subjective probability / F. Anscombe, R. Aumann // Annals of Mathematical Statistics. – 1963. – I. 34. – P. 199–205.
46. Arrow K. I. An optimaly criterion for decision-making under ignorance / K. I. Arrow, L. Hurwicz // Uncertainty and expectation in economics. – Oxford : Basil Balck-well and Mott, 1972. – P. 321–342.
47. Church A. On the concept of a random sequential experiments / A. Church // Bull. Amer. Math. Soc. – 1940. – I. 46, № 2. – P. 130–135.
48. Cserniak L. Some remarks to the notion uncertainty / L. Cserniak, F. Steiner // Acta good geophys. et montanist. hung. – 1984. – V. 19, № 3–4. – P. 235–238.
49. Hurwicz L. Optimality criteria for decision making under ignorance / L. Hurwicz // Cowles Comission Discussion Paper. – Statistics. – 1951. – № 370. – P. 11–16.
50. Ivanenko V. I. Decision Systems and Non-Stochastic Randomness : monograph / V. I. Ivanenko. – Springer, 2010. – 300 p.
51. Karni E. A new approach to modeling decision-making under uncertainty / E. Karni. – Economics Working Paper Arcive with number 519, – 2005, p. 1–33.
52. Savage L. J. The foundations of statistics / L. J.Savage. – New York : John Wiley and Sons, 1954. – 294 p.

V. Mykhalevych

TO DECISIONS SYSTEM

It is introduced and formalized the concept of the making decision system based on the V. I. Ivanenko's theory (see ,). The generality of the model imposed by the decision-making system is illustrated on the example of a decision with randomness, which is described as a stochastic distributions (probabilistic randomness), and the laws of mass phenomena («randomness in the broad sense», according to).

Keywords: situation, the parametric situation, the scheme of the situation, the model of the situation, problem solutions.

Матеріал надійшов 20 квітня 2011 р.