

ВИСОКОТОЧНА СХЕМА ПАРАЛЕЛЬНИХ ОБЧИСЛЕНЬ МАКСИМАЛЬНИХ КОНТУРНИХ SH-НАПРУЖЕНЬ НА СИСТЕМІ НЕКРУГОВИХ ОТВОРІВ У НЕСКІНЧЕННОМУ ПРУЖНОМУ СЕРЕДОВИЩІ

Запропоновано й досліджено паралельний алгоритм чисельного розв'язання стаціонарних задач теорії пружності на прикладі взаємодії SH-хвиль із системою отворів довільного поперечного перерізу. За допомогою інтегрального подання амплітуди переміщення відбитого хвильового поля крайову задачу зведено до системи інтегральних рівнянь, що розв'язується чисельно. Схема паралельних обчислень дала змогу дослідити ситуацію зі збільшеним числом отворів-відбивачів. Алгоритм досліджено і на МІМД-залежність. Наведено нові результати.

Ключові слова: паралельно-конвеєрні кластерні обчислення, дифракція хвиль зсуву, система некругових отворів, інтегральні рівняння, максимальні контурні напруження.

Вступ

У сучасній механіці особливого значення набувають ефективні паралельні алгоритми, в основі яких лежать обґрунтовані аналітичні методи [1]. Для конструкцій, що містять значну кількість неоднорідностей і працюють під дією динамічних навантажень, характерне руйнування саме поблизу концентраторів напружень. Тому великий інтерес викликає аналіз взаємодії хвиль переміщень і напружень у пружному середовищі з системами отворів. Однак такі задачі мало досліджені через потребу залучення значних обсягів обчислювальних ресурсів.

Суттєвий прогрес у теорії дифракції досягнуто завдяки ефективності методу інтегральних рівнянь [8; 10]. Важливою перевагою методу є скорочення числа просторових змінних [2; 7]. Крім того, метод інтегральних рівнянь має більші можливості під час побудови паралельних обчислювальних схем.

У статті розроблено паралельний алгоритм чисельного розв'язання системи інтегральних рівнянь, які з'являються у дослідженні модельної задачі дифракції хвиль зсуву на системах циліндричних порожнин довільного поперечного перерізу.

1. Постановка задачі

Розглянемо задачу, описану в [6]. У необмеженому ізотропному середовищі міститься m нескінченних уздовж осі OZ порожніх циліндрів, поперечні перерізи яких обмежено замкненими (без спільних ділянок) контурами $L_j, j = 1, m$ типу Ляпунова. Нехай L – сукупність зазначених контурів (рис. 1).

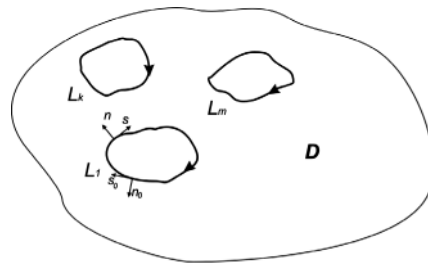


Рис. 1. Ізотропне середовище з L – сукупністю контурів

Джерелами зовнішнього поля переміщень W_0 можуть бути монохроматична SH-хвиля, що набігає на циліндри з нескінченності, нормаль до фронту якої становить кут ψ з віссю OX ($\tau = \text{const}$),

$$W_0 = \tau e^{-\gamma_2(x \cos \psi + y \sin \psi)}, \quad \gamma_2 = \frac{\omega}{c_2}, \quad (1)$$

або гармонійне джерело інтенсивності P , зосереджене в точці $M_0(x_0, y_0)$ і таке, що породжує поле переміщень [5]

$$W_0 = -\frac{P}{\mu} \frac{1}{4i} H_0^{(1)}(\gamma_2 r), \quad r = |z - z_0|, \quad (2)$$

$$z = x + iy, \quad z_0 = x_0 + iy_0.$$

Тут c_2 – швидкість хвилі зсуву, ω – частота коливань, μ – модуль зсуву, i – уявна одиниця ($i^2 = -1$), $H_n^{(1)}(x)$ – функція Ханкеля першого роду n -го порядку, залежність від часу виражено множителем $e^{-i\omega t}$.

Внаслідок взаємодії хвилі з системою отворів, на які вона набігає, виникає дифракційне хвильове поле. Позначимо W_1 амплітуду відбитої хвилі зсуву. Тоді загальне поле амплітуд переміщень дорівнює $W = W_0 + W_1$. Невідома функ-

ція W_1 повинна задовольняти однорідне рівняння Гельмгольца в області D із хвильовим числом γ_2 :

$$\Delta W_1 + \gamma_2^2 W_1 = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad (3)$$

а також умови випромінювання на нескінченності типу Зомерфельда [7].

На границі отворів L нас будуть цікавити дотичні напруження $\sigma_{sz} = \tau_s e^{-i\omega t}$, $\sigma_{nz} = \tau_n e^{-i\omega t}$. У випадку антиплоскої деформації

$$\tau_s = \mu \frac{\partial W}{\partial s}, \quad \tau_n = \mu \frac{\partial W}{\partial n}, \quad (4)$$

де s – додатня дотична, n – нормаль у точці $\zeta = \xi + i\eta \in L$ (рис. 1).

Нехай $\zeta_0 = \xi_0 + i\eta_0$ – точка L , у якій виконуються граничні умови. Якщо L – границя отворів, то

$$\frac{\partial}{\partial n_0} (W_0 + W_1)|_L = 0, \quad (5)$$

де n_0 – нормаль до L у точці $\zeta_0 \in L$.

Таким чином, задача дифракції хвилі зсуву (1) або (2) на системі отворів у необмеженому ізотропному середовищі зводиться до розв'язання крайової задач (3), (5) при виконанні додаткових умов випромінювання на нескінченності.

2. Метод розв'язання

З урахуванням [6], запишемо функцію $W_1(x, y)$, що характеризує розсіяну отворами хвилю переміщень в області D у такий спосіб:

$$W_1(x, y) = \int_L f(s) G(x, y, \xi, \eta) ds, \quad (6)$$

$$G = \frac{1}{4i} H_0^{(1)}(\gamma_2 r), \quad r = |z - \zeta|, \quad z = x + iy, \quad \zeta = \xi + i\eta \in L.$$

Тут L – сукупність контурів L_j , $j = \overline{1, m}$ (рис. 1); $f(s)$ – невідома функція, що задовольняє на L умові Гельдера.

Випишемо з [6] інтегральне рівняння.

$$\frac{1}{2} f(s_0) + \int_L f(s) E(s, s_0) ds = K_n(s_0), \quad n = 1, 2, \quad (7)$$

$$E(s, s_0) = \gamma_2 H_1^{(1)}(\gamma_2 r_0) \sin(\alpha_0 - \phi_0), \quad \zeta_0 - \zeta = r_0 e^{i\alpha_0},$$

$$K_1(s_0) = i\gamma_2 W_0(s_0) \sin(\psi - \alpha_0),$$

$$K_2(s_0) = -\frac{P}{\mu} \gamma_2 H_1^{(1)}(\gamma_2 r_{10}) \sin(\alpha_{10} - \phi_0),$$

$$\zeta_0 - z_0 = r_{10} e^{i\alpha_{10}}, \quad z_0 = x_0 + iy_0.$$

Тут функції $K_1(s_0)$ й $K_2(s_0)$ відповідають випадкам (1) і (2).

У [6] зазначено, що оскільки ядро $E(s, s_0)$ можна відобразити як

$$E(s, s_0) = \frac{2}{\pi i} \operatorname{Im} \left\{ \frac{e^{i\phi_0}}{\zeta - \zeta_0} \right\} + \gamma_2 H_1(\gamma_2 r_0) \sin(\alpha_0 - \phi_0), \quad (8)$$

то функція $E(s, s_0)$ неперервна на L . Отже, інтегральне рівняння (7) є рівнянням Фредгольма другого роду, що, як відомо, розв'язне і має єдиний розв'язок у класі функцій, неперервних за Гельдером.

3. Схема обчислень

Для алгоритму розв'язання СЛАР шуканого інтегрального рівняння Фредгольма другого роду оптимальним числом виявилось 150–200 процесів при заданій точності 10^{-10} .

На рис. 2 наведено графік залежності загального часу кластерних обчислень масиву контурних напружень на ромбічному отворі від числа процесів для одного варіанта навантаження. Із графіка бачимо, що весь алгоритм добре масштабується й має умовно-оптимальне число процесів.

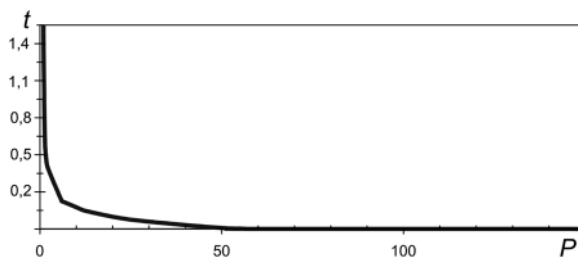


Рис. 2. Графік залежності загального часу кластерних обчислень

Обчислювальний процес розв'язання СЛАР також розпаралелено згідно з [9]. Паралельне обчислення підсумкових шуканих характеристик здійснено через підстановку масивів значень невідомих функцій $f_k(\beta_p)$ у подання (6) аналогічно процедурам формування матриці СЛАР.

4. Чисельні результати

Для дослідження збіжності побудованого алгоритму розглянемо випадок нормального падіння ($\psi = \pi/2$) хвилі зсуву (1) на систему ромбічних зі скругленнями отворів, розташованих уздовж однієї лінії на однаковій відстані d один від одного.

Будемо використовувати відомі [3] параметричні рівняння для задання основного контура L_0 :

$$\xi(\beta) = b \sin \beta - v \sin 3\beta,$$

$$\eta(\beta) = a \cos \beta + v \cos 3\beta, \quad 0 \leq \beta \leq 2\pi, \quad (12)$$

де при $v = 0,14036$ контур має вигляд ромба з округленими крапками повернення. А у випадку

$v = 0$ контур має еліптичну форму. Інші контури для простоти будемо розташовувати симетрично до осі ОУ. У цьому випадку розглянута дифракційна задача має властивість симетрії, що дає змогу здійснювати первинне самотестування отриманих результатів.

Під час чисельної реалізації обчислювали безрозмірні контурні напруження $\sigma_\beta = \tau_s/\mu$. Точність обчислень перевіряли порівнянням результатів при різних значеннях N . Здійснювали також порівняння отриманих результатів із результатами, наведеними в [5] для випадку одиночного отвору, а також з результатами [6] для випадку еліптичних систем отворів.

Застосування методу паралельних обчислень, проведеного на кластері «Інпарк-256», дало можливість досліджувати збіжність до 10^{-10} порядку. Виявлено, що збіжність розв'язку інтегрального рівняння майже не залежить від числа відбивачів. При наявності 100 отворів загальний час розв'язання системи лінійних рівнянь для матриці розмірністю порядку 10^6 (для одного варіанта) з використанням 256 процесорів становило близько 2 год. Розв'язання аналогічної задачі процедурним методом для 10 відбивачів (використання типових обчислювальних засобів з точністю до 10^{-3} –500 точок коллокації) здійснювалося кілька діб. При симетричному навантаженні спостерігається ефект насичення решітки вже при 9–10 отворах (при збільшенні надалі числа отворів контурні напруження практично не змінюються). Це повністю збігається з аналогічними результатами, отриманими в [6].

У дослідженні обчислювали контурні напруження σ_β уздовж контурів центрального L_0 і крайнього L_k отворів у випадку решітки, що складається з непарного числа отворів. Відлік кута β ведеться від нуля (тіньова точка) до π (лобова точка) для центрального отвору (враховано симетрію у випадку нормального розподілу хвилі зсуву (1)) і від 0 до 2π – для крайнього отвору (завдяки симетрії розподілу напружень на контурах L_k і L_{-k} однакові).

Аналіз показує, що, як і у праці [6], існує принципова відмінність у розподілі σ_β за умов набігання SH-хвилі (1) на решітку, що складається з витягнутих уздовж осі ОХ ромбів ($b/a < 1$), від випадку решітки з ромбів, витягнутих назустріч хвилі ($b/a > 1$). Якщо в першому випадку ($b/a < 1$) розподіл σ_β є моноекстремальним [6; 5] (максимальне значення – у точках зісковзування $\beta = \pi/2$ і $\beta = 3\pi/2$), то в іншому випадку, починаючи з деякого значення $b/a > 1$, з'являється кілька локальних максимумів. Тому у дослідженні розглянуто випадок ромбів, витягнутих назустріч набігаючій хвилі, при цьому обрано значення $b/a = 2,5$.

На рис. 3 та 4 наведено розподіли σ_β уздовж контура центрального отвору L_0 у випадку решітки, що складається з трьох ромбів. Вплив – хвиля з нескінченності. Значення безрозмірного хвильового числа $\gamma_2 a$ дорівнює 1,5 (рис. 3) і 3,0 (рис. 4). Крива 1 показує розподіл напружень для центрального отвору у випадку решітки, де її період $d = 0,5a$. Крива 2 – для решітки з $d = 2a$. Результати показують, що чим ближче отвори один до одного, тим вищі контурні напруження. Якщо у тіньовій ($\beta = 0$) і лобовій ($\beta = \pi$) точках $\sigma_\beta = 0$, то у зоні зісковзування зі збільшенням $\gamma_2 a$ число локальних максимумів σ_β також збільшується, причому росте й максимальне значення σ_β . Такий висновок повністю збігається з результатами праці [6].

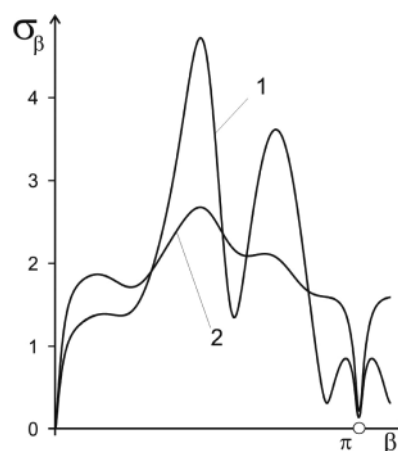


Рис. 3. Графіки розподілу σ_β уздовж контура центрального отвору L_0 , якщо $\gamma_2 a = 1,5$

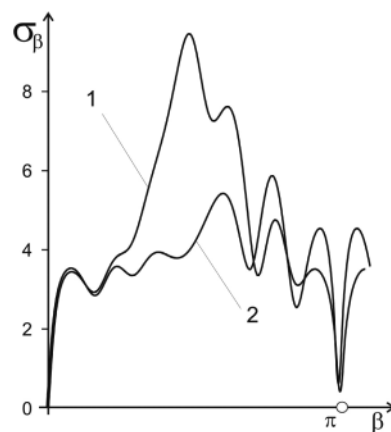


Рис. 4. Графіки розподілу σ_β уздовж контура центрального отвору L_0 , якщо $\gamma_2 a = 3,0$

Відомо [8], що для сталей коливань при будь-яких великих значеннях відстані між об'єктами, поблизу об'єктів все-таки спостерігається незначний вплив решітки. Графіки максимальних напружень для контурів центрального отвору ілюструють слабкі пульсації значень σ_β^{max} поблизу константи – значення відповідного максимального напруження для одиночного отвору.

Таблиця 1. Високоточні значення максимумів дотичних напружень

Джерело	Тип контуру	γ, a	Розташування отвору	Кут β у радіанах	Максимум σ_p
Хвиля	Еліпс	1,7	Центральне	3,7759581877	2,7434183334
Хвиля	Еліпс	1,7	Крайнє праворуч	2,0223429197	2,5634431896
Хвиля	Ромбик	1,7	Центральне	1,5241661202	2,8519959464
Хвиля	Ромбик	1,7	Крайнє праворуч	4,7330332830	2,7685470486
Джерело	Еліпс	1,7	Центральне	0,3493654986	0,7138349170
Джерело	Еліпс	1,7	Крайнє праворуч	4,1669119402	0,3022873720
Джерело	Ромбик	1,7	Центральне	0,0953579509	1,2697288402
Джерело	Ромбик	1,7	Крайнє праворуч	3,1676492946	0,2446962768
Хвиля	Еліпс	2,5	Центральне	2,1654776027	3,8874602581
Хвиля	Еліпс	2,5	Крайнє праворуч	4,1247243899	3,7970390118
Хвиля	Ромбик	2,5	Центральне	3,5880972937	4,2768939823
Хвиля	Ромбик	2,5	Крайнє праворуч	1,5641853954	4,3471409312
Джерело	Еліпс	2,5	Центральне	0,2433410444	0,5857393657
Джерело	Еліпс	2,5	Крайнє праворуч	6,2449639214	0,4036738759
Джерело	Ромбик	2,5	Центральне	0,1031154078	1,5085150911
Джерело	Ромбик	2,5	Крайнє праворуч	6,2781079856	0,5777780860

Цим підтверджено правильність використовуваного алгоритму.

У зв'язку з тим, що метод інтегральних рівнянь не дає змогу знаходити розв'язки в довільних точках контуру, а лише дискретно – у вузлах поліномів, для високоточного визначення значення максимуму дотичного напруження, а також для визначення відповідного значення кута в радіанах, застосуємо алгоритм послідовних наближень зсувів точок коллокації контура.

Для наближеного визначення відрізка контура, на якому перебуває максимум, використано метод сплайнів. Оскільки шукана залежність контурних напружень має тільки параболічну кривизну, то для зниження похибки вибирався квадратичний сплайн. Після отримання початкового наближення значення максимуму напруження обчислювалося й початкове наближення відрізка контура, де дислоковано це значення. На кожній ітерації для обчислень значень функції застосовувалася відома процедура методу «золотого перетину» [4].

Розроблена схема чисельного експерименту дала можливість сформулювати унікальну таблицю високоточних значень (до 10^{-10}) максимумів дотичних напружень і відповідних кутових координат на контурі еліптичних чи ромбічних центральних або крайніх отворів (у системі від 3 до 9 об'єктів). Вплив – хвиля з нескінченності або розташоване поблизу джерело гармонійних SH-

хвиль для будь-яких геометричних співвідношень отворів і більшості хвильових чисел. На думку авторів, таку таблицю сформовано вперше.

У табл. 1 наведено фрагмент цього результату для хвилі з нескінченності або від джерела. Вплив на систему із трьох еліптичних або ромбічних отворів зі співвідношенням осей $b/a = 2,5$ і хвильових чисел γ, a , рівними 1,7 і 2,5 відповідно. Координата джерела $Y_z = 1,0$.

Висновки

Для задачі дифракції хвиль зсуву на системі отворів некругової форми паралельні алгоритми дають можливість значно скоротити час обчислень і докладніше проаналізувати характеристики хвильового поля. Це дуже важливо, оскільки отримання точних величин резонансних максимумів контурних напруг, а також точних координат дислокації резонансних максимумів дасть змогу уникнути руйнувань конструкцій, на які діють динамічні навантаження. Усе це потребує використання збільшеного числа варіантів вихідних даних. Сполучення ж методу інтегральних рівнянь, що робить можливим знизити розмірність задачі на одиницю, а також значно зекономити час обчислень завдяки розпаралелюванню обчислювальних процедур, що істотно збільшує ефективність запропонованого алгоритму.

Література

1. Вертгейм И. И. Параллельные технологии вычислений в механике сплошных сред и МДТТ. : Учебное пособие / И. И. Вертгейм, В. Н. Терпигуров. – Пермь, 2007. – 84 с.
2. Габдулхаев Б. Г. К численному решению интегральных уравнений методом механических квадратур / Б. Г. Габдулхаев // Изв. вузов. Математика. – 1972. – № 2. – С. 23–39.
3. Гузь А. Н. Метод возмущения формы границы в механике сплошных сред / А. Н. Гузь, Ю. Н. Немиш. – К. : Наук. думка, 1989. – 352 с.
4. Максимов Ю. А. Алгоритмы решения задач нелинейного программирования / Ю. А. Максимов, Е. А. Филлиповская. – М. : МИФИ. – 1982. – 421 с.

5. Назаренко А. М. Дифракция волн сдвига на цилиндрических неоднородностях произвольного поперечного сечения / А. М. Назаренко, Б. Е. Панченко // Динамика и прочность машин. Респ. межвед. научно-техн. сб. – 1991. – Вып. 52. – С. 38–45.
6. Назаренко А. М. Схема параллельных вычислений в задачах дифракции волн сдвига на системе отверстий в бесконечной упругой среде / А. М. Назаренко, Б. Е. Панченко // Проблемы программирования. – 2010. – № 2–3, С. 604–610.
7. Панасюк В. В. Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции / В. В. Панасюк, М. П. Саврук, З. Т. Назарчук. – К. : Наук. думка, 1984. – 344 с.
8. Фильштинский Л. А. Дифракция упругих волн на трещинах, отверстиях, включениях в изотропной среде / Л. А. Фильштинский // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1991. – № 4. – С. 119–127.
9. Химич А. Н. Численное программное обеспечение интеллектуального MIMD-компьютера «Инпарком» / А. Н. Химич, И. Н. Молчанов, А. В. Попов – К. : Наук. думка. – 2007. – 220 с.

B. Panchenko, I. Sayko

PRECISION GUIDED SCHEME OF PARALLEL COMPUTATION OF MAXIMUM CONTOUR SH-POTENTIALS ON A SYSTEM OF NON-CIRCULAR HOLES IN AN INFINITE ELASTIC MEDIUM

Parallel algorithm for the numerical solution of stationary problems of the elasticity theory, for example, the interaction of SH-waves with as system of holes with arbitrary cross-section, is proposed and investigated. Using the integral representation of the movement amplitude of the reflected wave field, the boundary value problem is reduced to a system of integral equations, which can be solved numerically. The scheme of parallel computing allowed to investigate situations with a big number of reflective holes. The algorithm is investigated for the MIMD-dependency. New unique numerical results are presented.

Keywords: parallel-pipeline cluster computation, shear of wave diffraction, system of non-circular holes, integral equation, maximum contour potentials.

Матеріал надійшов 15.11.2011