УДК 519.876.5; 519.6

Литвин О. М., Першина Ю. І.

МЕТОД ПОБУДОВИ РОЗРИВНИХ СПЛАЙНІВ ДЛЯ НАБЛИЖЕННЯ РОЗРИВНИХ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Запропоновано методи побудови розривних лінійних сплайнів інтерполяційного та апроксимаційного типу для наближення функції однієї змінної, що має хоча б один розрив першого роду у вузлах розбиття області визначення функції, використовуючи метод найменших квадратів. Визначено оцінки похибки наближення розривних функцій побудованими розривними конструкціями.

Ключові слова: розривна функція, розривний сплайн, інтерполяція, апроксимація.

Вступ

Задачі дослідження розривних функцій виникають значно частіше, ніж задачі дослідження неперервних функцій. Наприклад, вивчаючи внутрішню структуру тіла, слід враховувати його неоднорідність, тобто різну щільність у різних частинах тіла (кістки, серце, шлунок, печінка тощо мають різну щільність, тобто щільність тіла є функцією з розривами першого роду на системі ліній); досліджуючи кору Землі за допомогою даних із кернів свердловинного буріння, виникає задача відновлення внутрішньої структури кори між свердловинами. При цьому очевидним є факт, що щільність ґрунту в різних точках кори неоднорідна і найчастіше має розриви першого роду в точках поверхонь, які відділяють одну складову кори від іншої (чорнозем, пісок, глина, граніт тощо). Дослідженню розривних функцій присвячено, наприклад, праці [1; 2; 5], а наближення неперервних функцій розглянуто у [3; 7].

У статті [6] розглядали задачу рівномірного наближення неперервних і неперервно-диференційовних функцій розривними сплайнами однієї змінної. Відомі також праці з наближення неперервних функцій однієї змінної кусково-сталими функціями [1; 5], у яких неперервні та диференційовані функції наближуються сплайнами степеня нуль. Що стосується наближення розривних функцій, то авторам невідомі загальні методи сплайн-апроксимації та сплайн-інтерполяції розривних функцій за допомогою розривних сплайнів.

Автори вважають, що наближувати розривні функції треба також за допомогою розривних функцій. У статті [4] досліджено оцінку похибки наближення диференційовних функцій лінійними неперервними сплайнами методом найменших квадратів у нормі $W_2^1[0,1]$. Там запропоновано розробити і дослідити інтерполяційний метод наближення та апроксимаційний метод наближення розривних функцій розривними сплайнами, використовуючи метод найменших квадратів.

Постановка задачі

Нехай задана функція однієї змінної $f(x)$ на інтервалі $[a, b]$ з можливими розривами першого роду в точках $x_k,\ k=\overline{1,n}$. Припускаємо, що хоча б в одному вузлі x_k функція має розрив першого роду. Задані вузли розбивають інтервал $[a, b]$ на $n-1$ частин. Мета дослідження – вивчення розривного лінійного інтерполяційного сплайна та розривного лінійного апроксимаційного сплайна для наближення функцій однієї змінної, що мають можливі розриви першого роду, методом найменших квадратів.

Побудова розривного інтерполяційного сплайна

Визначення. Називатимемо розривним інтерполяційним лінійним сплайном на відрізку $[x_k, x_{k+1}],\ k=\overline{1,n-1}$ таку функцію

$$S(x)=Sp_k(x,C)=$$
$$=C_k^+\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}+C_{k+1}^-\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k},\ k=\overline{1,n-1},\quad (1)$$

де

$$C_k^+=f(x_k+0),\qquad C_{k+1}^-=f(x_{k+1}-0).$$

Теорема 1. Функція $S(x)=Sp_k(x),\ k=\overline{1,n}$ задовольняє такі властивості

$$Sp_k(x_k+0)=C_k^+,\qquad Sp_{k-1}(x_k-0)=C_k^-.\quad (2)$$

Доведення. Слід врахувати, що зліва від вузла x_k сплайн $S(x)$ задається формулою

$$S(x)=Sp_{k-1}(x,C)=C_{k-1}^+\frac{x-x_k}{x_{k-1}-x_k}+C_k^-\frac{x-x_{k-1}}{x_k-x_{k-1}},$$

а справа –

$$S(x) = Sp_k(x,C) = C_k^+ \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} + C_{k+1}^- \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}.$$

Перевіримо виконання інтерполяційних умов (2).

$$Sp_{k-1}(x_k - 0, C) = C_{k-1}^+ \frac{x_k - x_k}{x_{k-1} - x_k} + C_k^- \frac{x_k - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} = C_k^-,$$

$$Sp_k(x_k + 0, C) = C_k^+ \frac{x_k - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} + C_{k+1}^- \frac{x_k - x_k}{x_{k+1} - x_k} = C_k^+.$$

Теорема 1 доведена.

Визначимо вигляд похибки наближення розривним сплайном (1) та оцінку наближення розривної функції побудованим сплайном, наведені у працях [3] та [7].

Теорема 2. Якщо $f(x) \in C^r[a,b],\ r = 1,2$, то залишок $Rf(x) = f(x) - S(x)$ наближення розривним інтерполяційним сплайном вигляду (1) на кожному інтервалі розбиття буде:

$$Rf(x) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f^{(r)}(\xi) G(x,\xi) d\xi,\ x \in [x_k, x_{k+1}],$$

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} \dfrac{(x_k - \xi)^{r-1}}{(r-1)!}, & x_k \le \xi \le x \le x_{k+1} \\ -\dfrac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} \dfrac{(x_{k+1} - \xi)^{r-1}}{(r-1)!}, & x_k \le x \le \xi \le x_{k+1} \end{cases}.$$

Теорема 3. Оцінка похибки наближення функції *f*(*x*) побудованим розривним інтерполяційним сплайном $S(x) = Sp_k(x)$ на кожному інтервалі $[x_k, x_{k+1}],\ k = \overline{1, n-1}$ має вигляд

$$f(x) \in C^1[x_k, x_{k+1}] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sup_{x_k \le x \le x_{k+1}} |f(x) - Sp_k(x)| \le \frac{x_{k+1} - x_k}{2} \cdot \|f'(x)\|_{L_\infty[x_k, x_{k+1}]}$$

$$f(x) \in C^2[x_k, x_{k+1}] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \|R(x)\|_\infty \le \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{8} \cdot \|f''(x)\|_{L_\infty[x_k, x_{k+1}]}.$$

Зауваження. Якщо $C_k^+ = C_k^- = f(x_k),\ k = \overline{1, n-1}$, то побудований розривний інтерполяційний сплайн вигляду (1) являється неперервним лінійним інтерполяційним сплайном.

Побудова розривного апроксимаційного сплайна

Визначення. Називатимемо розривним апроксимаційним лінійним сплайном на відрізку $[x_k, x_{k+1}],\ k = \overline{1, n-1}$ функцію вигляду (1), де коефіцієнти C_k^+, C_k^- сплайна обчислюються методом найменших квадратів з умови

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} \left(f(t) - S(t) \right)^2 dt \to \min_C . \quad (3)$$

Теорема 4. Оцінка похибки наближення розривної функції *f*(*x*) розривним апроксимаційним сплайном *S*(*x*) вигляду (1), побудованого за допомогою методу найменших квадратів, на кожному інтервалі розбиття $[x_k, x_{k+1}],\ k = \overline{1, n-1}$ має вигляд:

- якщо $f(x) \in C^1[x_k, x_{k+1}]$, то

$$\|S(x)\|_{L_\infty[x_k, x_{k+1}]} \le$$
$$\le \max\{|f(x_k)|, |f(x_{k+1})|\} + \frac{x_{k+1} - x_k}{2} \cdot \|f'(x)\|_{L_\infty[x_k, x_{k+1}]};$$

- якщо $f(x) \in C^2[x_k, x_{k+1}]$, то

$$\|S(x)\|_{L_\infty[x_k, x_{k+1}]} \le \max\{|f(x_k)|, |f(x_{k+1})|\} +$$
$$+ \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{8} \cdot \|f''(x)\|_{L_\infty[x_k, x_{k+1}]}$$

$$L_\infty[a,b] = \lim_{p \to \infty} L_p[a,b].$$

Доведення. Розв'яжемо мінімізаційну задачу:

$$J_k(C) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left(f(x) - C_k^+ \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} - C_{k+1}^- \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} \right)^2 dx \to \min_C,$$
$$k = \overline{1, n-1}.$$

Випишемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь $\dfrac{\partial J_k(C)}{\partial C_k^+} = 0,\ \dfrac{\partial J_k(C)}{\partial C_{k+1}^-} = 0,$ відносно невідомих C_k^+, C_{k+1}^-:

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} 2 \cdot \left(f(x) - C_k^+ \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} - C_{k+1}^- \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} \right) \cdot \left(-\frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} \right) dx = 0 \\ \displaystyle\int_{x_k}^{x_{k+1}} 2 \cdot \left(f(x) - C_k^+ \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} - C_{k+1}^- \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} \right) \cdot \left(-\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} \right) dx = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} \displaystyle C_k^+ \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{(x - x_{k+1})^2}{(x_k - x_{k+1})^2} dx + C_{k+1}^- \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{(x - x_k)(x - x_{k+1})}{(x_{k+1} - x_k)(x_k - x_{k+1})} dx = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{f(x)(x - x_{k+1})}{x_k - x_{k+1}} dx \\ \displaystyle C_k^+ \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{(x - x_{k+1})(x - x_k)}{(x_k - x_{k+1})(x_{k+1} - x_k)} dx + C_{k+1}^- \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{(x - x_k)^2}{(x_{k+1} - x_k)^2} dx = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{f(x)(x - x_k)}{x_{k+1} - x_k} dx \end{cases}.$$

В отриманій системі зробимо заміну $C_{k+1}^- = f(x_{k+1} - 0) + \varepsilon_{k+1}, \quad C_k^+ = f(x_k + 0) + \varepsilon_k$, та замінимо *f*(*x*) інтерполяційним поліномом Лагранжа із залишковим членом *R*(*x*). Отримаємо наступні вирази для інтегральних членів системи:

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) \cdot \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} dx = \frac{1}{3}(x_{k+1} - x_k) f(x_k + 0) +$$
$$+ \frac{1}{6}(x_{k+1} - x_k) f(x_{k+1} - 0) + \int_{x_k}^{x_{k+1}} R(x) \cdot \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} dx;$$

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} dx =$$
$$= \frac{1}{(x_k - x_{k+1})^2} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (x - x_{k+1})^2 dx = \frac{1}{3}(x_{k+1} - x_k);$$

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}dx = \frac{1}{6}(x_{k+1}-x_k);$$

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}dx = = \frac{1}{3}(x_{k+1}-x_k);$$

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\cdot\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}dx = \frac{1}{3}(x_{k+1}-x_k)f(x_k+0) +$$

$$\frac{1}{6}(x_{k+1}-x_k)f(x_{k+1}-0) + \int_{x_k}^{x_{k+1}} R(x)\cdot\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}dx;$$

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\cdot\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}dx = \frac{1}{6}(x_{k+1}-x_k)f(x_k+0) +$$

$$\frac{1}{3}(x_{k+1}-x_k)f(x_{k+1}-0) + \int_{x_k}^{x_{k+1}} R(x)\cdot\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}dx\cdot$$

Отримаємо таку систему:

$$\begin{cases} \frac{1}{3}(x_{k+1}-x_k)\cdot\varepsilon_k + \frac{1}{6}(x_{k+1}-x_k)\cdot\varepsilon_{k+1} = \int_{x_k}^{x_{k+1}} R(x)\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}dx \\ \frac{1}{6}(x_{k+1}-x_k)\cdot\varepsilon_k + \frac{1}{3}(x_{k+1}-x_k)\cdot\varepsilon_{k+1} = \int_{x_k}^{x_{k+1}} R(x)\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}dx. \end{cases} \quad (4)$$

Використовуючи результати теореми 3 та позначення $\|\varepsilon\| = \max\{\varepsilon_k, \varepsilon_{k+1}\}$, перепишемо систему (4) як:

1) якщо $f(x)\in C^1[x_k, x_{k+1}]$, то

$$\begin{cases} \frac{1}{3}(x_{k+1}-x_k)\cdot\|\varepsilon\| \le \frac{1}{6}(x_k-x_{k+1})\cdot\|\varepsilon\| + \|f'(x)\|_\infty\left(\frac{x_{k+1}-x_k}{2}\right)^2 \\ \frac{1}{6}(x_{k+1}-x_k)\cdot\|\varepsilon\| \le \frac{1}{3}(x_k-x_{k+1})\cdot\|\varepsilon\| + \|f'(x)\|_\infty\left(\frac{x_{k+1}-x_k}{2}\right)^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \|\varepsilon\| \le \frac{x_{k+1}-x_k}{2}\cdot\|f'(x)\|_\infty;$$

2) якщо $f(x)\in C^2[x_k, x_{k+1}]$, то

3)

$$\begin{cases} \frac{1}{3}(x_{k+1}-x_k)\cdot\|\varepsilon\| \le \frac{1}{6}(x_k-x_{k+1})\cdot\|\varepsilon\| + \|f''(x)\|_\infty\frac{(x_{k+1}-x_k)^3}{16} \\ \frac{1}{6}(x_{k+1}-x_k)\cdot\|\varepsilon\| \le \frac{1}{3}(x_k-x_{k+1})\cdot\|\varepsilon\| + \|f''(x)\|_\infty\frac{(x_{k+1}-x_k)^3}{8} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \|\varepsilon\| \le \frac{(x_{k+1}-x_k)^2}{8}\cdot\|f''(x)\|_\infty\cdot$$

Із цих нерівностей і випливає доведення теореми 4.

Теорему 4 доведено.

Наслідок

Якщо наближувана функція $f(x)$ є кусково-лінійною або кусково-сталою функцією з точками розриву $x = x_k$, $k=\overline{1,n}$ і наближуємо її кусково-лінійним сплайном $S(x)$, визначеним формулами (1) з невідомими C_k^+, C_k^-, що обчислюємо з умови (3), то отримаємо точно наближувану функцію, тобто

$$S(x) = f(x)\cdot$$

Зауваження. Якщо $C_k^+ = C_k^- = S(x_k)$, $k=\overline{1,n-1}$, то побудований розривний апроксимаційний сплайн вигляду (1) є неперервним лінійним апроксимаційним сплайном.

Чисельний експеримент

Приклад 1.

Нехай задана функція $f(x)$ на інтервалі $[-1,1]$ з двома точками розриву $x = -0.5$, $x = 0.5$ першого роду (рис. 1)

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1, & -1\le x < -0.5 \\ x, & -0.5 \le x < 0.5 \\ x^2-1, & 0.5 \le x \le 1 \end{cases}.$$

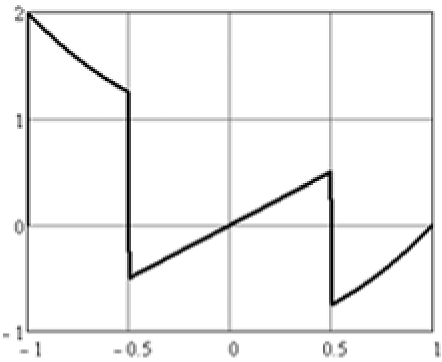


Рис. 1. Графічний вигляд наближуваної функції у прикладі 1

Обираємо вузли сплайна: $x_1 = -1$, $x_2 = -0.5$, $x_3 = 0.5$, $x_4 = 1$. Вважаємо заданими односторонні значення функції у вузлах:

$C_1^+ = f(x_1+0) = 2$, $\quad C_3^- = f(x_3-0) = 0.5$,

$C_2^- = f(x_2-0) = 1.25$, $\quad C_3^+ = f(x_3+0) = -0.75$,

$C_2^+ = f(x_2+0) = -0.5$, $\quad C_4^- = f(x_4-0) = 0$.

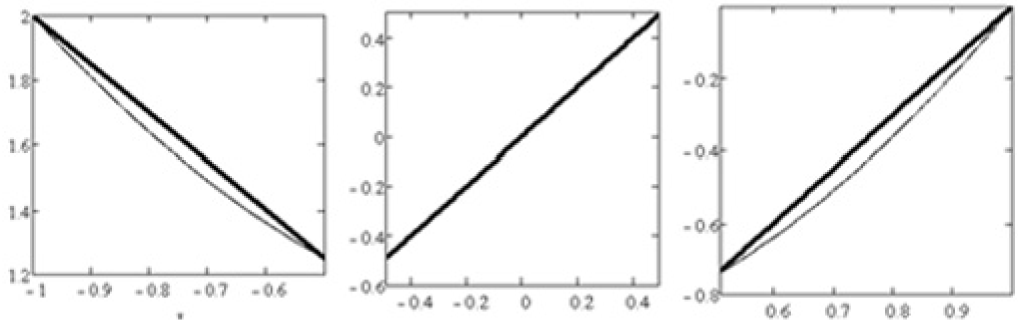
Наближуючий інтерполяційний сплайн, за формулою (1), матиме вигляд (рис. 2):

$$Sp(x) = \begin{cases} -1.5x+0.5, & -1 < x < -0.5 \\ x, & -0.5 < x < 0.5 \\ 1.5x-1.5, & 0.5 < x < 1 \end{cases}.$$

Максимальне відхилення функції $f(x)$ від побудованого інтерполяційного сплайну дорівнює

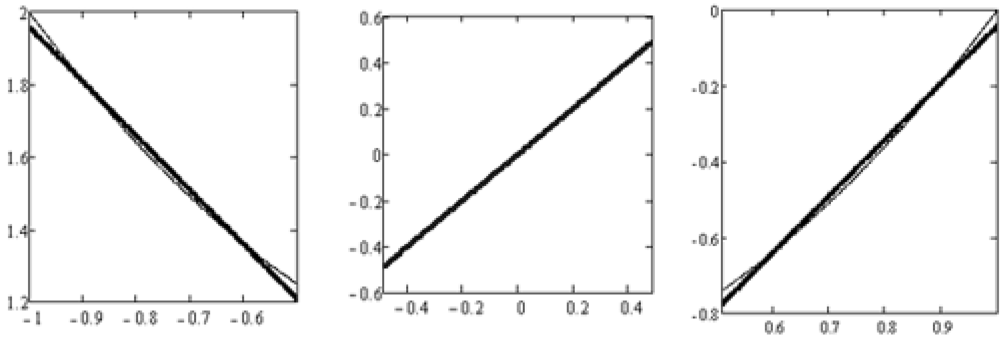
$$\max|f(x) - Sp(x)| \approx 0.06\cdot$$

Тепер побудуємо апроксимаційний сплайн як формулу (1), де коефіцієнти матриці C шукаємо з умови (3), тобто сплайн набуває вигляду (див. рис. 3):



1 *2* *3*

Рис. 2. Графічний вигляд функції *f*(*x*) (тонка лінія) та наближуючого інтерполяційного сплайну *Sp*(*x*) (товста лінія) на інтервалі: *1* – (–1, –0.5), *2* – (–0.5, 0.5), *3* – (0.5, 1)



1 *2* *3*

Рис. 3. Графічний вигляд функції *f*(*x*) (тонка лінія) та наближуваного апроксимаційного сплайну *Sp*(*x*) (товста лінія) на інтервалі: *1* – (–1, –0.5), *2* – (–0.5, 0.5), *3* – (0.5, 1)

$$Sp(x)=\begin{cases}-1.5x+0.46, & -1<x<-0.5\\ x, & -0.5<x<0.5\\ 1.5x-1.54, & 0.5<x<1\end{cases}.$$

Максимальне відхилення функції *f*(*x*) від побудованого інтерполяційного сплайну дорівнює

$$\max\left|f(x)-Sp(x)\right|\approx 0.02\,.$$

Приклад 2. Нехай задана функція *f*(*x*) на інтервалі [–1,1] з трьома точками розриву першого роду (рис. 4)

$$f(x)=\begin{cases}x, & -1\le x<-0.5\\ x^2, & -0.5\le x<0\\ x^2-1, & 0\le x<0.5\\ 1-x, & 0.5\le x\le 1\end{cases}.$$

Обираємо вузли сплайна: $x_1 = -1$, $x_2 = -0.5$, $x_5 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0.5$. Вважаємо заданими односторонні значення функції у вузлах:

$$f(x_1+0)=-1,\qquad f(x_3+0)=-0.5,$$
$$f(x_2-0)=-0.5,\qquad f(x_4-0)=-0.5,$$
$$f(x_2+0)=0.25,\qquad f(x_4+0)=0.5,$$
$$f(x_3-0)=0\,,\qquad f(x_5-0)=0.$$

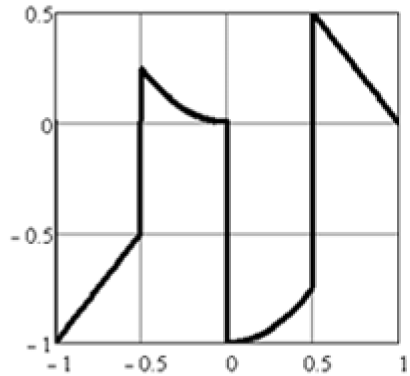


Рис. 4. Аналітичний і графічний вигляд наближуваної функції у прикладі 2

Побудуємо апроксимаційний сплайн як формулу (1), де коефіцієнти матриці *C* обчислюємо з умови (3), тобто сплайн має вигляд (рис. 5)

$$Sp(x)=\begin{cases}x, & -1<x<-0.5\\ -0.5x-0.04, & -0.5<x<0\\ 0.5, & 0<x<0.5\\ 1-x, & 0.5<x<1\end{cases}.$$

Як бачимо, апроксимаційний сплайн точно наближує функцію на тих інтервалах, де вона постійна або задана лінійно. Чисельний експеримент підтверджує викладену теорію.

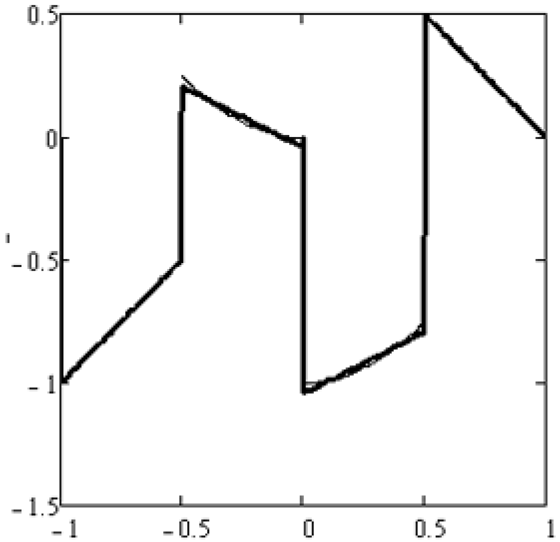


Рис. 5. Графічний вигляд функції $f(x)$ (тонка лінія) і наближуваного апроксимаційного сплайна $Sp(x)$ (товста лінія)

Висновки

Таким чином, у нашій праці запропоновано метод наближення розривної функції однієї змінної розривним інтерполяційним сплайном. Визначено загальний вигляд похибки наближення функції побудованою розривною конструкцією в інтегральному вигляді та наведено оцінки похибки наближення в кожному інтервалі розбиття. Тут також побудовано розривний апроксимаційний лінійний сплайн, коефіцієнти якого знаходяться методом найменших квадратів для наближення розривних функцій. До того ж побудовані розривні сплайни містять як частинний випадок класичні неперервні сплайни першого степеня.

Запропоновані методи наближення розривних функцій використовуватимуться надалі для створення теорії наближення розривних функцій двох змінних розривними сплайнами, яка, своєю чергою, застосовуватиметься для відновлення внутрішньої структури об'єктів, що мають різну щільність, у медичних, геологічних, космічних та інших дослідженнях.

Література

1. Завьялов Ю. С. Методы сплайн-функций / Ю. С. Завьялов, Б. И. Квасов, В. Л. Мирошниченко. – М. : Наука, 1980. – 352 с.
2. Корнейчук Н. П. Сплайны в теории приближения / Н. П. Корнейчук. – М. : Наука, 1976. – 320 с.
3. Литвин О. М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування / О. М. Литвин. – Харків : Основа, 2002. – 544 с.
4. Литвин О. М. Про оцінку похибки наближення диференційованих функцій лінійними сплайнами в нормі $W_2^1(I),\ I=[0,1]$ / О. М. Литвин // Доповіді НАН України. – 2009. – № 1. – С. 25–29.
5. Литвин О. М. Класична формула Тейлора, її узагальнення та застосування / О. М. Литвин, В. Л. Рвачов. – К. : Наук. думка, 1973. – 122 с.
6. Попов Б. А. Равномерное приближение сплайнами / Б. А. Попов. – К. : Наук. думка, 1989. – 272 с.
7. De Vore R. A. A method of grid optimization for finite element methods / R. A. De Vore. – Computer method in appl. Mechanics and engineering. – 1983. – Vol. 41. – P. 29–45.

O. Lytvyn, Y. Pershina

METHOD OF CONSTRUCTION OF EXPLOSIVE LINEAR SPLINES FOR APPROACH OF EXPLOSIVE FUNCTIONS OF ONE VARIABLE

In work methods of construction of explosive linear splines of interpolational and approximating type for approach of one variable function having at least one rupture of the first sort in knots of a partition of definition range of function are offered, using a method of least squares. Estimations of an error of approach of explosive functions are defined by the constructed explosive designs. The offered methods can be used for mathematical modelling of explosive processes in medical, geological, space and other researches.

Keywords: explosive function, explosive spline, interpolation, approximation.

Матеріал надійшов 11.03.2012