УДК 004.42:510.69

Шкільняк О. С.

ТРАНЗИЦІЙНІ КОМПОЗИЦІЙНО-НОМІНАТИВНІ МОДАЛЬНІ ЛОГІКИ ТА ЇХ ЧИСЛЕННЯ

Досліджено програмно-орієнтовні логічні формалізми модального типу – транзиційні композиційно-номінативні модальні логіки. В межах цих логік можна виділити мультимодальні, темпоральні, епістемічні композиційно-номінативні логіки еквітонних предикатів. Для таких логік побудовано першопорядкові числення секвенційного типу.

Ключові слова: композиційно-номінативна логіка, модальна логіка, предикат, секвенційне числення.

Апарат модальних логік успішно використовується для розв'язання різноманітних задач з інформатики й програмування [6]. Темпоральні логіки ефективно застосовуються для моделювання динамічних систем, специфікації та верифікації програм. Для опису інформаційних та експертних систем, баз даних і баз знань з неповною інформацією використовуються епістемічні логіки. Традиційні модальні логіки базуються на класичній логіці предикатів. Проте така логіка має низку обмежень, що ускладнює її використання. Це мотивує необхідність побудови нових, програмно-орієнтованих класів логічних формалізмів модального типу. Такими є композиційно-номінативні модальні логіки, які поєднують можливості композиційно-номінативних логік часткових квазіарних предикатів і традиційних модальних логік [1]. Дуже важливим класом КНМЛ є транзиційні модальні логіки (ТМЛ), вони відбивають аспект зміни й розвитку предметних областей, описуючи переходи від одного стану світу до іншого. В межах ТМЛ природним чином можуть розглядатися традиційні модальні логіки – алетичні, темпоральні, епістемічні, деонтичні тощо. Підкласами ТМЛ є мультимодальні (ММЛ) та темпоральні (ТмМЛ) композиційно-номінативні логіки. Окремими випадками ММЛ є загальні ТМЛ та епістемічні КНМЛ. Загальні ТМЛ та ТмМЛ досліджувались, зокрема, в роботах [4; 5], для них збудовано числення секвенційного типу. Семантичні властивості ММЛ та епістемічних ТМЛ вивчались в [2; 3].

У статті досліджуються семантичні та синтаксичні властивості першопорядкових ТМЛ еквітонних часткових предикатів. Описано семантичні моделі та мови різних класів таких ТМЛ, зокрема властивості відношення логічного наслідку для множин специфікованих станами формул. На цій основі для таких логік побудовано числення секвенційного типу. Їх особливістю є використання секвенційних форм елімінації кванторів під реномінаціями та спрощених форм елімінації модальностей. Для таких числень доведено теореми коректності й повноти.

Поняття, які тут не визначаються, тлумачимо в сенсі [1; 2; 4; 5].

1. Транзиційні модальні системи

В основі КНМЛ лежить поняття композиційно-номінативної модальної системи (КНМС). КНМС – це об'єкт вигляду $\boldsymbol{M} = (Cms, Fm, Jm)$, де Cms – композиційна модальна система (КМС), Fm –множина формул відповідної мови КНМЛ, Jm – відображення інтерпретації формул на станах світу.

КМС задають семантичні аспекти світу, вони є семантичними моделями реляційного типу. КМС мають вигляд $Cms = (\boldsymbol{S}, \boldsymbol{R}, Pr, C)$, де $\boldsymbol{S}$ – множина станів світу, $\boldsymbol{R}$ – множина відношень на $\boldsymbol{S}$ вигляду $R \subseteq \boldsymbol{S} \times \boldsymbol{S}^n$, Pr – множина предикатів на станах світу, C – множина композицій на Pr, яка визначається базовими модальними композиціями та базовими загальнологічними композиціями відповідного рівня; для чистих першопорядкових логік такими є загальнологічні $\neg, \vee, \boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \exists \boldsymbol{x}$.

Для першопорядкових КНМЛ конкретизуємо $\boldsymbol{S}$ як множину неокласичних [1] алгебраїчних систем вигляду $\alpha = (A_\alpha, Pr_\alpha)$, де Pr_α – множина еквітонних предикатів вигляду ${}^{V}A_\alpha \to \{T, F\}$. Тоді $A = \bigcup_{\alpha \in S} A_\alpha$ – множина усіх базових даних світу, $Pr = \bigcup_{\alpha \in S} Pr_\alpha$ – множина предикатів усіх станів світу.

Транзиційна модальна система (ТМС) – це КНМС, у якої $\boldsymbol{R}$ складається з відношень вигляду $R \subseteq \boldsymbol{S} \times \boldsymbol{S}$. Трактуємо R як відношення переходу (досяжності) на станах. ТМС із базовими модальними композиціями $\{\mathbf{K}_i \mid i \in I\}$ та $\boldsymbol{R} = \{\triangleright_i \mid i \in I\}$, де кожному $\triangleright_i$ зіставлено $\mathbf{K}_i$, назвемо *мультимодальними* (ММС). ТМС із єдиною базовою модальною композицією $\Box$ (необхідно), у яких $\boldsymbol{R} = \{\triangleright\}$, назвемо *загальними* (ЗТМС). ТМС, у яких $\boldsymbol{R} = \{\triangleright\}$, а базовими модальними композиціями є $\Box_\uparrow$ (завжди буде) та $\Box_\downarrow$ (завжди було), назвемо *темпоральними* (ТмМС).

Для ЗТМС та ТмМС також задають *дуальні* композиції $\Diamond$ (можливо), $\Diamond_\uparrow$ (колись буде), $\Diamond_\downarrow$ (колись було) : $\Diamond P$, $\Diamond_\uparrow P$, $\Diamond_\downarrow P$ означають $\neg\Box\neg P$, $\neg\Box_\uparrow\neg P$, $\neg\Box_\downarrow\neg P$.

Залежно від властивостей відношень переходу можна визначати різні класи ТМС. Традиційно розглядають випадки, коли ці відношення можуть бути рефлексивними, симетричними чи транзитивними. Якщо в ММС всі $\triangleright_i$ рефлексивні, то в назві ММС пишемо символ R; якщо всі $\triangleright_i$ транзитивні, то пишемо T; якщо всі $\triangleright_i$ симетричні, то пишемо S. Отримуємо такі чисті типи ММС:

R-ММС, *T*-ММС, *S*-ММС, *RT*-ММС, *RS*-ММС, *TS*-ММС, *RTS*-ММС.

Аналогічно, розглядаючи випадки, коли відношення $\triangleright$ може бути рефлексивним, симетричним чи транзитивним, отримуємо відповідні класи ТмМС та ЗТМС:

R-ЗТМС, *T*-ЗТМС, *S*-ЗТМС, *RT*-ЗТМС, *RS*-ЗТМС, *TS*-ЗТМС, *RTS*-ЗТМС;

R-ТмМС, *T*-ТмМС, *S*-ТмМС, *RT*-ТмМС, *RS*-ТмМС, *TS*-ТмМС, *RTS*-ТмМС.

ММС із скінченними множинами однотипних відношень переходу названо [2, 3] *епістемічними* (ЕМС).

Зауважимо, що для загального випадку ММС можливі складніші, змішані типи (напр., $\triangleright_1$ симетричне, $\triangleright_2$ транзитивне й рефлексивне, $\triangleright_2$ рефлексивне тощо).

Опишемо мову чистих першопорядкових ТМС. Алфавіт мови: множини V предметних імен та Ps предикатних символів (ПС); символи базових композицій $\neg$, $\vee$, $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}$, $\exists x$; множина Ms символів базових модальних композицій (модальна сигнатура). Множина Fm формул мови визначається індуктивно:

FA) кожний $p \in Ps$ – (атомарна) формула;

FL) нехай $\Phi, \Psi \in Fm$; тоді $\neg\Phi \in Fm$, $\vee\Phi\Psi \in Fm$, $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \in Fm$, $\exists x\Phi \in Fm$;

FM) нехай $\Phi \in Fm$, $\text{⌘} \in Ms$; тоді $\text{⌘}\Phi \in Fm$.

Для ММС маємо $Ms = \{\mathrm{K}_i \mid i \in I\}$, тоді п. FM визначення формули має вигляд:

FK) нехай $\Phi \in Fm$, $\mathrm{K}_i \in Ms$; тоді $\mathrm{K}_i\Phi \in Fm$.

Для ТмМС маємо $Ms = \{\Box_\uparrow, \Box_\downarrow\}$, п. FM визначення формули має вигляд:

FT) нехай $\Phi \in Fm$; тоді $\Box_\uparrow\Phi, \Box_\downarrow\Phi \in Fm$.

Для ЗТМС маємо $Ms = \{\Box\}$, тоді п. FM визначення формули має вигляд:

F□) нехай $\Phi \in Fm$; тоді $\Box\Phi \in Fm$.

Задамо відображення інтерпретації формул на станах. Спочатку задамо відображення $Im : Ps \times S \to Pr$, при цьому вважаємо $Im(p, \alpha) \in Pr_\alpha$. Продовжимо Im до відображення $Jm : Fm \times S \to Pr$. При цьому $Jm(\Phi, \alpha) \in Pr_\alpha$.

IA) $Jm(p, \alpha) = Im(p, \alpha)$ для всіх $p \in Ps$;

IL) $Jm(\neg, \alpha) = \neg(Jm(\Phi, \alpha))$;

$Jm(\vee\Phi\Psi, \alpha) = \vee(Jm(\Phi, \alpha), Jm(\Psi, \alpha))$;

$Jm(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Phi, \alpha) = \boldsymbol{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(Jm(\Phi, \alpha))$;

$Jm(\exists x\Phi, \alpha)(d) =$

$$= \begin{cases} T, \text{ якщо } Jm(\Phi,\alpha)(d\nabla x \mapsto a) = T \text{ для деякого } a \in A_\alpha, \\ F, \text{ якщо } Jm(\Phi,\alpha)(d\nabla x \mapsto a) = F \text{ для всіх } a \in A_\alpha, \\ \text{невизначене в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

Для модалізованих формул у випадку ММС додаємо пункт:

IK) $Jm(\mathrm{K}_i\Phi, \alpha)(d) =$

$$= \begin{cases} T, \text{ якщо } Jm(\Phi,\delta)(d) = T \text{ для всіх } \delta \in S: \alpha \triangleright_i \delta, \\ F, \text{ якщо існує } \delta \in S: \alpha \triangleright_i \delta \text{ та } Jm(\Phi,\delta)(d) = F, \\ \text{невизначене в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

Якщо для α не існує такого β, що $\alpha \triangleright_i \beta$, то $Jm(\mathrm{K}_i\Phi, \alpha)(d)_\uparrow$ для всіх $d \in {}^V\!A_\alpha$.

У випадку ТмМС додаємо пункт:

IT) $Jm(\Box_\uparrow\Phi, \alpha)(d) =$

$$= \begin{cases} T, \text{ якщо } Jm(\Phi,\delta)(d) = T \text{ для всіх } \delta \in S: \alpha \triangleright \delta, \\ F, \text{ якщо існує } \delta \in S: \alpha \triangleright \delta \text{ та } Jm(\Phi,\delta)(d) = F, \\ \text{невизначене в усіх інших випадках;} \end{cases}$$

$Jm(\Box_\downarrow\Phi, \alpha)(d) =$

$$= \begin{cases} T, \text{ якщо } Jm(\Phi,\delta)(d) = T \text{ для всіх } \delta \in S: \delta \triangleright \alpha, \\ F, \text{ якщо існує } \delta \in S: \delta \triangleright \alpha \text{ та } Jm(\Phi,\delta)(d) = F, \\ \text{невизначене в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

Якщо для α не існує такого β, що $\alpha \triangleright \beta$, то $Jm(\Box_\uparrow\Phi, \alpha)(d)_\uparrow$ для всіх $d \in {}^V\!A_\alpha$; якщо для α не існує такого β, що $\beta \triangleright \alpha$, то $Jm(\Box_\downarrow\Phi, \alpha)(d)_\uparrow$ для всіх $d \in {}^V\!A_\alpha$.

У випадку ЗТМС додаємо пункт:

I□) $Jm(\Box\Phi, \alpha)(d) =$

$$= \begin{cases} T, \text{ якщо } Jm(\Phi,\delta)(d) = T \text{ для всіх } \delta \in S: \alpha \triangleright \delta, \\ F, \text{ якщо існує } \delta \in S: \alpha \triangleright \delta \text{ та } Jm(\Phi,\delta)(d) = F, \\ \text{невизначене в усіх інших випадках.} \end{cases}$$

Якщо для α не існує такого β, що $\alpha \triangleright \beta$, то $Jm(\Box\Phi, \alpha)(d)_\uparrow$ для кожного $d \in {}^V\!A_\alpha$.

Предикат $Jm(\Phi, \alpha)$, який є значенням формули Φ у стані α, позначаємо Φ_α.

ТМС скорочено позначаємо як $(\boldsymbol{S}, \boldsymbol{R}, A, Jm)$.

У подальшому викладі вважаємо, що Ms конкретизоване так: $Ms = \{\mathrm{K}_i \mid i \in I\}$ для ММС, $Ms = \{\Box_\uparrow, \Box_\downarrow\}$ для ТмМС, $Ms = \{\Box\}$ для ЗТМС.

Тип ТМС визначається її модальною сигнатурою *Ms*, однотипністю відношень із $\boldsymbol{R}$ для кожного ⌘$\in Ms$ та сигнатурою синтетичної неістотності [1].

Формула Φ істинна в стані α, якщо Φ_α – істинний предикат.

Φ істинна в ТМС $\boldsymbol{M}$ (позн. $\boldsymbol{M} \models \Phi$), якщо Φ_α є істинним для кожного $\alpha \in \boldsymbol{S}$.

Φ усюди істинна (позн. $\models \Phi$), якщо $\boldsymbol{M} \models \Phi$ для всіх ТМС $\boldsymbol{M}$ одного типу.

Можна виділити [5] ТМС із сильною умовою визначеності на станах (названі *St*-ТМС) та ТМС із загальною умовою визначеності на станах (названі *Gn*-ТМС). Модальні композиції *St*-ТМС не зберігають [5] еквітонність предикатів, а зберігають лише слабку еквітонність. Тому сильна умова визначеності може призвести до порушення інформаційної монотонності. Водночас модальні композиції *Gn*-ТМС вже зберігають [5] еквітонність, тому основну увагу приділимо розгляду *Gn*-ТМС.

Символи модальних композицій можна [5] проносити через реномінації:

для довільних ⌘$\in Ms$ маємо $\models R_{\bar{x}}^{\bar{v}}$⌘$\Phi \leftrightarrow$⌘$R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Phi$.

Взаємодія модальних композицій та кванторів складніша [5].

Для довільних ⌘$\in Ms$ маємо $\models \exists x$⌘$\Phi \to$ ⌘$\exists x\Phi$ та $\models$ ⌘$\forall x\Phi \to \forall x$⌘$\Phi$.

Водночас $\not\models \forall x$⌘$\Phi \to$ ⌘$\forall x\Phi$ та $\not\models$ ⌘$\exists x\Phi \to \exists x$⌘$\Phi$.

2. Секвенційні числення транзиційних модальних логік

Секвенційні числення ТМЛ будуємо на основі властивостей відношення логічного наслідку для множин специфікованих станами формул.

Специфікована станом формула має вигляд Φ^α, де Φ – формула мови, α – її специфікація (відмітка), яку трактуємо як ім'я стану світу.

Нехай $\boldsymbol{M}$ – ТМС із множиною станів $\boldsymbol{S}$, Γ – множина специфікованих станами формул, в якої специфікації (імена станів) утворюють множину S.

Множина Γ *узгоджена* із ТМС $\boldsymbol{M}$, якщо задана ін'єкція S у $\boldsymbol{S}$.

Нехай Δ та Γ – множини специфікованих станами формул.

Δ є логічним наслідком Γ в узгодженій із ними ТМС $\boldsymbol{M}$ (позн. $\Gamma \models_M \Delta$), якщо для всіх $d \in {}^V\!A$ із умови $\Phi_\alpha(d_\alpha) = T$ для всіх $\Phi^\alpha \in \Gamma$ випливає: неможливо $\Psi_\beta(d_\beta) = F$ для всіх $\Psi^\beta \in \Delta$. Надалі запис $\Gamma \models_M \Delta$ матиме на увазі узгодженість $\boldsymbol{M}$ із Γ та Δ.

Δ є логічним наслідком Γ (відносно КНМС певного типу), що позначаємо $\Gamma \models \Delta$, якщо $\Gamma \models_M \Delta$ для всіх ТМС $\boldsymbol{M}$ відповідного типу.

Звідси маємо: $\Gamma \not\models \Delta \Leftrightarrow$ існують узгоджена із Γ та Δ КНМС $\boldsymbol{M}$ та $d \in {}^V\!A$ такі, що для всіх $\Phi^\alpha \in \Gamma$ маємо $\Phi_\alpha(d_\alpha) = T$ та для всіх $\Psi^\beta \in \Delta$ маємо $\Psi_\beta(d_\beta) = F$.

Розглянемо основні властивості відношення логічного наслідку для множин специфікованих станами формул. Немодальні властивості повторюють відповідні [2] властивості логічного наслідку для множин формул логіки еквітонних предикатів. До них віднесемо наведені в [4] властивості $\neg_\vdash$, $\neg_\dashv$, $\vee_\vdash$, $\vee_\vdash$, $RT_\vdash$, $RT_\dashv$, $\Phi N_\vdash$, $RR_\vdash$, $RR_\dashv$, $R\neg_\vdash$, $R\neg_\dashv$, $R\vee_\vdash$, $R\vee_\dashv$, до яких додаємо такі властивості:

C) якщо $\Gamma \cap \Delta \neq \varnothing$, то $\Gamma \models_M \Delta$.

U) нехай $\Gamma \subseteq \Upsilon$ та $\Delta \subseteq \Sigma$. Тоді $\Gamma \models_M \Delta \Rightarrow \Upsilon \models_M \Sigma$;

$R\exists R_\vdash$) $R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\exists x\Phi)^\alpha, \Gamma \models_M \Delta \Leftrightarrow R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)^\alpha, \Gamma \models_M \Delta$;

зокрема, $R_y^x(\exists x\Phi)^\alpha, \Gamma \models_M \Delta \Leftrightarrow \exists x\Phi^\alpha, \Gamma \models_M \Delta$;

$R\exists R_\dashv$) $\Gamma \models_M \Delta, R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\exists x\Phi)^\alpha \Leftrightarrow \Gamma \models_M \Delta, R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)^\alpha$;

зокрема, $\Gamma \models_M \Delta, R_y^x(\exists x\Phi)^\alpha \Leftrightarrow \Gamma \models_M \Delta, \exists x\Phi^\alpha$.

Із елімінацією кванторів (зокрема, під реномінацією) пов'язано властивості:

$\exists R_\vdash$) $R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)^\alpha, \Gamma \models_M \Delta \Leftrightarrow R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi)^\alpha, \Gamma \models_M \Delta$ (тут $y \in V_T$, $y \notin nm\,(\Gamma, \Delta, R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi))$);

$\exists_\vdash$) $\exists x\Phi^\alpha, \Gamma \models_M \Delta \Leftrightarrow R_y^x(\Phi)^\alpha, \Gamma \models_M \Delta$ (тут $y \in V_T$ та $y \notin nm\,(\Gamma, \Delta, \Phi)$);

$\exists R_\dashv$) $\Gamma \models_M \Delta, R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi)^\alpha, R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)^\alpha \Leftrightarrow \Gamma \models_M \Delta, R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi)^\alpha$;

$\exists_\dashv$) $\Gamma \models_M \Delta, R_y^x(\Phi)^\alpha, \exists x\Phi^\alpha \Leftrightarrow \Gamma \models_M \Delta, \exists x\Phi^\alpha$.

Властивості, пов'язані з пронесенням кванторів через реномінацію:

R⌘$_\vdash$) $\Gamma, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}($⌘$\Phi)^\alpha \models_M \Delta \Leftrightarrow \Gamma,$ ⌘$R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)^\alpha \models_M \Delta$, де ⌘$\in Ms$;

R⌘$_\dashv$) $\Gamma \models_M \Delta, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}($⌘$\Phi)^\alpha \Leftrightarrow \Gamma \models_M \Delta,$ ⌘$R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)^\alpha$, де ⌘$\in Ms$.

Розглянемо елімінацію модальностей. У випадку ММС маємо (тут $K_i \in Ms$):

$K_{i\vdash}$) $K_i\Phi^\alpha, \Gamma \models_M \Delta \Leftrightarrow \{\Phi^\beta \mid \alpha \rhd_i \beta\} \cup \Gamma \models_M \Delta$;

$K_{i\dashv}$) $\Gamma \models_M \Delta, K_i\Phi^\alpha \Leftrightarrow \Gamma \models_M \Delta, \Phi^\beta$ для всіх станів $\beta \in \boldsymbol{S}$ таких, що $\alpha \rhd_i \beta$.

У випадку ТмМС маємо:

$\Box_{\uparrow\vdash}$) $\Box_\uparrow\Phi^\alpha, \Gamma \models_M \Delta \Leftrightarrow \{\Phi^\beta \mid \alpha \rhd \beta\} \cup \Gamma \models_M \Delta$;

$\Box_{\uparrow\dashv}$) $\Gamma \models_M \Delta, \Box_\uparrow\Phi^\alpha \Leftrightarrow \Gamma \models_M \Delta, \Phi^\beta$ для всіх станів $\beta \in \boldsymbol{S}$ таких, що $\alpha \rhd \beta$;

$\Box_{\downarrow\vdash}$) $\Box_\downarrow\Phi^\alpha, \Gamma \models_M \Delta \Leftrightarrow \{\Phi^\beta \mid \beta \rhd \alpha\} \cup \Gamma \models_M \Delta$;

$\Box_{\downarrow\dashv}$) $\Gamma \models_M \Delta, \Box_\downarrow\Phi^\alpha \Leftrightarrow \Gamma \models_M \Delta, \Phi^\beta$ для всіх станів $\beta \in \boldsymbol{S}$ таких, що $\beta \rhd \alpha$.

У випадку ЗТМС маємо:

$\Box_\vdash$) $\Box\Phi^\alpha, \Gamma \models_M \Delta \Leftrightarrow \{\Phi^\beta \mid \alpha \rhd \beta\} \cup \Gamma \models_M \Delta$;

$\Box_\dashv$) $\Gamma \models_M \Delta, \Box\Phi^\alpha \Leftrightarrow \Gamma \models_M \Delta, \Phi^\beta$ для всіх станів $\beta \in \boldsymbol{S}$ таких, що $\alpha \rhd \beta$.

Секвенційні форми мусять зберігати |= при переході від засновків до висновку та зберігати |≠ при переході від висновку до засновків. Тому для властивостей відношення |= записуємо відповідні *дуальні* властивості відношення |≠, які отримуємо контрапозицією властивостей |=. Майже всюди формально замінюємо $|\!=_M$ на $|\!\neq_M$, лише для $\vee_{\vdash}$ та властивостей вигляду $⌘_{\dashv}$ дуальні ${}_{\vdash}\vee$ та ${}_{\dashv}⌘$ задаємо інакше:

${}_{\vdash}\vee$) $\Phi\vee\Psi^{\alpha}, \Gamma|\!\neq_M\Delta \Leftrightarrow \Phi^{\alpha}, \Gamma|\!\neq_M\Delta$ або $\Psi^{\alpha}, \Gamma|\!\neq_M\Delta$;

${}_{\dashv}\mathrm{K}_i$) $\Gamma|\!\neq_M\Delta, \Box\Phi^{\alpha} \Leftrightarrow \Gamma|\!\neq_M\Delta, \Box\Phi^{\beta}$ для деякого $\beta\in\boldsymbol{S}$ такого, що $\alpha\rhd_i\beta$.

Так само записуємо ${}_{\dashv}\Box$ для ЗТМС, ${}_{\dashv}\Box_{\uparrow}$ і ${}_{\dashv}\Box_{\downarrow}$ для ТмМС.

Наведені властивості відношення логічного наслідку індукують (окрім C і U) відповідні секвенційні форми, а властивість C задає умову замкненості секвенції.

Специфікацією стану назвемо слово вигляду α|– чи α–|, де α – ім'я стану. Стани іменуємо натуральними числами. Початковий стан позначаємо як 0.

Секвенції збагачуємо збудованими на даний момент виведення множинами станів та відношень на станах. Нехай Σ – множина специфікованих формул, $\alpha\ \{A_{\alpha}\}$, $\beta\ \{A_{\beta}\}$, … – побудовані на даний момент стани із множинами їх базових даних; M – схема моделі світу, тобто збудоване на цей момент відношення досяжності, записане для імен станів, St – множина імен станів на даний момент. Збагачені секвенції записуємо як $\Sigma\ //\ \alpha\ \{A_{\alpha}\}, \beta\ \{A_{\beta}\}, \ldots\ //\ M$, скорочено як $\Sigma\ //\ St\ //\ M$.

Наведемо базові секвенційні форми числень чистих першопорядкових ТМЛ еквітонних предикатів. Форми, аналогічні відповідним формам числень логіки еквітонних квазіарних предикатів [2], не змінюють схему моделі світу:

$${}_{\vdash}\neg\ \frac{{}_{\alpha\dashv}A,\Sigma\ //St//M}{{}_{\alpha\vdash}\neg A,\Sigma\ //St//M};$$

$${}_{\dashv}\neg\ \frac{{}_{\alpha\vdash}A,\Sigma\ //St//M}{{}_{\alpha\dashv}\neg A,\Sigma\ //St//M};$$

$${}_{\vdash}\vee\ \frac{{}_{\alpha\vdash}A,\Sigma\ //St//M \qquad {}_{\alpha\vdash}B,\Sigma\ //St//M}{{}_{\alpha\vdash}A\vee B,\Sigma\ //St//M};$$

$${}_{\dashv}\vee\ \frac{{}_{\alpha\dashv}A,{}_{\alpha\dashv}B,\Sigma\ //St//M}{{}_{\alpha\dashv}A\vee B,\Sigma\ //St//M};$$

$${}_{\vdash}\mathrm{RT}\ \frac{{}_{\alpha\vdash}R^{\bar v}_{\bar x}(A),\Sigma\ //St//M}{{}_{\alpha\vdash}R^{z,\bar v}_{z,\bar x}(A),\Sigma\ //St//M};$$

$${}_{\dashv}\mathrm{RT}\ \frac{{}_{\alpha\dashv}R^{\bar v}_{\bar x}(A),\Sigma\ //St//M}{{}_{\alpha\dashv}R^{z,\bar v}_{z,\bar x}(A),\Sigma\ //St//M};$$

$${}_{\vdash}\mathrm{RR}\ \frac{{}_{\alpha\vdash}R^{\bar v}_{\bar x}\circ{}^{\bar w}_{\bar y}(A),\Sigma\ //St//M}{{}_{\alpha\vdash}R^{\bar v}_{\bar x}(R^{\bar w}_{\bar y}(A)),\Sigma\ //St//M};$$

$${}_{\dashv}\mathrm{RR}\ \frac{{}_{\alpha\dashv}R^{\bar v}_{\bar x}\circ{}^{\bar w}_{\bar y}(A),\Sigma\ //St//M}{{}_{\alpha\dashv}R^{\bar v}_{\bar x}(R^{\bar w}_{\bar y}(A)),\Sigma\ //St//M};$$

$${}_{\vdash}\mathrm{R}\neg\ \frac{{}_{\alpha\vdash}\neg R^{\bar v}_{\bar x}(A),\Sigma\ //St//M}{{}_{\alpha\vdash}R^{\bar v}_{\bar x}(\neg A),\Sigma\ //St//M};$$

$${}_{\dashv}\mathrm{R}\neg\ \frac{{}_{\alpha\dashv}\neg R^{\bar v}_{\bar x}(A),\Sigma\ //St//M}{{}_{\alpha\dashv}R^{\bar v}_{\bar x}(\neg A),\Sigma\ //St//M};$$

$${}_{\dashv}\mathrm{R}\vee\ \frac{{}_{\alpha\dashv}R^{\bar v}_{\bar x}(A)\vee R^{\bar v}_{\bar x}(B),\Sigma\ //St//M}{{}_{\alpha\dashv}R^{\bar v}_{\bar x}(A\vee B),\Sigma\ //St//M};$$

$${}_{\vdash}\mathrm{R}\vee\ \frac{{}_{\alpha\vdash}R^{\bar v}_{\bar x}(A)\vee R^{\bar v}_{\bar x}(B),\Sigma\ //St//M}{{}_{\alpha\vdash}R^{\bar v}_{\bar x}(A\vee B),\Sigma\ //St//M};$$

$${}_{\vdash}\Phi\mathrm{N}\ \frac{{}_{\alpha\vdash}R^{\bar v}_{\bar x}(A),\Sigma\ //St//M}{{}_{\alpha\vdash}R^{y,\bar v}_{z,\bar u}(A),\Sigma\ //St//M},$$ де $y\in\mu(A)$;

$${}_{\dashv}\Phi\mathrm{N}\ \frac{{}_{\alpha\dashv}R^{\bar v}_{\bar u}(A),\Sigma\ //St//M}{{}_{\alpha\dashv}R^{y,\bar v}_{z,\bar u}(A),\Sigma\ //St//M},$$ де $y\in\mu(A)$;

$${}_{\vdash}\mathrm{R}\exists\mathrm{R}\ \frac{{}_{\alpha\vdash}R^{\bar u}_{\bar v}(\exists xA),\Sigma\ //St//M}{{}_{\alpha\vdash}R^{\bar u,x}_{\bar v,y}(\exists xA),\Sigma\ //St//M};$$

$${}_{\dashv}\mathrm{R}\exists\mathrm{R}\ \frac{{}_{\alpha\dashv}R^{\bar u}_{\bar v}(\exists xA),\Sigma\ //St//M}{{}_{\alpha\dashv}R^{\bar u,x}_{\bar v,y}(\exists xA),\Sigma\ //St//M};$$

$${}_{\vdash}\mathrm{R}\exists\mathrm{p}\ \frac{{}_{\alpha\vdash}\exists xA,\Sigma\ //St//M}{{}_{\alpha\vdash}R^{x}_{y}(\exists xA),\Sigma\ //St//M};$$

$${}_{\dashv}\mathrm{R}\exists\mathrm{p}\ \frac{{}_{\alpha\dashv}\exists xA,\Sigma\ //St//M}{{}_{\alpha\dashv}R^{x}_{y}(\exists xA),\Sigma\ //St//M}.$$

Форми типів RT, ФN, R∃R, R∃р допоміжні, усі інші форми основні.

Форми елімінації кванторів мають вигляд:

$$_{\vdash}\exists\mathrm{R}\ \frac{{}_{\alpha\vdash}R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(A),\Sigma\ \ //St'//M}{{}_{\alpha\vdash}R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists xA),\Sigma\ \ //St//M};$$

$$_{\dashv}\exists\mathrm{R}\ \frac{{}_{\alpha\dashv}R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists xA),\ {}_{\alpha\dashv}R^{\bar{u},x}_{\bar{v},y}(A),\Sigma\ \ //St//M}{{}_{\alpha\dashv}R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists xA),\Sigma\ \ //St//M};$$

$$_{\vdash}\exists\ \frac{{}_{\alpha\vdash}R^{x}_{y}(A),\Sigma\ \ //St'//M}{{}_{\alpha\vdash}\exists xA,\Sigma\ \ //St//M};$$

$$_{\dashv}\exists\ \frac{{}_{\alpha\dashv}\exists xA,\ {}_{\alpha\dashv}R^{x}_{y}(A),\Sigma\ \ //St//M}{{}_{\alpha\dashv}\exists xA,\Sigma\ \ //St//M}.$$

Для ${}_{\vdash}\exists\mathrm{R}$ умови: $y\in V_T$, $y\notin nm\ (\Gamma,\Delta,R^{\bar{u}}_{\bar{v}}(\exists x\Phi))$; при цьому до носія A_α стану α додається новий елемент y. Для ${}_{\vdash}\exists$ умови: $y\in V_T$, $y\notin nm\ (\Sigma, A)$; до A_α додається новий y.

Форми для пронесення реномінації через модальні оператори (тут $\text{⌘}\in Ms$):

$$_{\vdash}\mathrm{R}\text{⌘}\ \frac{{}_{\alpha\vdash}\text{⌘}R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(A),\Sigma\ \ //St//M}{{}_{\alpha\vdash}R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\text{⌘}A),\Sigma\ \ //St//M};$$

$$_{\dashv}\mathrm{R}\text{⌘}\ \frac{{}_{\alpha\dashv}\text{⌘}R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(A),\Sigma\ \ //St//M}{{}_{\alpha\dashv}R^{\bar{v}}_{\bar{x}}(\text{⌘}A),\Sigma\ \ //St//M}.$$

Форми елімінації модальних операторів записуються по-різному залежно від властивостей відношень переходу. Традиційними є випадки, коли ці відношення можуть бути транзитивними, рефлексивними чи симетричними. Для ТмМЛ треба врахувати, що $\Box_\uparrow$ та $\Box_\downarrow$ при симетричності ⊳ діють ідентично, тому при умові такої симетричності темпоральні числення ідентичні відповідним численням ЗТМЛ.

Наведемо для прикладу форми ${}_{\vdash}\mathbf{K}_i$ та ${}_{\dashv}\mathbf{K}_i$ для таких випадків.

1. *Загальний випадок.* Якщо на $\rhd_i$ не накладено додаткові умови, то маємо:

$$_{\vdash}\mathbf{K}_i\ \frac{{}_{\alpha\vdash}\mathrm{K}_iA,\ {}_{\beta\vdash}A,\ \Sigma\ //\ St\ //\ M}{{}_{\alpha\vdash}\mathrm{K}_iA,\Sigma\ //\ St\ //\ M}.$$

Форма ${}_{\vdash}\mathbf{K}_i$ застосовується до ${}_{\alpha\vdash}\mathrm{K}_iA$ для всіх наявних у даний момент (згідно із схемою моделі світу M) станів β таких, що $\alpha\rhd_i\beta$. Якщо таких станів немає, то вводимо новий стан β (при цьому $A_\beta=A_\alpha$) та додаємо $\alpha\rhd_i\beta$ до M.

$$_{\dashv}\mathbf{K}_i\ \frac{{}_{\beta\dashv}A,\Sigma\ //\ St'//\ M\cup\{\alpha\rhd_i\beta\}}{{}_{\alpha\dashv}\mathrm{K}_iA,\ \Sigma\ //\ St\ //M}.$$

Тут β – новий стан, до схеми моделі світу M додаємо $\alpha\rhd_i\beta$ та задаємо $A_\beta=A_\alpha$.

2. $\rhd_i$ *рефлексивне та симетричне.* У цьому випадку форма ${}_{\vdash}\mathbf{K}_i$ така ж, як для загального випадку, вона застосовується до ${}_{\alpha\vdash}\mathrm{K}_iA$ для всіх наявних у даний момент (згідно із схемою моделі світу M) станів β таких, що $\alpha\rhd_i\beta$ чи $\beta\rhd_i\alpha$. Згідно із рефлексивністю $\rhd_i$ при першому застосуванні ${}_{\vdash}\mathbf{K}_i$ засновок має вигляд ${}_{\alpha\vdash}\mathrm{K}_iA,\ {}_{\alpha\vdash}A,\ \Sigma\ //\ St\ //\ M$.

$$_{\dashv}\mathbf{K}_i\ \frac{{}_{\beta\dashv}A,\Sigma\ //\ St'//\ M\cup\{\alpha\rhd_i\beta,\beta\rhd_i\alpha\}}{{}_{\alpha\dashv}\mathrm{K}_iA,\ \Sigma\ //\ St\ //M}.$$

Тут β – новий стан, до M додаємо $\alpha\rhd_i\beta$ та $\beta\rhd_i\alpha$, задаємо $A_\beta=A_\alpha$.

3. $\rhd_i$ *транзитивне, рефлексивне та симетричне.* У цьому випадку маємо:

$$_{\vdash}\mathbf{K}_i\ \frac{{}_{\alpha\vdash}\mathrm{K}_iA,\ {}_{\beta\vdash}A,\ {}_{\beta\vdash}\mathrm{K}_iA,\ \Sigma\ //\ St\ //\ M}{{}_{\alpha\vdash}\mathrm{K}_iA,\Sigma\ //\ St\ //\ M}.$$

Форма ${}_{\vdash}\mathbf{K}_i$ застосовується до ${}_{\alpha\vdash}\mathrm{K}_iA$ для всіх наявних у даний момент (згідно зі схемою M) станів β таких, що $\alpha\rhd_i\beta$ чи $\beta\rhd_i\alpha$. Специфікована ${}_{\beta\vdash}\mathrm{K}_iA$ тут необхідна через транзитивність $\rhd_i$. Згідно з рефлексивністю $\rhd_i$ при першому застосуванні цієї форми засновок має вигляд ${}_{\alpha\vdash}\mathrm{K}_iA,\ {}_{\alpha\vdash}A,\ \Sigma\ //\ St\ //\ M$.

Форма ${}_{\dashv}\mathbf{K}_i$ така ж, як для випадку 2.

Враховуючи наведені властивості відношення |=, для базових форм маємо:

Теорема 1. Нехай $\dfrac{{}_{\vdash}\Lambda\,{}_{\dashv}\mathrm{K}\ //\ \mathrm{M}}{{}_{\vdash}\Gamma\,{}_{\dashv}\Delta\ //\ \mathrm{M}}$ та $\dfrac{{}_{\vdash}\Lambda\,{}_{\dashv}\mathrm{K}\ //\ \mathrm{M}\qquad {}_{\vdash}\mathrm{X}\,{}_{\dashv}\mathrm{Z}\ //\ \mathrm{M}}{{}_{\vdash}\Gamma\,{}_{\dashv}\Delta\ //\ \mathrm{M}}$ – базові секвенційні форми. Тоді: 1) якщо $\Lambda\models\mathrm{K}$, то $\Gamma\models\Delta$; 2) якщо $\Lambda\models\mathrm{K}$ та $\mathrm{X}\models\mathrm{Z}$, то $\Gamma\models\Delta$.

Наслідок. Для наведених секвенційних форм маємо:

1) із $\Gamma\not\models\Delta$ випливає $\Lambda\not\models\mathrm{K}$; 2) із $\Gamma\not\models\Delta$ випливає $\Lambda\not\models\mathrm{K}$ або $\mathrm{X}\not\models\mathrm{Z}$.

Процедура побудови секвенційного дерева для числень ТМЛ в основному аналогічна відповідній процедурі для секвенційних числень логік квазіарних предикатів [1]. Розглянемо її особливості на прикладі числень ММЛ.

Побудову дерева ведемо паралельно із побудовою схеми моделі світу. Ця схема оновлюється при застосуванні ${}_{\dashv}\mathbf{K}_i$-форм (інколи ${}_{\vdash}\mathbf{K}_i$-форм), які додають нові стани.

Побудова дерева розбита на етапи. На початку побудови зафіксуємо нескінченний список *TN* «нових» тотально неістотних імен, які не зустрічаються в початковій секвенції. Кожне застосування форми проводиться до скінченної множини доступних на даний момент формул. Перед застосуванням основної форми при потребі застосовуємо належну кількість разів форми типів RT, ΦN, R∃R, R∃p.

На кожному етапі спочатку виконуємо всі ${}_{\vdash}\exists$-форми та ${}_{\vdash}\exists$R-форми (щоразу беремо нове $y \in TN$ у відповідному стані). Потім виконуємо інші основні форми, окрім елімінації модальностей. Форми ${}_{\dashv}\exists$ та ${}_{\vdash}\exists$R застосовуємо багатократно – для усіх імен доступних формул даної секвенції та її наступників. Далі виконуємо ${}_{\dashv}\mathbf{K}_i$-форми, потім багатократно (згідно зі схемою моделі світу) – ${}_{\vdash}\mathbf{K}_i$-форми.

Процедура побудови секвенційного дерева завершено позитивно, якщо отримано замкнене дерево. Якщо маємо скінченне незамкнене дерево або процедура не завершується, то в дереві існує скінченний чи нескінченний незамкнений шлях. Кожна з формул початкової секвенції зустрінеться на ньому і стане доступною.

Теорема 2 (коректності). Нехай секвенція ${}_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ вивідна. Тоді $\Gamma \models \Delta$.

Нехай ${}_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ вивідна, тоді для неї побудовано замкнене секвенційне дерево. Усі його листи – замкнені секвенції, тому для кожного такого листа ${}_{\vdash}X_{\dashv}Z$ маємо $X \models Z$. Рух від листів дерева до його кореня здійснюється за допомогою секвенційних форм. За теоремою 1 при переході від засновків до висновків форм зберігається відношення $\models$. Тому для кожної вершини секвенційного дерева ${}_{\vdash}\Lambda_{\dashv}K$ маємо $\Lambda \models K$. Зокрема, для секвенції ${}_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ – кореня дерева – теж маємо $\Gamma \models \Delta$.

Для доведення повноти секвенційних числень ТМЛ використаємо метод систем модельних множин. Система модельних множин – це пара $(\{\boldsymbol{H}_\alpha \mid \alpha \in \boldsymbol{S}\}, M)$, де кожна $\boldsymbol{H}_\alpha$ –модельна множина стану α, *M* – схема моделей світу, яка задається $\boldsymbol{R}$.

Модельна множина стану $\boldsymbol{H}_\alpha$ визначається умовою коректності та умовами переходу. Умова коректності індукується умовою замкненості секвенції:

MC) для кожної примітивної Φ лише одна з ${}_{\alpha\vdash}\Phi$ чи ${}_{\alpha\dashv}\Phi$ може належати до $\boldsymbol{H}_\alpha$

Умови переходу індуковані виконанням відповідних секвенційних форм. Для ЗТМЛ і ТмМЛ їх наведено в [4], вкажемо лише відмінні від наведених умови.

MR∃p) ${}_{\alpha\vdash}R_y^x(\exists x\Phi) \in \boldsymbol{H}_\alpha \Rightarrow {}_{\alpha\vdash}\exists x\Phi \in \boldsymbol{H}_\alpha$;

${}_{\alpha\vdash}R_y^x(\exists x\Phi) \in \boldsymbol{H}_\alpha \Rightarrow {}_{\alpha\dashv}\exists x\Phi \in \boldsymbol{H}_\alpha$;

MR∃R) ${}_{\alpha\vdash}R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\exists x\Phi) \in \boldsymbol{H}_\alpha \Rightarrow {}_{\alpha\vdash}R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi) \in \boldsymbol{H}_\alpha$;

${}_{\alpha\dashv}R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\exists x\Phi) \in \boldsymbol{H}_\alpha \Rightarrow {}_{\alpha\dashv}R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi) \in \boldsymbol{H}_\alpha$;

M∃) Якщо ${}_{\alpha\vdash}\exists x\Phi \in \boldsymbol{H}_\alpha$, то існує $y \in W_\alpha$ таке: ${}_{\alpha\vdash}R_y^x(\Phi) \in \boldsymbol{H}_\alpha$;

якщо ${}_{\alpha\dashv}\exists x\Phi \in \boldsymbol{H}_\alpha$, то ${}_{\alpha\dashv}R_y^x(\Phi) \in \boldsymbol{H}_\alpha$ для всіх $y \in W_\alpha$;

M∃R) якщо ${}_{\alpha\vdash}R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi) \in \boldsymbol{H}_\alpha$, то існує $y \in W_\alpha$ таке: ${}_{\alpha\vdash}R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi) \in \boldsymbol{H}_\alpha$;

якщо ${}_{\alpha\dashv}R_{\bar{v}}^{\bar{u}}(\exists x\Phi) \in \boldsymbol{H}_\alpha$, то ${}_{\alpha\dashv}R_{\bar{v},y}^{\bar{u},x}(\Phi) \in \boldsymbol{H}_\alpha$ для всіх $y \in W_\alpha$.

MR⌘) ${}_{\alpha\vdash}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(⌘\Phi) \in \boldsymbol{H}_\alpha \Rightarrow {}_{\alpha\vdash}⌘R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \in \boldsymbol{H}_\alpha$;

${}_{\alpha\dashv}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(⌘\Phi) \in \boldsymbol{H}_\alpha \Rightarrow {}_{\alpha\dashv}⌘R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \in \boldsymbol{H}_\alpha$.

Тут ⌘∈*Ms*. У випадку ЗТМЛ умову MR⌘ конкретизуємо як MR□, у випадку ТмМЛ – як $\text{MR}\square_\uparrow$ та $\text{MR}\square_\downarrow$, у випадку ММЛ – як MRK (пишемо для всіх $\text{K}_i \in Ms$).

Елімінації модальностей індукують відповідні умови. Для ММЛ вони такі:

MK) якщо ${}_{\alpha\vdash}\text{K}_i\Phi \in \boldsymbol{H}_\alpha$, то ${}_{\beta\vdash}\Phi \in \boldsymbol{H}_\beta$ для всіх $\beta \in \boldsymbol{S}$ таких, що $\alpha \rhd_i \beta$ (тут $\text{K}_i \in Ms$);

якщо ${}_{\alpha\dashv}\text{K}_i\Phi \in \boldsymbol{H}_\alpha$, то ${}_{\beta\dashv}\Phi \in \boldsymbol{H}_\beta$ для деякого $\beta \in \boldsymbol{S}$ такого, що $\alpha \rhd_i \beta$ (тут $\text{K}_i \in Ms$).

Аналогічно записується умова M□ для ЗТМЛ, для ТмМЛ вона розщеплюється на умови $\text{M}\square_\uparrow$ та $\text{H}\square_\downarrow$ (див. [3]).

Теорема 3 (про контрмодель). Нехай ℘ – незамкнений шлях в секвенційному дереві, $\boldsymbol{H}_\alpha$ – множина всіх специфікованих ${}_{\alpha\vdash}$ чи ${}_{\alpha\dashv}$ формул секвенцій шляху ℘, *M* – об'єднання усіх схем моделей світу секвенцій шляху ℘, $\mathbf{H}_M = (\{\boldsymbol{H}_\alpha \mid \alpha \in \boldsymbol{S}\}, M)$ та $W = nm\,(\mathbf{H}_M)$. Тоді існують ТМС $\boldsymbol{M} = (\boldsymbol{S}, \boldsymbol{R}, A, Jm)$ та $\delta \in {}^V\!A$ з $im\,(\delta) = W$ такі: 1) ${}_{\alpha\vdash}\Phi \in \boldsymbol{H}_\alpha \Rightarrow \Phi_\alpha(\delta) = T$; 2) ${}_{\alpha\dashv}\Phi \in \boldsymbol{H}_\alpha \Rightarrow \Phi_\alpha(\delta) = F$.

Для переходу від нижчої вершини шляху до вищої застосовуємо одну з базових форм. Переходи згідно з цими формами відповідають пунктам визначення модельної множини стану. Кожна непримітивна формула на шляху ℘ рано чи пізно буде спрощена чи розкладена згідно з відповідною формою. Всі секвенції шляху $\wp$ незамкнені, тому виконується пункт МС. Отже, $\mathbf{H}_M$ – система модельних множин.

Візьмемо множину A таку, що $|A| = |W|$, та ін'єктивну $\delta \in {}^{V}\!A$ з $im\,(\delta) = W$. Така δ є бієкцією W на A. Нехай $W_\alpha = nm\,(\boldsymbol{H}_\alpha)$, тоді δ_α є бієкцією W_α на A_α. Задамо значення базових предикатів на δ і на іменних множинах вигляду $\mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}\,(\delta)$.

Якщо ${}_{\alpha\vdash}p \in \boldsymbol{H}_\alpha$, то $p_\alpha\,(\delta) = T$;
якщо ${}_{\alpha\dashv}p \in \boldsymbol{H}_\alpha$, то $p_\alpha\,(\delta) = F$.

Якщо ${}_{\alpha\vdash}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(p) \in \boldsymbol{H}_\alpha$, то $p_\alpha\,(\mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}\,(\delta)) = T$;
якщо ${}_{\alpha\dashv}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(p) \in \boldsymbol{H}_\alpha$, то $p_\alpha\,(\mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}\,(\delta)) = F$.

В усіх інших випадках значення $p_\alpha\,(d)$ задаємо довільно (достатньо розглядати $d \in A_\alpha^{W_\alpha}$), враховуючи еквітонність і обмеження щодо неістотності імен: для всіх $d, h \in A_\alpha^{W_\alpha}$ таких, що $d||{-}\mu\,(p) = h||{-}\mu\,(p)$, необхідно $p_\alpha\,(d) = p_\alpha\,(h)$. Так задані значення базових предикатів продовжимо за еквітонністю на відповідні $h \in {}^{W}\!A$.

Для атомарних чи формул вигляду $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(p)$ твердження теореми випливають із визначення значень базових предикатів. Далі доведення ведемо індукцією за складністю формули згідно з побудовою системи модельних множин [4].

Теорема 4 (повноти). Нехай $\Gamma \models \Delta$. Тоді секвенція ${}_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ вивідна.

Припустимо супротивне: $\Gamma \models \Delta$ (тобто $\Gamma \models_M \Delta$ для кожної узгодженої ТМС $\boldsymbol{M}$), проте $\Sigma = {}_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ невивідна. Тоді в секвенційному дереві для Σ існує незамкнений шлях. Звідси $\mathbf{H}_M = (\{\boldsymbol{H}_\alpha \,|\, \alpha \in \boldsymbol{S}\}, M)$ – система модельних множин. За теоремою 3 існують ТМС $\boldsymbol{M} = (\boldsymbol{S}, \boldsymbol{R}, A, Jm)$ та $\delta \in {}^{V}\!A$: ${}_{\alpha\vdash}\Phi \in \boldsymbol{H}_\alpha \Rightarrow \Phi_\alpha\,(\delta) = T$ та ${}_{\alpha\dashv}\Phi \in \boldsymbol{H}_\alpha \Rightarrow \Phi_\alpha\,(\delta) = F$. Зокрема, це вірно для формул секвенції ${}_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$. Тому для всіх $\Phi^\alpha \in \Gamma$ маємо $\Phi_\alpha\,(\delta) = T$ та для всіх $\Psi^\beta \in \Delta$ маємо $\Psi_\beta\,(\delta) = F$. Це заперечує $\Gamma \models_M \Delta$, тому $\Gamma \not\models \Delta$. Отримали суперечність. Отже, припущення про невивідність ${}_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ невірне, що й доводить теорему.

Висновки

У роботі досліджено програмно-орієнтовні логічні формалізми модального типу – транзиційні композиційно-номінативні модальні логіки. В межах цих логік виділяються мультимодальні, темпоральні, епістемічні композиційно-номінативні логіки часткових еквітонних предикатів. Розглянуто семантичні властивості таких логік, зокрема властивості відношення логічного наслідку для множин специфікованих станами формул. На цій основі для чистих першопорядкових логік зазначених класів побудовано секвенційні числення. Їх особливістю є використання секвенційних форм елімінації кванторів під реномінаціями та спрощених форм елімінації модальностей. Доведено коректність та повноту цих числень.

Запропоновані формалізації нових класів модальних логік планується використати в системах автоматизованого доведення Isabelle і SPASS.

Список літератури

1. Математична логіка та теорія алгоритмів : підруч. для студ. кіберн. ф-тів вищ. навч. закл. / М. С. Нікітченко, С. С. Шкільняк; Київ. нац. ун-т ім. Т.Шевченка. – К. : Київ. ун-т, 2008. – 528 с.
2. Нікітченко М. С. Побудова модальних логік темпорального та епістемічного типу на основі композиційно-номінативного підходу / М.С. Нікітченко, О.С. Шкільняк, С.С. Шкільняк // Вісник Київ. ун-ту. Серія: фіз. – мат. науки. – 2011. – Вип. 3. – С. 204–211.
3. Шкільняк О. С. Композиційно-номінативні логіки епістемічного типу / О.С. Шкільняк, С.С. Шкільняк // Наук. записки НаУКМА. Серія: Комп'ютерні науки. – К., 2011. – Т. 125. – С. 4–7.
4. Шкільняк О. С. Секвенційні числення композиційно-номінативних модальних і темпоральних логік / О.С. Шкільняк // Наук. записки НаУКМА. – 2009. – Т. 99. Комп'ютерні науки. – С. 37–44.
5. Шкільняк О. С. Семантичні властивості композиційно-номінативних модальних логік / О.С. Шкільняк // Пробл. програмування. – 2009. – № 4. – С. 11–23.
6. Handbook of Logic in Computer Science : in 5 vol. / [eds. S. Abramsky, D. Gabbay, T.S.E. Maibaum]. – Oxford : Clarendon Press, 1994–2000.

O. Shkilniak

TRANSITIONAL COMPOSITION-NOMINATIVE MODAL LOGICS AND THEIR CALCULI

We study program-oriented logical formalisms of modal type – transitional composition-nominative modal logics. We introduce cases of these logics: multimodal, temporal and epistemic composition-nominative logics of equitone predicates. For the proposed logics first-order sequent calculi are constructed.

Keywords: composition-nominative logic, modal logic, predicate, sequent calculus.

Матеріал надійшов 20.11.2012