УДК 519.8

Горборуков В. В.

ПРО ОДНУ ЗАДАЧУ БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНОГО ВИБОРУ

У статті розглянуто обернену задачу багатокритеріальної оптимізації, яка формалізується в класі моделей дискретного програмування. Для розв'язання задачі запропоновано алгоритм, що базується на методі послідовного аналізу варіантів.

Ключові слова: ранжування альтернатив, багатокритеріальна оптимізація, дискретне програмування, послідовний аналіз варіантів.

Розглядається задача ранжування альтернатив $a \in A = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$ (A – множина альтернатив) за сукупністю показників $f_1(a), f_2(a), \ldots, f_m(a)$. Кожна функція $f_j(a),\ j \in J = \{1 \ldots m\}$ задає значення j-го критерію [2; 3; 7; 8], яке належить або до наперед визначеної множини, або обраховується відповідно до певних математичних правил [3; 6]. У першому випадку можливі варіанти: множина значень задається бальною чи лінгвістичною шкалою [3; 7] або у вигляді числового інтервалу $[f_j^{min}, f_j^{max}]$, який утворюється з усіх можливих значень функції (з мінімального до максимального) з урахуванням точності її обчислення. Прикладом другого випадку є синтез локальних пріоритетів у методі аналізу ієрархій [6]. Отже, можна вважати, що значення j-го критерію завжди є зліченною множиною, позначимо її як Q_j:

$$Q_j = \{f_j^{(1)}, f_j^{(2)}, f_j^{(3)}, \ldots, f_j^{(n_j-1)}, f_j^{(n_j)}\},$$

де $f_j^{(1)} = f_j^{min}$, $f_j^{(n_j)} = f_j^{max}$, $f_j^{(1)} < f_j^{(2)} < \ldots < f_j^{(n_j)}$, $n_j = |Q_j|$ – кількість елементів множини Q_j.

Зазвичай для встановлення порядку

$$A_{i_1} \succ A_{i_2} \succ \ldots \succ A_{i_n} \qquad (1)$$

для кожного елемента множини A береться до уваги деякий узагальнений показник $G(a)$:

$$G(a) = G(f(a), W) = G((f_1(a), \ldots, f_m(a)), (\omega_1, \ldots, \omega_m)),$$
$$a \in A = \{A_1, \ldots, A_n\}, \qquad (2)$$

$$W = (\omega_1, \ldots, \omega_m),\ \sum_{j=1}^{m} \omega_j = 1,\ \omega_j > 0,$$

де значення $G(A_i)$ обчислюються за певним правилом (алгоритмом), причому

$$G(A_{i_1}) \geq G(A_{i_2}) \geq \ldots \geq G(A_{i_n}), \qquad (3)$$

а W є нормованим вектором вагових коефіцієнтів кожного критерію [3; 7]. Місце альтернативи $A' \in A$ у порядку (1) назвемо її рейтингом.

Після розв'язання задачі (1)–(3) може виникнути інша задача: при яких мінімальних змінах значень $f_j(A'),\ j \in J$ можна покращити рейтинг обраної альтернативи A'.

Отже, аналізується певна альтернатива $A' \in A$, яка фігурує в реальній задачі прийняття рішень вигляду (1)–(3), а бажаним результатом розв'язання задачі вважається отримання даною альтернативою рейтингу r, не нижче від наперед заданого значення p $(1 \leq p < n)$. Не зменшуючи узагальненості, будемо вважати, що для кожного показника $f_j(a),\ j \in J$ значення тим краще, чим воно більше. Нехай після визначення вектора вагових коефіцієнтів W і обрання конкретної функції $G(a),\ a \in A$ альтернатива A' посіла в порядку (1) небажане місце r, тобто $r > p$. Для кожного критерію $j \in J$ розглянемо впорядковану множину $\Theta_j = \{\theta_j^0, \theta_j^1, \theta_j^2, \ldots, \theta_j^{l_j}\}$:
$\tilde{Q}_j = \{f_j(A') + \theta_j^0, f_j(A') + \theta_j^1, \ldots, f_j(A') + \theta_j^{l_j}\} \subset Q_j$,
$\theta_j^0 < \theta_j^1 < \ldots < \theta_j^{l_j}$, $\theta_j^0 = 0$.

Множина $\tilde{Q}_j$ утворена такими значеннями показника f_j, які є більшими від $f_j(A')$, l_j – кількість перших таких значень серед усіх можливих, визначена особою, що приймає рішення (ОПР), $0 \leq l_j \leq |\hat{Q}_j| + 1$, $\hat{Q}_j$ – множина всіх значень критерію f_j більших ніж $f_j(A')$:

$$\hat{Q}_j = Q_j \setminus \{f_j^{min}, f_j^{(2)}, f_j^{(3)}, \ldots, f_j(A')\}.$$

ОПР визначає новий вектор переваг $V = (v_1, v_2, \ldots, v_m)$, $\sum_{j=1}^{m} v_j = 1$ з таких міркувань. Чим складніше для альтернативи A' по j-му показнику досягти покращення значення, тим більший коефіцієнт v_j, $j \in J$. Зауважимо, що в кожному конкретному випадку може існувати своя специфіка залежно від типу початкової задачі ранжування, що розглядається.

Таким чином, математична модель задачі має вигляд:

$$h(\theta, V) = \sum_{j=1}^{m} v_j \theta_j \to min \tag{4}$$

$$G\left(f(A', \theta), W\right) \geq G\left(f(A_{i_p}), W\right), \tag{5}$$

$$\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_m) \in \Theta = (\Theta_1 \times \ldots \times \Theta_m), \Theta \subset \mathbb{R}^m, \tag{6}$$

де $f\left(A', \theta\right) = \left(f_1\left(A'\right) + \theta_1, f_2\left(A'\right) + \theta_2, \ldots, f_m\left(A'\right) + \theta_m\right)$, $\theta \in \Theta$.

Наведемо алгоритм розв’язання цієї задачі, що базується на ідеології методу послідовного аналізу варіантів (ПАВ) [4]. Відповідно до цього методу потрібно розробити конструктивні процедури відсіву варіантів [1; 5], що дасть змогу покращити часову характеристику алгоритму шляхом зменшення множини допустимих розв’язків задачі.

Розглянемо випадок, коли для розв’язання задачі (1)–(3) використовується лінійно-адитивна згортка критеріїв [3; 7; 8]. Тоді обмеження (5) матиме вигляд:

$$\sum_{j \in J} \omega_j (f_j(A') + \theta_j) \geq \sum_{j \in J} \omega_j f(A_{i_p})$$

$$\sum_{j \in J} \omega_j \theta_j \geq \sum_{j \in J} \omega_j f(A_{i_p}) - \sum_{j \in J} \omega_j f_j(A')$$

$$\sum_{j \in J} \omega_j \theta_j \geq G\left(A_{i_p}\right) - G\left(A'\right)$$

$$\sum_{j \in J} \omega_j \theta_j \geq G^*,$$

де $G^* = G\left(A_{i_p}\right) - G\left(A'\right) = const$ – це саме той бар’єр, який треба подолати альтернативі A', щоб у підсумку посісти місце не нижче ніж p.

Користуючись термінологією методу *ПАВ,* сформулюємо теореми:

Теорема 1. *Величина*

$$d_j = G^* - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{m} w_k \cdot \max\{\theta_k \mid \theta_k \epsilon \Theta_k\} \tag{7}$$

є допуском для множини Θ_j за обмеженням (5).

Доведення. Нехай для деяких $s (0 \leq s < l_j)$ маємо $w_j \theta_j^s < d_j$, і s' є максимальним з таких індексів. Тоді

$$G\left(f(A', \theta), W\right) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{m} w_k \theta_k + w_j \theta_j^s + G\left(A'\right) < \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{m} w_k \theta_k -$$

$$- \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{m} w_k \cdot \max\left\{\theta_k | \theta_k \epsilon \Theta_k\right\} + G\left(A'\right) - G^* = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{m} w_k \theta_k -$$

$$- \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{m} w_k \cdot \max\left\{\theta_k | \theta_k \epsilon \Theta_k\right\} + G\left(A'\right) + G\left(A_{i_p}\right) -$$

$$- G\left(A'\right) < G\left(f(A_{i_p}), W\right),$$

оскільки

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{m} w_k \theta_k - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{m} w_k \cdot \max\left\{\theta_k | \theta_k \epsilon \Theta_k\right\} < 0.$$

Отже, з Θ_j вилучається множина таких елементів $\{\theta_j^0, \theta_j^1, \theta_j^2, \ldots, \theta_j^{s'}\}$, для яких $w_j \theta_j^s < d_j$, $s = \overline{0, s'}$.

За обмеженням (5) і допусками (7) відсіювання елементів з множин $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_m$ відбувається знизу. Якщо в підсумку множина допустимих розв’язків суттєво не зменшилась, потрібно розглянути допуски за цільовою функцією (4). Нехай на деякому кроці алгоритму розв’язання задачі (4)–(6) отримано допустимий розв’язок θ^* і $h^* = h\left(\theta^*, V\right)$.

Теорема 2. *Величина*

$$c_j = h^* - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{m} v_k \cdot \min\{\theta_k \mid \theta_k \epsilon \Theta_k\} \tag{8}$$

є допуском для множини Θ_j за цільовою функцією (4).

Доведення цього твердження опустимо, оскільки воно є аналогічним теоремі 1.

На відміну від (7), за допуском (8) відбувається відсіювання елементів з множин $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_m$ зверху, тобто з Θ_j вилучається множина всіх таких елементів $\{\theta_j^0, \theta_j^1, \theta_j^2, \ldots, \theta_j^{s'}\}$, для яких $v_j \theta_j^s > c_j$, $s = \overline{0, s'}$.

Таким чином, алгоритм розв’язання задачі (4)–(6) полягає в ітераційному відсіюванні елементів множини $\Theta = (\Theta_1 \times \ldots \times \Theta_m)$ за допусками (7), (8) і формально може бути представлений так.

Крок 0. Якщо при сформованих ОПР значеннях $\theta_1^{l_1}, \theta_2^{l_2}, \ldots, \theta_m^{l_m}$ справджується нерівність $\sum_{j \in J} \omega_j \theta_j^{l_j} < G^*$, задача не має розв’язку. В іншому випадку покладемо $\theta_{min}^* = \left(\theta_1^{l_1}, \theta_2^{l_2}, \ldots, \theta_m^{l_m}\right)$, $\theta_j^{max} = \theta_j^{l_j}$, $\theta_j^{min} = \theta_j^0$, $\Theta_j^{(0)} = \Theta_j, j \in J$, $t = 0$.

Крок 1. Обчислюємо допуски знизу за обмеженням (5):

$$d_j^{(t)} = G^* - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{m} w_k \cdot \theta_j^{max}, \quad j \in J.$$

Визначаємо множину елементів, що залишились:

$$\tilde{\Theta}_j^{(t+1)} = \{\theta_j \,|\, w_j \theta_j \geq d_j^{(t)}, \quad \theta_j \in \Theta_j^{(t)}\}, \; j \in J.$$

Покладемо $\theta_j^{min} = \min\left\{\theta_j \,|\, \theta_j \in \tilde{\Theta}_j^{(t+1)}\right\}, \; j \in J$.

Крок 2. Знаходимо поточний допустимий розв'язок θ^*:

$$\theta^* = \underset{j \in J}{\operatorname{argmin}}\{v_j \cdot \theta_j^{min} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{m} v_k \cdot \theta_j^{max}\}.$$

Якщо $h\left(\theta^*, V\right) < h\left(\theta_{min}^*, V\right)$, покладемо $\theta_{min}^* = \theta^*$.

Крок 3. Обчислюємо допуски зверху за значенням цільової функції:

$$c_j^{(t)} = h\left(\theta_{min}^*, V\right) - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{m} v_k \cdot \theta_j^{min}, \quad j \in J.$$

Визначаємо множину елементів, що залишились:

$$\Theta_j^{(t+1)} = \{\theta_j \,|\, v_j \theta_j \leq c_j^{(t)}, \; \theta_j \in \tilde{\Theta}_j^{(t+1)}\}, \; j \in J.$$

Покладемо $\theta_j^{max} = \max\left\{\theta_j \,|\, \theta_j \in \Theta_j^{(t+1)}\right\}, \; j \in J$.

Крок 4. Якщо $\exists j \in J: \; \Theta_j^{(t+1)} \neq \Theta_j^{(t)}$, покладемо $t := t+1$ і переходимо на крок 1, інакше – на крок 5.

Крок 5. Якщо множина $\Theta^{(t)} = \left(\Theta_1^{(t)} \times \Theta_2^{(t)} \times \ldots \times \Theta_m^{(t)}\right)$ не є об'ємною (з міркувань обчислювальної складності здійснення прямого перебору варіантів), знаходимо оптимальний розв'язок задачі, інакше переходимо на крок 6.

Крок 6. Вводимо обмеження на цільову функцію і, ітераційно змінюючи його методом дихотомії, за допусками типу (8) здійснюємо відсів елементів множини $\Theta^{(t)}$ [5].

Якщо множина допустимих розв'язків задачі (4)–(6) суттєво не зменшилась, оптимальний розв'язок задачі знаходимо спрямованим перебором варіантів.

Роботу алгоритму розглянемо на такому прикладі.

Нехай спочатку розглядалася задача ранжування 18 альтернатив за чотирма показниками з ваговими коефіцієнтами $W = (0,5; 0,25; 0,2; 0,05)$. У табл. 1 наведено розв'язок цієї задачі. З другого по четвертий стовпчики таблиці розміщено значення критеріїв K_1, K_2, K_3, K_4 для альтернатив $A_1, A_2, \ldots, A_{18}$. Останній стовпчик містить значення узагальненого показника (2). Так, наприклад, $G(A_1) = 98 \cdot 0,5 + 91 \cdot 0,25 + 87 \cdot 0,2 + 83 \cdot 0,05 = 93,3$. Оберемо альтернативу A_{12} і сформулюємо для неї задачу (4)–(6) таким чином: за яких мінімальних сумарних відхилень від значень $f_1(A_{12}) = 50$, $f_2(A_{12}) = 60$, $f_3(A_{12}) = 35$, $f_4(A_{12}) = 64$ з новим вектором переваг $V = (0,4; 0,1; 0,45; 0,05)$ можна забезпечити потрапляння A_{12} у першу трійку рейтингу – розв'язку початкової задачі (1)–(3)? Припустимо, що ОПР сформувала множини відхилень $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \Theta_4$ у вигляді табл. 2. Так, наприклад, $\Theta_3 = \{0;11;15;22;24;28;29;32;35;37;40;44;48;51;56;65\}$.

Оскільки альтернатива A_{12} повинна випередити A_3, обчислимо бар'єр G^*, який потрібно подолати, щоб потрапити в першу трійку: $G^* = G(A_3) - G(A_{12}) = 85,2 - 50,2 = 35$.

Таблиця 1. **Рейтинговий список альтернатив**

	K_1	K_2	K_3	K_4	$G(A)$
A1	98	91	87	83	93,3
A2	89	94	90	90	90,5
A3	95	81	79	33	85,2
A4	95	52	77	80	79,9
A5	78	75	73	43	74,5
A6	93	45	47	88	71,55
A7	70	87	64	17	70,4
A8	56	97	70	53	68,9
A9	50	63	93	77	63,2
A10	51	98	51	54	62,9
A11	75	38	33	62	56,7
A12	50	60	35	64	50,2
A13	40	57	56	63	48,6
A14	54	40	37	55	47,15
A15	29	90	41	22	46,3
A16	27	64	26	57	37,55
A17	33	22	67	39	37,35
A18	24	20	42	98	30,3

Таблиця 2. **Відхилення значень критеріїв для A_{12}**

	Θ_1	Θ_2	Θ_3	Θ_4
15	46	31	65	36
14	42	30	56	33
13	39	29	51	30
12	35	27	48	29
11	31	25	44	27
10	28	24	40	25
9	26	22	37	23
8	24	20	35	21
7	21	18	32	20
6	17	15	29	17
5	12	13	28	15
4	10	11	24	12
3	7	8	22	8
2	5	7	15	5
1	3	4	11	2
0	0	0	0	0

Отже, в нашому випадку кількість усіх варіантів $|\Theta| = |\Theta_1| \cdot |\Theta_2| \cdot |\Theta_3| \cdot |\Theta_4| = 16^4 = 65536$, оскільки для кожного з чотирьох критеріїв розглядається 16 можливих значень відхилень (включаючи 0).

Крок 0. При сформованих ОПР значеннях $\theta_1^{15}, \theta_2^{15}, \theta_3^{15}, \theta_4^{15}$ справджується нерівність $\sum_{j=1}^{4} \omega_j \theta_j^{15} > G^*$ $(46 \cdot 0,5 + 31 \cdot 0,25 + 65 \cdot 0,2 + 36 \cdot 0,05 = = 45,55 > 35)$, тому задача має розв'язок. Домножимо кожне відхилення θ_j^l, $j = \overline{1,4}$, $l = \overline{0,15}$ (табл. 2) на відповідні компоненти векторів переваг $W = (0,5; 0,25; 0,2; 0,05)$ і $V = (0,4; 0,1; 0,45; 0,05)$. У результаті отримаємо табл. 3 і табл. 4.

Таблиця 3. **Зважені відхилення для A_{12} за вектором W=(0,5;0,25;0,2;0,05)**

	$w_1\Theta_1$	$w_2\Theta_2$	$w_3\Theta_3$	$w_4\Theta_4$
15	23	7,75	13	1,8
14	21	7,5	11,2	1,65
13	19,5	7,25	10,2	1,5
12	17,5	6,75	9,6	1,45
11	15,5	6,25	8,8	1,35
10	14	6	8	1,25
9	13	5,5	7,4	1,15
8	12	5	7	1,05
7	10,5	4,5	6,4	1
6	8,5	3,75	5,8	0,85
5	6	3,25	5,6	0,75
4	5	2,75	4,8	0,6
3	3,5	2	4,4	0,4
2	2,5	1,75	3	0,25
1	1,5	1	2,2	0,1
0	0	0	0	0

Таблиця 4. **Зважені відхилення для A_{12} за вектором V=(0,4;0,1;0,45;0,05)**

	$v_1\Theta_1$	$v_2\Theta_2$	$v_3\Theta_3$	$v_4\Theta_4$
15	18,4	3,1	29,25	1,8
14	16,8	3	25,2	1,65
13	15,6	2,9	22,95	1,5
12	14	2,7	21,6	1,45
11	12,4	2,5	19,8	1,35
10	11,2	2,4	18	1,25
9	10,4	2,2	16,65	1,15
8	9,6	2	15,75	1,05
7	8,4	1,8	14,4	1
6	6,8	1,5	13,05	0,85
5	4,8	1,3	12,6	0,75
4	4	1,1	10,8	0,6
3	2,8	0,8	9,9	0,4
2	2	0,7	6,75	0,25
1	1,2	0,4	4,95	0,1
0	0	0	0	0

Початково покладемо $\theta_{min}^* = \theta^{max} = \left(\theta_1^{15}, \theta_2^{15}, \theta_3^{15}, \theta_4^{15}\right) = = (46, 31, 65, 36)$, $\theta^{min} = \left(\theta_1^0, \theta_2^0, \theta_3^0, \theta_4^0\right) = (0,0,0,0)$, $\Theta_1^{(0)} = \Theta_1, \Theta_2^{(0)} = \Theta_2, \Theta_3^{(0)} = \Theta_3, \Theta_4^{(0)} = \Theta_4$, $t = 0$.

Крок 1. Обчислимо допуски знизу за обмеженням (5):

$$d_j^{(t)} = G^* - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{4} w_k \cdot \theta_j^{max}, \ j \in \{1,2,3,4\}.$$

$$d_1^{(0)} = 35 - (31 \cdot 0,25 + 65 \cdot 0,2 + 36 \cdot 0,05) = 12,45$$

$$d_2^{(0)} = 35 - (46 \cdot 0,5 + 65 \cdot 0,2 + 36 \cdot 0,05) = -2,8$$

$$d_3^{(0)} = 35 - (46 \cdot 0,5 + 31 \cdot 0,25 + 36 \cdot 0,05) = 2,45$$

$$d_4^{(0)} = 35 - (46 \cdot 0,5 + 31 \cdot 0,25 + 65 \cdot 0,2) = -8,75$$

Визначимо множини елементів, що залишились:

$$\tilde{\Theta}_j^{(t+1)} = \{\theta_j | w_j \theta_j \geq d_j^{(t)}, \ \theta_j \in \Theta_j^{(t)}\}, \ j \in \{1,2,3,4\}.$$

$$\tilde{\Theta}_1^{(1)} = \{26, 28, 31, 35, 39, 42, 46\}$$

$$\tilde{\Theta}_2^{(1)} = \{0, 4, 7, 8, 11, 13, 15, 18, 20, 22, 24, 25, 27, 29, 30, 31\}$$

$$\tilde{\Theta}_3^{(1)} = \{15, 22, 24, 28, 29, 32, 35, 37, 40, 44, 48, 51, 56, 65\}$$

$$\tilde{\Theta}_4^{(1)} = \{0, 2, 5, 8, 12, 15, 17, 20, 21, 23, 25, 27, 29, 30, 33, 36\}$$

У табл. 3 відсіяні зважені значення відхилень зображено на сірому фоні.

Покладемо $\theta_j^{min} = \min\left\{\theta_j | \theta_j \in \tilde{\Theta}_j^{(t+1)}\right\}$, $j \in \{1,2,3,4\}$: $\theta^{min} = (26, 0, 15, 0)$.

Крок 2. Знаходимо поточний допустимий розв'язок θ^*:

$$\theta^* = \underset{j \in \{1,2,3,4\}.}{\operatorname{argmin}} \{v_j \cdot \theta_j^{min} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{4} v_k \cdot \theta_j^{max}\}.$$

У нашому випадку після проведення відповідних обчислень отримаємо:

θ^*=argmin{0,4·26+0,1·31+0,45·65+0,05·36; 0,1·0+ +0,4·46+0,45·65+0,05·36; 0,45·15+0,4·46+0,1·31+ +0,05·36; 0,05·0+0,4·46+0,1·31+0,45·65}= =argmin{44,55;49,45;30,05;50,75}=(46,31,15,36).

Отже, $h\left(\theta^*, V\right) = (0,4 \cdot 46 + 0,1 \cdot 31 + 0,45 \cdot 15 + + 0,05 \cdot 36) = 30,05$, $h\left(\theta_{min}^*, V\right) = (46 \cdot 0,4 + 31 \cdot 0,1 + + 65 \cdot 0,45 + 36 \cdot 0,05) = 52,55$.

Оскільки $h\left(\theta^*, V\right) < h\left(\theta_{min}^*, V\right)$, покладемо $\theta_{min}^* = \theta^* = (46, 31, 15, 36)$.

Крок 3. Обчислимо допуски зверху за значенням цільової функції:

$$c_j^{(t)} = h\left(\theta_{min}^*, V\right) - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{4} v_k \cdot \theta_j^{min}, \ \ j \in \{1,2,3,4\}.$$

$$c_1^{(0)} = 30,05 - (0 \cdot 0,4 + 0 \cdot 0,1 + 15 \cdot 0,45 + 0 \cdot 0,05) = 23,35$$

$$c_2^{(0)} = 30,05 - (26 \cdot 0,4 + 0 \cdot 0,1 + 15 \cdot 0,45 + 0 \cdot 0,05) = 12,9$$

$$c_3^{(0)} = 30,05 - (26 \cdot 0,4 + 0 \cdot 0,1 + 0 \cdot 0,45 + 0 \cdot 0,05) = 19,65$$

$$c_4^{(0)} = 30,05 - (26 \cdot 0,4 + 0 \cdot 0,1 + 15 \cdot 0,45 + 0 \cdot 0,05) = 12,9$$

Визначимо множини елементів, що залишились:

$$\Theta_j^{(t+1)} = \{\theta_j \,|\, v_j\theta_j \le c_j^{(t)}, \quad \theta_j \in \tilde{\Theta}_j^{(t+1)}\},\ j \in \{1,2,3,4\}.$$

$$\Theta_1^{(1)} = \{26, 28, 31, 35, 39, 42, 46\}$$

$$\Theta_2^{(1)} = \{0,4,7,8,11,13,15,18,20,22,24,25,27,29,30,31\}$$

$$\Theta_3^{(1)} = \{15, 22, 24, 28, 29, 32, 35, 37, 40\}$$

$$\Theta_4^{(1)} = \{0,2,5,8,12,15,17,20,21,23,25,27,29,30,33,36\}.$$

У табл. 4 додались відсіяні зверху зважені значення відхилень за третім критерієм (зображені на сірому фоні).

Покладемо $\theta_j^{max} = \max\left\{\theta_j \,|\, \theta_j \in \Theta_j^{(t+1)}\right\},\ j \in \{1,2,3,4\}$: $\theta^{max} = (46, 31, 40, 36)$.

Таблиця 5. **Відхилення значень критеріїв для A_{12}, що залишились після першої ітерації алгоритму**

	Θ_1	Θ_2	Θ_3	Θ_4
15	46	31		36
14	42	30		33
13	39	29		30
12	35	27		29
11	31	25		27
10	28	24	40	25
9	26	22	37	23
8		20	35	21
7		18	32	20
6		15	29	17
5		13	28	15
4		11	24	12
3		8	22	8
2		7	15	5
1		4		2
0		0		0

Таким чином, після першої ітерації вдалося відсіяти *знизу* значення відхилень за першим і третім критеріями і *зверху* – за третім (табл. 5).

Крок 4. Оскільки відсіювання відбулось за двома критеріями (достатньо одного) – $\Theta_1^{(1)} \ne \Theta_1^{(0)}$, $\Theta_3^{(1)} \ne \Theta_3^{(0)}$, покладемо $t := t+1$ і переходимо на крок 1 (на наступну ітерацію алгоритму).

Таблиця 6. **Остаточні значення відхилень критеріїв для A_{12} після завершення алгоритму**

	Θ_1	Θ_2	Θ_3	Θ_4
15	46	31		36
14	42	30		33
13		29		30
12		27		29
11		25		27
10		24		25
9		22		23
8				21
7				20
6				17
5				15
4			24	12
3			22	8
2			15	5
1				2
0				0

У нашому прикладі алгоритм відпрацює шість ітерацій. У результаті отримаємо множину допустимих розв'язків, представлену в табл. 6.

Якщо спочатку $|\Theta| = |\Theta_1| \cdot |\Theta_2| \cdot |\Theta_3| \cdot |\Theta_4| = = 16^4 = 65536$, то після реалізованого алгоритмом відсіювання безперспективних варіантів отримали $|\Theta| = 2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 16 = 672$, отже, розмірність задачі (4)–(6) зменшилася майже на два порядки.

Список літератури

1. Волкович В. Л. Методы и алгоритмы автоматизированного проектирования сложных систем управления / В. Л. Волкович, А. Ф. Волошин, Т. М. Горлова. – К. : Наук. думка, 1984. – 216 с.
2. Кини Р. Л. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения / Р. Л. Кини, Х. Райфа. – М. : Радио и связь, 1981. – 560 с.
3. Ларичев О. И. Теория и методы принятия решений / О. И. Ларичев. – М. : Логос, 2003. – 392 с.
4. Михалевич В. С. Вычислительные методы исследования и проектирования сложных систем / В. С. Михалевич, В. Л. Волкович. – М. : Наука, 1982. – 286 с.
5. Модели и методы оптимизации надежности сложных систем / В. Л. Волкович, А. Ф. Волошин, В. А. Заславский, А. И. Ушаков. – К. : Наук. думка, 1992. – 312 с.
6. Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий / Т. Саати. – М. : Радио и связь, 1993. – 278 с.
7. Черноруцкий И. Г. Методы принятия решений / И. Г. Черноруцкий. – СПб. : БХВ-Петербург, 2005. – 416 с.
8. Штойер Р. Многокритериальная оптимизация. Теория, вычисления и приложения / Р. Штойер. – М. : Радио и связь, 1992. – 504 с.

V. Gorborukov

ABOUT THE ONE PROBLEM OF MULTI-CRITERIA SELECTION

The inverse problem of multi-criteria optimization, which is formalized in the class of discrete programming models, has been considered. The algorithm for solution this problem, based on the ideology of the method of sequential analysis of variants, has been proposed.

Keywords: mathematical model, multi-criteria optimization, ranking alternatives, discrete programming, sequential analysis of variants.

Матеріал надійшов 10.09.2015