

O. Iemets, T. Barbolina

COMBINATORIAL OPTIMIZATION MODEL OF RECTANGLES' PACKING UNDER PROBABILISTIC CONSTRAINTS

Authors formalize admissible arrangement of rectangles with stochastic parameters for the problem of packing if probability of rectangles' intersection is bounded above. A mathematical model of one problem of rectangles' in a semi infinite breadth with such probabilistic constraints was constructed. We also demonstrate possibility of conversion to deterministic problem of rectangles' packing.

Keywords: discrete random variable, combinatorial optimization, stochastic optimization, packing of rectangles.

Матеріал надійшов 12.11.2014

УДК 519.163

Євтушенко О. Я.

ЗАСТОСУВАННЯ ТРІАНГУЛЯЦІЇ ДЕЛОНЕ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЕВКЛІДОВОЇ ЗАДАЧІ ШТЕЙНЕРА

Евклідову задачу Штейнера сформульовано як задачу декомпозиції. Описано та проаналізовано застосування тріангуляції Делоне у відомих евристичних алгоритмах для розв'язання евклідової задачі Штейнера. Проведено обчислювальне дослідження та аналіз для оцінки графа Делоне як основи для пошуку дерева Штейнера.

Ключові слова: евклідова задача Штейнера, дерево Штейнера, тріангуляція Делоне, повне дерево Штейнера.

Вступ

Нехай X – множина точок на евклідовій площині. Евклідова задача Штейнера полягає у визначенні множини точок Штейнера S ($X \cap S = \emptyset$) таких, що довжина остового дерева на $X \cup S$ є мінімальною. Дерево на множині $X \cup S$ називається мінімальним деревом Штейнера (МДШ). При цьому множину X називають множиною термінальних точок.

Евклідова задача Штейнера є NP-складною [6], тому одним з головних напрямів

досліджень задачі Штейнера є створення і вивчення евристичних алгоритмів для наближення розв'язання цієї задачі.

Одним з базових методів, що використовують в евристичних алгоритмах для побудови дерева Штейнера, є тріангуляція Делоне. Сама по собі тріангуляція Делоне не дозволяє локалізувати точки Штейнера чи дати відповідь на запитання, скільки точок Штейнера у МДШ для цієї множини X . Але тріангуляція Делоне ділить площину на трикутники, в яких розташовані точки Штейнера, а також містить мінімальне

остове дерево (МОД), яке є наближенням розв'язання евклідової задачі Штейнера.

Триангуляція Делоне має багато застосувань в обчислювальній геометрії і 3D графіці, від задачі найближчих сусідів до планування руху. Як показано у [9], триангуляція Делоне є еквівалентною іншим геометричним структурам, таким як квадрадерева та декомпозиція на добре розмежовані пари. Таким чином, триангуляцію Делоне можна вважати базовою геометричною структурою, від якої походять багато інших структур в обчислювальній геометрії.

Очевидно, що триангуляція Делоне може містити інформацію про особливості розташування точок Штейнера, але потрібно знайти умови, яким мають відповідати ті трикутники Делоне, що можуть бути основою для побудови дерева Штейнера. У цій роботі наведено результати пошуку таких умов на основі аналізу евристичних алгоритмів та обчислювального дослідження. У перших двох розділах цієї роботи наведено теоретичні відомості про триангуляцію Делоне та мінімальні дерева Штейнера. У третьому розділі описано відомі евристичні алгоритми, що використовують триангуляцію Делоне. Основні ідеї цих алгоритмів проаналізовано з огляду на можливість швидшого визначення МДШ. У четвертому розділі досліджено можливість швидшого розв'язання евклідової задачі Штейнера за допомогою таких характеристик триангуляції Делоне, як граф Делоне та різні види ребер триангуляції.

Триангуляція Делоне і граф Делоне

Трикутник Делоне [12] – трикутник на точках з X такий, що коло, яке його описує, не містить інших точок з X .

Ребро Делоне – відрізок з кінцями в X , через який можна провести принаймні одне коло, яке не містить інших точок з X .

Триангуляція Делоне множини X – це об'єднання трикутників Делоне на точках з X таке, що утворює опуклу оболонку X . Позначимо триангуляцію Делоне на множині X як $DT(X)$. З корисних властивостей триангуляції Делоне слід відзначити:

- а) максимальність найменшого кута кожного трикутника;
- б) триангуляція Делоне завжди містить МОД [11].

Строгий трикутник Делоне – це такий трикутник Делоне, що інші точки з X не лежать на колі, яке його описує. Строге ребро Делоне – це ребро Делоне, через яке можна провести принаймні одне пусте коло, на якому не лежать інші точки з X .

Множина X на евклідовій площині може мати більше однієї триангуляції Делоне. Триангуляція Делоне є унікальною тоді, коли жодні 4 точки з X не лежать на одному колі. Лише строгі трикутники Делоне і строгі ребра Делоне містяться в кожній триангуляції Делоне заданої множини X .

Множину строгих ребер Делоне також можна визначити як граф Делоне [7]. Граф Делоне для $X \subseteq R^2$ складається з усіх відрізків $\overline{x_i x_j}$ ($x_i, x_j \in X$), що містяться у всіх триангуляціях Делоне множини X .

Лема 1 [7]. Відрізок $\overline{x_i x_j}$ ($x_i, x_j \in X$) належить графу Делоне множини X тоді й лише тоді, коли існує коло через x_i і x_j , яке містить x_i і x_j на своїй границі, а всі інші точки X розташовані строго за межами кола.

Лема 2. Будь-яке ребро опуклої оболонки множини X належить графу Делоне на X .

Через дві вершини ребра опуклої оболонки завжди можна провести таке коло, яке не містить інших точок множини.

Лема 3. Мінімальне остове дерево складається з ребер графа Делоне.

Особливості мінімального дерева Штейнера

Дерево Штейнера може мати до $n-2$ точок Штейнера, де n – потужність множини X . Повне дерево Штейнера (ПДШ) – це таке дерево, яке містить точно $n-2$ точок Штейнера.

Теорема 1 [8].

- а) Будь-який кут між двома ребрами дерева Штейнера не менший за 120° ;
- б) дерево Штейнера не містить ребер, що перетинаються;
- в) кожна точка Штейнера має ступінь 3.

Лема 4 [10]. Якщо існує ПДШ на чотирьох точках A, B, C, D , то чотирикутник $ABCD$ є опуклим.

У загальному випадку мінімальне дерево Штейнера можна декомпонувати на ПДШ та ребра (x_i, x_j) , $x_i, x_j \in X$, що з'єднують ПДШ. Як зазначено у [17], ПДШ у мінімальному дереві Штейнера рідко містять більше ніж 5 точок з множини X . Називатимемо ребра (x_i, x_j) , що з'єднують ПДШ, термінальними ребрами.

Оскільки знаходження ПДШ для $n < 10$ точок може бути швидко вирішено на сучасних комп'ютерах, евклідову задачу Штейнера можна переформулювати як задачу декомпозиції: визначення підмножин X , які утворюватимуть ПДШ у мінімальному дереві Штейнера, та термінальних ребер, що з'єднуюватимуть ці ПДШ.

Відомо, що МДШ міститься в опуклій оболонці термінальних точок. Опуклу оболонку можна замінити меншим многокутником, а саме штейнерівською оболонкою, що є меншою за площею. За наявності триангуляції Делоне штейнерівську оболонку можна визначити за лінійний час [16].

Лема 5. Трикутник Делоне може містити не більше однієї точки Штейнера.

Доведення. Кількість трикутників у будь-якій триангуляції дорівнює $n-2$. Максимальна кількість точок Штейнера також $n-2$ у випадку ПДШ. Таким чином, достатньо показати, що в одному трикутнику Делоне може бути не більше однієї точки Штейнера.

Оскільки точка Штейнера в трикутнику мінімізує відстані до всіх трьох вершин трикутника, то другої точки Штейнера в трикутнику не може бути, адже така точка лише збільшить довжину дерева Штейнера.

Евристичні алгоритми на основі триангуляції Делоне

Розглянемо основні ідеї, закладені у використанні триангуляції Делоне відомими евристичними алгоритмами для наближення МДШ.

Одну з перших евристик для евклідової задачі Штейнера було викладено Смітом, Лі та Лібманом у [13]. Алгоритм розглядає ті трикутники, що містять два ребра мінімального остового дерева. На першому етапі алгоритм генерує часткові ПДШ на трьох точках для цих трикутників Делоне. Ці часткові ПДШ сортує у чергу за збільшенням значення відношення довжини МДШ і довжини МОД $\frac{l(\text{МДШ})}{l(\text{МОД})}$ на відповідних трьох

точках. Далі алгоритм генерує ПДШ на чотирьох точках для пар суміжних трикутників, що містять три ребра МОД. Ці ПДШ також розміщують у чергу, сортує за значенням відношення $\frac{l(\text{МДШ})}{l(\text{МОД})}$ на відповідних чотирьох точках.

Найкращі ПДШ у черзі з'єднують за жадібним методом. Цей евристичний алгоритм має часову складність $O(n \log n)$.

Слід зазначити, що схожу ідею тими ж авторами було використано в евристиці для орієнтованої задачі Штейнера [14].

Очевидно, що трикутник Делоне може мати не більше двох ребер, що належать МОД. А спільне ребро двох таких сусідніх трикутників обов'язково належить МОД, аби виконати умову ациклічності остового дерева. Таким чином,

евристичний алгоритм [13] розглядає ті пари трикутників Делоне, чиє спільне ребро належить МОД. За лемою 4, якщо два трикутники з трьома ребрами МОД утворюють опуклий чотирикутник, то існує ПДШ на чотирьох точках. Усі інші трикутники Делоне з двома ребрами мінімального остового дерева стають основою для ПДШ на трьох точках. Отже, у побудові ПДШ беруть участь усі трикутники Делоне з двома ребрами мінімального остового дерева, а трикутники Делоне з одним ребром МОД беруть участь у визначенні термінальних ребер дерева Штейнера. Але термінальні ребра дерева Штейнера можуть належати як трикутнику Делоне з одним ребром МОД, так і трикутнику Делоне з двома такими ребрами. Алгоритм [13] визначає термінальні ребра згодом, переглядаючи чергу з ПДШ.

Водночас алгоритм [13] не може створити ПДШ на п'яти та більше точках. Тому така евристика не знаходить декомпозицію МДШ в загальному випадку.

Евристичний алгоритм Біслі й Гоффінета [1] складається з двох фаз. Фаза розширення додає точку Штейнера в кожний трикутник $DT(X \cup S)$, який не має кута, рівного або більшого за 120° . Фаза скорочення після побудови мінімального остового дерева на $X \cup S$ скорочує кількість точок Штейнера згідно з умовами, які накладаються на ступінь точок Штейнера. Координати точок Штейнера локально оптимізують, а кінцеве рішення обирають за методом відпалу. У результаті фази скорочення можуть виникати ПДШ більші, ніж на три точки. Але немає відомостей, який максимальний розмір ПДШ і яка точність визначення термінальних ребер у результаті роботи алгоритму [1].

Алгоритм [1] ділить трикутники Делоне на дві множини: ті, що містять кут, рівний або більший за 120° , і ті, що не містять такого кута. Позначимо ці множини трикутників O і A відповідно. Але не можна стверджувати, що точки Штейнера з'являються лише серед трикутників O або A . На невеликих розмірностях ($n = 10, 30$) точки Штейнера частіше містяться в трикутниках множини A . Але існують випадки, коли точки Штейнера містяться і в трикутниках множини O . Отже, не існує критерію для визначення трикутників, які містять точки Штейнера, за множинами O і A .

Поставимо запитання: наскільки часто точки Штейнера містяться в трикутниках множини O ? На рис. 1 наведено зростання кількості точок Штейнера і кількості трикутників множини A , які містять точку Штейнера. Тестування проводилось на задачах OR-бібліотеки [2] і випадково

згенерованих задачах. Для кожної розмірності використано усереднене значення на 15 задачах. Очевидно, що майже всі точки Штейнера містяться в трикутниках множини A . Але кількість точок Штейнера, які містяться в трикутниках множини O , трохи зростає зі збільшенням розмірності задачі.

Штейнера і середньою кількістю трикутників множини A при зростанні n . Таким чином, використання трикутників множини A зі зростанням n наближається до повного перебору всіх трикутників Делоне, хоча на менших значеннях n використання множини A дозволяє пришвидшити пошук точок Штейнера.

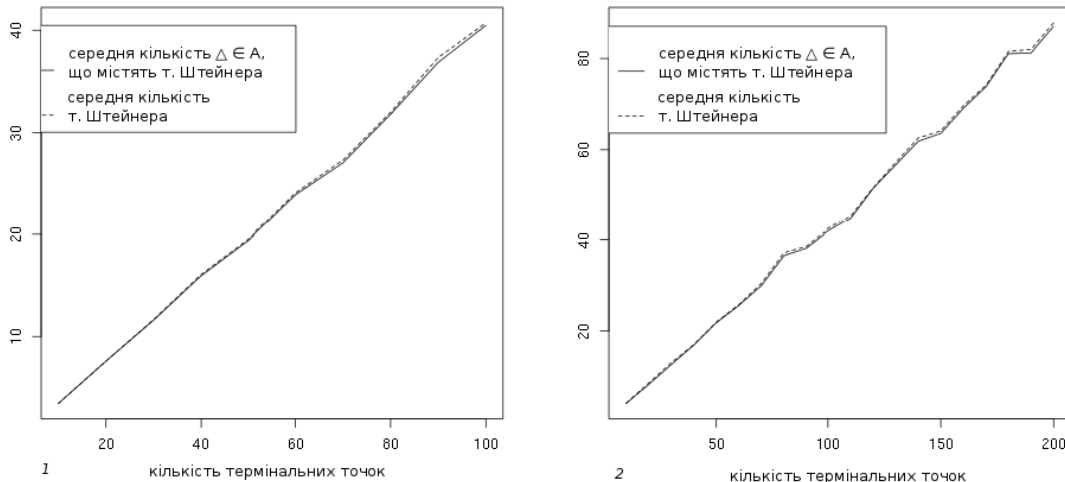


Рис. 1. Залежність кількості точок Штейнера і кількості трикутників з множини A , які містять точку Штейнера, від розмірності задачі: 1 – дані тестів на задачах OR-бібліотеки; 2 – дані тестів на випадково згенерованих задачах

Отже, хоча критерію для визначення трикутника, який містить точку Штейнера, за множинами O і A не існує, можна стверджувати, що точки Штейнера майже завжди містяться в трикутниках множини A . Поставимо запитання: наскільки множина трикутників A дозволяє скоротити пошук точок Штейнера в порівнянні з усіма трикутниками триангуляції? За результатами тестування задач OR-бібліотеки [2] (табл. 1), більше двох третіх трикутників Делоне в середньому належать до множини A . Варто відзначити, що кількість таких трикутників зі зростанням n також зростає. Саме цим фактом пояснюється зростання різниці між середньою кількістю точок

Повторна триангуляція після додання точок Штейнера в трикутники множини A , як пропонується у [1], вже не дозволить локалізувати нові точки Штейнера через дію леми 5. Зауважимо, що в роботі [4] використали додавання центроїдів для гарантії побудови триангуляції Делоне з внутрішніми кутами між 30° та 120° . Хоча центроїди майже ніколи не збігаються з точками Штейнера, як зазначено далі в роботі, результат [4] свідчить про те, що додавання точок Штейнера всередині трикутників Делоне збільшує множину A , наближаючи її до множини всіх трикутників Делоне.

Евристика у [15] додає центроїди трикутників Делоне як точки Штейнера. Алгоритм уточнює

Таблиця 1. Потужності множин трикутників Делоне на даних задач OR-бібліотеки

n	min DT	max DT	mean DT	min O	max O	mean O	A , %
10	10	14	12,06667	2	6	3,6	70,16575
20	28	33	30,33333	4	12	7,466667	75,38462
30	45	52	49,46667	6	18	11,86667	76,01078
40	64	72	68,33333	8	20	14,73333	78,43902
50	86	91	88,26667	14	24	18,26667	79,30514
60	104	110	107,4	15	30	22,73333	78,83302
70	124	130	126,8	18	32	25,4	79,96845
80	145	150	146,9333	22	41	30,53333	79,2196
90	162	171	166,4	25	40	31,46667	81,08974
100	182	189	185,4667	21	44	33,46667	81,95543
250	478	486	483,2	53	90	76,33333	84,20254
500	979	986	982,1333	115	175	142,0667	85,53489
1000	1971	1986	1979,8	233	269	248,0667	87,47011

множину точок Штейнера, використовуючи умови ступеня точок Штейнера. Також використано конічне програмування другого порядку для визначення місцезнаходження точок Штейнера та вставлення ребер за інкрементальним методом [5].

Легко показати, що точка Штейнера у ПДШ на 3 точках є центроїдом трикутника тоді й лише тоді, коли трикутник рівносторонній. Тому центроїди також потребуватимуть уточнення координат для визначення місцезнаходження точок Штейнера.

Головним недоліком алгоритму [15] є те, що він додає точки у всі трикутники Делоне. Таким чином, його можна вважати повним перебором відносно трикутників Делоне. Можливості визначити ПДШ та термінальні ребра алгоритм не надає.

Евристичний алгоритм Захарійсена [18] переглядає підмножини точок, які утворюють зв'язний підграф тріангуляції Делоне. Потужність таких підмножин є параметром алгоритму. Тестування проводилося на підмножинах, потужність яких менша або дорівнює 6. Підмножину перевіряють на відповідність штейнерівській конфігурації, тобто перевіряють таку умову: штейнерівська оболонка має бути зв'язною та містити термінальні точки на границях. Якщо підмножина має штейнерівську конфігурацію, алгоритм будує ПДШ на точках підмножини. Після того як усі можливі ПДШ згенеровані, алгоритм з'єднає їх за жадібним методом. Оскільки експериментальні дані свідчать, що термінальні точки більшості ПДШ в МДШ утворюють зв'язні підграфи мінімального остового дерева, то доцільно використовувати МОД як основу для апроксимації. Але інколи є потреба відхилитись від МОД, про що також зазначено у [3].

Таким чином, алгоритм [18] намагається визначити такі підграфи тріангуляції Делоне, які утворюватимуть ПДШ. Інакше кажучи, цей алгоритм можна вважати спробою декомпонувати задачу на ПДШ та термінальні ребра за допомогою перебору всіх можливих підмножин точок тріангуляції Делоне. Показником для визначення

підмножини, що утворюватиме ПДШ, використано штейнерівську конфігурацію, яка дозволяє швидше визначити ПДШ за рахунок скорочення кількості можливих розташувань точок Штейнера. З іншого боку, підмножина термінальних точок, що утворюватимуть ПДШ, не завжди має штейнерівську конфігурацію, про що зазначено у [18].

Застосування графа Делоне для визначення термінальних ребер

Оскільки МОД складається лише з ребер графа Делоне (лема 3), то ПДШ та термінальні ребра між ними мають теж міститись у графі Делоне. За означенням граф Делоне завжди є підмножиною тріангуляції Делоне. Поставимо запитання: чи можливо прискорити визначення ПДШ та термінальних ребер за допомогою розгляду ребер графа Делоне? У цьому підрозділі наведено дані для відповіді на це запитання на основі розгляду рішень задач OR-бібліотеки [2].

Ребра тріангуляції Делоне в контексті розв'язання евклідової задачі Штейнера можна поділити на три групи:

- термінальні ребра;
- ребра, що є сторонами многокутників, на основі яких будуватиметься ПДШ;
- ребра, що не беруть участі у створенні МДШ.

Під час тестування помічено, що термінальні ребра завжди містяться серед ребер графа Делоне. Ребра, що є сторонами многокутника, на основі яких будуватиметься ПДШ, зазвичай належать до ребер графа Делоне. Але в поодиноких випадках такі ребра ПДШ не належать до ребер графа Делоне. Можна стверджувати, що ці поодинокі випадки є тими відхиленнями від остового дерева, про які писали у [3]. Також помічено, що зі збільшенням розмірності ребра тріангуляції, що не належать до ребер графа Делоне, рідше є сторонами для многокутників, на основі яких будується ПДШ.

Таблиця 2. Зростання кількості ребер тріангуляції Делоне і ребер графа Делоне при збільшенні розмірності задачі

n	$ E , E \in DG$	$ E , E \in DT$	$ E , E \in DG, \%$
10	19,46667	21,06667	92,40506
20	45,93333	49,33333	93,10811
30	72,33333	78,46667	92,18352
40	97,8	107,3333	91,11801
50	124,4667	137,2667	90,67508
60	149,4	166,4	89,78365
70	173,8667	195,8	88,79809
80	200,6	225,9333	88,78725
90	228,4	255,4	89,42835
100	254,1333	284,4667	89,33677
250	650,4667	732,2	88,83729
500	1304,133	1481,133	88,04969
1000	2629,4	2978,8	88,27044

Таким чином, розглядаючи лише ребра графа Делоне, можна зменшити кількість кандидатів для визначення термінальних ребер і, до певної міри, кількість многокутників-кандидатів для побудови ПДШ. Тому варто дізнатись кількість ребер графа Делоне. Як показано в табл. 2, кількість ребер графа Делоне менша за кількість ребер триангуляції в середньому на 10 %. Хоча цей показник невеликий, але зростання кількості ребер графа Делоне є лінійним відносно кількості ребер триангуляції і трохи уповільнюється в порівнянні зі зростанням загальної кількості ребер триангуляції.

Подібно до розгляду трикутників у [1], для подальшого скорочення множини ребер-кандидатів під час пошуку термінальних ребер розглянемо ребра, що мають інцидентні ребра, кут з якими більший або рівний 120° , та ті, що не мають таких інцидентних ребер. Оскільки автори [1] додавали точки до трикутників, що не містили кута, більшого або рівного 120° , то можна припустити, що термінальні ребра мають бути серед ребер, що мають інцидентні ребра, кут з якими більший або рівний 120° . Справді, за даними тестування термінальні ребра частіше мають більшу кількість інцидентних ребер, кут з якими більший або рівний 120° . Зі збільшенням n це число також зростає. Табл. 3 показує, що термінальних ребер, які не мають інцидентних ребер, кут з якими більший або рівний 120° , дуже мало відносно загальної кількості термінальних ребер, і їх кількість зростає набагато повільніше за кількість термінальних ребер. Отже, зі збільшенням розмірності задачі термінальні ребра частіше зустрічаються серед тих ребер, що мають хоча б одне інцидентне ребро, кут з яким більший або рівний 120° . Ці зауваження не суперечать наведеному в попередньому розділі спостереженню, що трикутників множини A стає більше зі зростанням розмірності задачі.

Середня кількість ребер, інцидентних термінальному ребру під кутом більшим або рівним 120° , зростає дуже повільно, що можна пояснити повільністю зростання ступеня точок триангуляції.

Таблиця 3. Залежність від розмірності задачі середньої кількості ребер триангуляції, де TT – множина термінальних ребер

n	$ E , E \in DT,$ $\widehat{E, TT} \geq 120^\circ$	$ TT $	$ E , E \in DT,$ $\widehat{E, TT} < 120^\circ$
10	1,491111	3,066667	0,2
20	1,853968	5,466667	1
30	2,164372	8,133333	1,2
40	2,067329	11,46667	1,333333
50	2,101012	15,46667	2,066667
60	2,055883	17,8	1,4
70	2,149356	21,6	2,266667
80	2,175679	24,73333	1,866667
90	2,278253	24,73333	2,333333
100	2,237633	28,66667	2,066667

Збігу між вершинами термінальних ребер та точками, у яких зустрічаються багато пар ребер з кутами, більшими або рівними 120° , не помічено. Навпаки, досить часто вершини термінальних ребер не є такими точками, у яких зустрічаються пари ребер з кутами, більшими або рівними 120° .

Підсумуємо отримані результати:

а) термінальні ребра завжди належать до ребер графа Делоне;

б) ребра, що є сторонами многокутника, на основі яких будуватиметься ПДШ, майже завжди належать до ребер графа Делоне, крім деяких винятків;

в) кількість ребер графа Делоне менша за кількість ребер триангуляції Делоне в середньому на 10 %. Зі збільшенням розмірності значення цієї різниці зростає;

г) майже всі термінальні ребра мають інцидентні ребра, кут з якими більший або рівний 120° ;

г) майже всі точки Штейнера розташовані в трикутниках Делоне, які не мають кута більшого або рівного 120° ;

д) кількість трикутників Делоне, які не мають кута більшого або рівного 120° , менша за кількість усіх трикутників Делоне в середньому на 20–30 %. Зі збільшенням розмірності значення цієї різниці зменшується.

Висновки

Після аналізу застосування триангуляції Делоне у відомих евристичних алгоритмах та обчислювального дослідження й аналізу застосування графа Делоне для побудови дерева Штейнера слід відзначити можливість використання певних груп ребер і трикутників триангуляції Делоне як кандидатів для визначення термінальних ребер і трикутників, що містять точки Штейнера. Але в цілому не можна стверджувати, що триангуляція Делоне містить достатньо відомостей для розв'язання евклідової задачі Штейнера як задачі декомпозиції.

Список літератури

1. Beasley J. E. A Delaunay triangulation-based heuristic for the Euclidean Steiner problem / J. E. Beasley, F. Goffinet // Networks. – 1994. – Vol. 24, № 4. – P. 215–224.
2. Beasley J. E. Operations Research library [Electronic resource] / J. E. Beasley. – Mode of access: <http://people.brunel.ac.uk/~mastjjb/jeb/info.html>. – Title from the screen.
3. Chang S. K. The generation of minimal trees with a Steiner topology / S. K. Chang // J. Assoc. Comput. Mach. – 1972. – Vol. 19. – P. 699–711.
4. Chew L. P. Guaranteed-quality mesh generation for curved surfaces / L. P. Chew // Proceedings of the 9th symposium on computational geometry (San Diego, CA, USA, May 18–21). – NY : ACM Press., 1993. – P. 274–280.
5. Dreyer D. R. Two heuristics for the Euclidean Steiner tree problem / D. R. Dreyer, M. L. Overton // J. of Global Optimization. – 1998. – Vol. 13-1. – P. 95–106.
6. Garey M. R. The complexity of computing Steiner minimal trees / M. R. Garey, R. L. Graham, D. S. Johnson // SIAM J. Appl. Math. – 1977. – Vol. 32, № 4. – P. 835–859.
7. Gärtner B. Computational geometry [Electronic resource] / B. Gärtner, M. Hoffmann // Lecture notes HS, ETH Zurich. – 2013. – Mode of access: <http://www.ti.inf.ethz.ch/ew/Lehre/CG13/lecture/cg-2013.pdf>. – Title from the screen.
8. Hwang F. The Steiner Tree Problem / F. Hwang, D. S. Richards, P. Winter. – Elsevier Science Publishers B. V., 1992. – (Annals of Discrete Mathematics, Vol. 53). – ISBN 0-444-89098-X.
9. Löffler M. Triangulating the square and squaring the triangle: quadrees and Delaunay triangulations are equivalent / M. Löffler, W. Mulzer // SODA'11, Proceedings of the Twenty-second Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms. – 2011. – P. 1759–1777.
10. Pollak H. O. Some remarks on the Steiner problem / H. O. Pollak // Journal of combinatorial theory, series A. – 1978. – Vol. 24, Issue 3. – P. 278–295.
11. Shamos M. J. Closest point problems / M. J. Shamos, D. Hoey // Proc. of the 16-th Ann. Symp. on Foundations of Computer Science. – 1975. – P. 151–162.
12. Shewchuk J. R. Two-dimensional Delaunay triangulations [Electronic resource] / J. R. Shewchuk // Lecture notes on Delaunay mesh generation, Berkeley. – 2012. – P. 25–43. – Mode of access: <http://www.cs.berkeley.edu/~jrs/meshpapers/delnotes.pdf>. – Title from the screen.
13. Smith J. M. An $O(n \log n)$ heuristic for Steiner minimal tree problems on the Euclidean metric / J. M. Smith, D. T. Lee, J. S. Liebman // Networks 11. – 1981. – Vol. 1, № 1. – P. 23–29.
14. Smith J. M. An $O(n^2)$ heuristic algorithm for the directed Steiner minimal tree problem / J. M. Smith, J. S. Liebman // Applied Mathematical Modeling. – 1979. – Vol. 4 (5). – P. 369–375.
15. Van Laarhoven J. W. Exact and heuristic algorithms for the Euclidean Steiner tree problem : PhD diss. / Jon William Van Laarhoven ; University of Iowa. – Iowa City, 2010.
16. Winter P. Optimal Steiner hull algorithm / P. Winter // Computational geometry. – 2002. – Vol. 23-2. – P. 163–169.
17. Zachariasen M. Local search for the Steiner tree problem in the Euclidean plane / M. Zachariasen // European Journal of Operational Research. – 1999. – Vol. 119, № 2. – P. 282–300.
18. Zachariasen M. Concatenation-based greedy heuristics for the Euclidean Steiner tree problem / M. Zachariasen, P. Winter // Algorithmica. – 1999. – Vol. 25, № 4. – P. 418–437.

O. Yevtushenko

USING DELAUNAY TRIANGULATION TO SOLVE THE EUCLIDEAN STEINER TREE PROBLEM

The Euclidean Steiner tree problem is formulated as a decomposition problem. Usage of Delaunay triangulation to solve the Euclidean Steiner tree problem in known heuristic algorithms is described and analyzed. The computational study and analysis to estimate Delaunay graph as a basis for Steiner tree is conducted.

Keywords: Euclidean Steiner tree problem, Steiner tree, Delaunay triangulation, full Steiner tree.

Матеріал надійшов 02.10.2015