Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2013, № 15. — С. 100–118.

УДК 511.72

Геометрія нескінченно-символьного q_0^∞-зображення дійсних чисел та її застосування у метричній теорії чисел

Я. В. Гончаренко, І. М. Лисенко
(Національний педагогічний університет імені М.П.Драгоманова)

Анотація. Розглядається нова система кодування (зображення) дробової частини дійсного числа:

$$(0;1] \ni x = q_0^{a_1} + \sum_{n=1}^{\infty}(1-q_0)^n q_0^{a_1+a_2+\ldots+a_{n+1}-n} \equiv \Delta^{q_0^\infty}_{a_1a_2\ldots a_n\ldots},$$

яка має нескінченний алфавіт $A \equiv N = \{1,2,3\ldots\} \ni a_n = a_n(x)$, нульову надлишковість (кожне число має єдине зображення), залежить від одного параметра $q_0 \in (0;1)$ і назване q_0^∞-зображенням.

У роботі висвітлюється зв'язок q_0^∞-зображення числа x з його двосимвольним Q_2-зображенням ($Q_2 = \{q_0, q_1 \equiv 1-q_0\}$):

$$x = \beta_{\alpha_1(x)} + \sum_{k=2}^{\infty}\left(\beta_{\alpha_k(x)}\prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j(x)}\right), \quad \alpha_j(x) \in A_2 \equiv \{0,1\},$$

$\beta_0 = 0$, $\beta_1 = q_0$, яке є узагальненням класичного двійкового зображення і співпадає з ним при $q_0 = \dfrac{1}{2}$; спростовується гіпотеза про критерій раціональності числа при раціональному q_0. Описується геометрія q_0^∞-зображенняа (геометричний зміст цифр, властивості циліндричних та хвостових множин, множин чисел, визначених умовами на їхнє q_0^∞-зображення тощо). На основі виведених метричних відношень розв'язується ряд метричних задач.

Ключові слова: зображення (кодування) числа, геометрія чисел, циліндри, міра Лебега, множини канторівського типу, множини Безиковича-Егглстона.

Abstract. We consider a new system of encoding (representation) of fractional part of real number:

$$(0;1] \ni x = q_0^{a_1} + \sum_{n=1}^{\infty}(1-q_0)^n q_0^{a_1+a_2+\ldots+a_{n+1}-n} \equiv \Delta^{q_0^\infty}_{a_1a_2\ldots a_n\ldots}.$$

This system has an infinite alphabet $A \equiv N = \{1,2,3\ldots\} \ni a_n = a_n(x)$, a zero redundancy (any number has a unique representation), depends on one parameter $q_0 \in (0;1)$ and is called q_0^∞-representation. In the paper, we establish a relation between q_0^∞-representation of number x and its two-symbol Q_2-representation ($Q_2 = \{q_0, q_1 \equiv 1-q_0\}$):

$$x = \beta_{\alpha_1(x)} + \sum_{k=2}^{\infty}\left(\beta_{\alpha_k(x)}\prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j(x)}\right), \quad \alpha_j(x) \in A_2 \equiv \{0,1\},$$

$\beta_0 = 0$, $\beta_1 = q_0$. The latter generalizes a classic binary representation and coincides with it if $q_0 = \frac{1}{2}$. We reject a conjecture about criterion of rationality of number for rational q_0. Geometry of q_0^∞-representation (geometric meaning of digits, properties of cylindrical and tail sets, and sets of numbers defined by conditions on their q_0^∞-representation, etc.) is described. Using obtained metric relations we solve some metric problems.

Keywords: representation (encoding) of number, geometry of numbers, cylinders, Lebesgue measure, Cantor-like sets, Besicovitch-Eggleston sets.

Вступ

Сьогодні в математиці розробляються і використовуються різні системи представлення та зображення (кодування) дійсних чисел. Одні з них використовують скінченний [2, 13], інші — нескінченний алфавіт [8, 7]; одні — суттєво надлишкові, інші мають нульову надлишковість; геометрія одних самоподібна, інших — несамоподібна. Потреба в створенні таких систем продиктована різними цілями, однією з яких є забезпечення засобів для моделювання та дослідження математичних об'єктів зі складною локальною будовою (множин, перетворень простору, функцій, мір, динамічних систем тощо).

Серед існуючих систем зустрічаються системи-двійники (наприклад, двійкова і негадвійкова, s-кова і нега-s-кова, зображення чисел знакододатними і знакозмінними рядами Люрота [3, 14] та ін.), які мають схожу геометрію. Між окремими системами з скінченним та нескінченним алфавітами існує тісний зв'язок.

Дана робота присвячена системі зображення дійсних чисел півінтервалу $(0;1]$ з нескінченним алфавітом, яка напряму пов'язана з відомою двосимвольною системою з алфавітом $A_2 = \{0,1\}$. Обидві системи визначаються єдиним параметром $q_0 \in (0;1)$.

Згадане двосимвольне зображення чисел називається Q_2-зображенням [12], де $Q_2 = \{q_0,\ q_1 = 1-q_0\}$. Його суть розкриває наступне твердження: для будь-якого числа $x \in [0;1]$ існує послідовність (α_n), $\alpha_k \in A_2$, така, що

$$x = \beta_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\beta_{\alpha_k} \prod_{i=1}^{k-1} q_{\alpha_i} \right) \equiv \Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}, \tag{1}$$

де $\beta_i = iq_{1-i}$, $i = 0, 1$, тобто $\beta_0 = 0$, $\beta_1 = q_0$.

Символічний запис (2) називається Q_2-зображенням числа x і ряду (2). Геометрія Q_2-зображення є самоподібною і добре вивченою [12, 10].

При $q_0 = \frac{1}{2}$ Q_2-зображення є класичним двійковим записом числа.

У даній роботі ми вивчеємо геометрію нового зображення з нескінченним алфавітом $A = N$ і екстранульовою надлишковістю (кожне число з півінтервала $(0;1]$ має єдине зображення), яке по суті є перекодуванням Q_2-зображення числа, а також приділяємо увагу проблемі критерія раціональності числа у даному зображенні. В ній розв'язується ряд задач метричного характеру (про міру Лебега та фраткальну розмірність) множин дійсних чисел, визначених різними умовами на їх зображення.

Вступ

Сьогодні в математиці розробляються і використовуються різні системи представлення та зображення (кодування) дійсних чисел. Одні з них використовують скінченний [2, 13], інші — нескінченний алфавіт [8, 7]; одні — суттєво надлишкові, інші мають нульову надлишковість; геометрія одних самоподібна, інших — несамоподібна. Потреба в створенні таких систем продиктована різними цілями, однією з яких є забезпечення засобів для моделювання та дослідження математичних об'єктів зі складною локальною будовою (множин, перетворень простору, функцій, мір, динамічних систем тощо).

Серед існуючих систем зустрічаються системи-двійники (наприклад, двійкова і негадвійкова, s-кова і нега-s-кова, зображення чисел знакододатними і знакозмінними рядами Люрота [3, 14] та ін.), які мають схожу геометрію. Між окремими системами з скінченним та нескінченним алфавітами існує тісний зв'язок.

Дана робота присвячена системі зображення дійсних чисел півінтервалу $(0;1]$ з нескінченним алфавітом, яка напряму пов'язана з відомою двосимвольною системою з алфавітом $A_2 = \{0,1\}$. Обидві системи визначаються єдиним числом $q_0 \in (0;1)$.

Згадане двосимвольне зображення чисел називається Q_2-зображенням, де $Q_2 = \{q_0,\ q_1 = 1 - q_0\}$ [12]. Його суть розкриває наступне твердження: для будь-якого числа $x \in [0;1]$ існує послідовність (α_n), $\alpha_k \in A_2$, така, що

$$x = \beta_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\beta_{\alpha_k} \prod_{i=1}^{k-1} q_{\alpha_i} \right) \equiv \Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}, \tag{2}$$

де $\beta_i = iq_{1-i}$, $i = 0, 1$, тобто $\beta_0 = 0$, $\beta_1 = q_0$.

Символічний запис (2) називається Q_2-зображенням числа x і ряду (2). Геометрія Q_2-зображення є самоподібною і добре вивченою [12, 10].

При $q_0 = \dfrac{1}{2}$ Q_2-зображення є класичним двійковим записом числа.

1. q_0^∞-зображення дійсного числа

Теорема 1. *Якщо* $(0;1) \ni q_0$ — *фіксоване дійне число, то для будь-якого* $x \in (0;1]$ *існує єдина послідовність натуральних чисел* (a_n) *така, що*

$$x = q_0^{a_1} + \sum_{n=1}^{\infty}(1-q_0)^n q_0^{a_1+a_2+\ldots+a_{n+1}-n} \equiv \Delta^{q_0^\infty}_{a_1a_2\ldots a_n\ldots}. \tag{3}$$

Доведення. Очевидною є рівність

$$1 = q_0 + (1-q_0)q_0 + (1-q_0)^2 q_0 + \ldots + (1-q_0)^n q_0 + \ldots = \frac{q_0}{1-(1-q_0)},$$

тобто для числа 1 послідовністю (a_n) є послідовність $a_n = 1$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Оскільки

$$x \in (0;1] = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(q_0^n;\ q_0^{n-1}\right],$$

то очевидно, що існує $a_1 \in \mathbb{N}$ таке, що

$$x \in \left(q_0^{a_1}; q_0^{a_1-1}\right], \quad \text{тобто} \quad q_0^{a_1} < x \le q_0^{a_1-1}$$

або

$$0 < x - q_0^{a_1} \equiv x_1 \le q_0^{a_1-1}(1-q_0).$$

Звідки отримуємо

$$x = q_0^{a_1} + x_1.$$

Аналогічно, оскільки

$$x_1 \in \left(0; q_0^{a_1-1}(1-q_0)\right] = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(q_0^{a_1+n-1}(1-q_0); q_0^{a_1+n-2}(1-q_0)\right],$$

то існує a_2 таке, що

$$x_1 \in \left(q_0^{a_1+a_2-1}(1-q_0); q_0^{a_1+a_2-2}(1-q_0)\right] \quad \Leftrightarrow$$
$$0 < x_1 - q_0^{a_1+a_2-1}(1-q_0) \equiv x_2 \le q_0^{a_1+a_2-2}(1-q_0)^2.$$

Звідки

$$x_1 = q_0^{a_1+a_2-1}(1-q_0) + x_2,$$

а отже,

$$x = q_0^{a_1} + q_0^{a_1+a_2-1}(1-q_0) + x_2.$$

Продовжуючи цей процес, буде знайдено числа $a_3, a_4, \ldots, a_k$ і $x_3, x_4, \ldots, x_{k-1}$, x_k такі, що

$$0 < x_{k-1} - q_0^{a_1+a_2+\ldots+a_k-k+1}(1-q_0)^{k-1} \equiv x_k \leq q_0^{a_1+a_2+\ldots+a_k-k}(1-q_0)^k$$

і

$$x = q_0^{a_1} + q_0^{a_1+a_2-1}(1-q_0) + \ldots + q_0^{a_1+a_2+\ldots+a_k-k+1}(1-q_0)^{k-1} + x_k.$$

Після чого, міркуючи аналогічно, а саме: оскільки

$$x_k \in \left(0; q_0^{a_1+a_2+\ldots+a_k-k}(1-q_0)^k\right] = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(q_0^{a_1+a_2+\ldots+a_k+n-k}(1-q_0)^k; q_0^{a_1+a_2+\ldots+a_k+n-k-1}(1-q_0)^k\right],$$

то існує $a_{k+1} \in \mathbb{N}$ таке, що

$$0 < x_k - q_0^{a_1+a_2+\ldots+a_{k+1}-k}(1-q_0)^k \equiv x_{k+1} \leq q_0^{a_1+a_2+\ldots+a_k+a_{k+1}-k-1}(1-q_0)^{k+1}.$$

Тому цей процес є нескінченним, але є збіжним, оскільки

$$x_{k+1} \leq q_0^{a_1+a_2+\ldots+a_{k+1}-k-1}(1-q_0)^{k+1} \leq (1-q_0)^{k+1} \to 0 \ (k \to \infty).$$

Отже, має місце розклад (3).

Його єдиність власне є наслідком єдиності кожного a_n. Дамо незалежне доведення цьому. Для цього припустимо, що має місце

$$x = q_0^{a'_1} + \sum_{n=1}^{\infty}(1-q_0)^n q_0^{a'_1+a'_2+\ldots+a'_{n+1}-n} \tag{4}$$

Рівність (4) не співпадатиме з (3), якщо існує $a_{i+1} \neq a'_{i+1}$. Не порушуючи загальності вважатимемо, що $a_{i+1} < a'_{i+1}$. Тоді розглянемо різницю рівностей (3) і (4)

$$0 = x - x = q_0^{a_1} + \sum_{n=1}^{\infty}(1-q_0)^n q_0^{a_1+a_2+\ldots+a_{n+1}-n} - q_0^{a'_1} - \sum_{n=1}^{\infty}(1-q_0)^n q_0^{a'_1+a'_2+\ldots+a'_{n+1}-n} =$$

$$= (1-q_0)^i q_0^{a_1+a_2+\ldots+a_i-i}\Bigg(q_0^{a_{i+1}} - q_0^{a'_{i+1}} +$$

$$+ q_0^{a_{i+1}}\sum_{k=2}^{\infty}(1-q_0)^{k-1}q_0^{a_{i+2}+\ldots+a_{i+k}-k+1} - q_0^{a'_{i+1}}\sum_{k=2}^{\infty}(1-q_0)^{k-1}q_0^{a'_{i+2}+\ldots+a'_{i+k}-k+1}\Bigg) >$$

$$> (1-q_0)^i q_0^{a_1+a_2+\ldots+a_i-i} q_0^{a_{i+1}}(1-q_0)\left(1 - \sum_{k=2}^{\infty}(1-q_0)^{k-1}q_0^{a_{i+2}+\ldots+a_{i+k}-k+1}\right) >$$

$$> (1-q_0)^{i+1} q_0^{a_1+a_2+\ldots+a_i+a_{i+1}-i}\left(1 - \sum_{k=2}^{\infty}(1-q_0)^{k-1}q_0\right) > 0.$$

Отримали протиріччя $0 = x - x > 0$, яке доводить єдиність і всю теорему. ☐

Означення **1.** Формальний (скорочений) запис $\Delta^{q_0^\infty}_{a_1a_2...a_n...}$ ряду (3) і числа x називатимемо його q_0^∞*-зображенням*, яке є його кодуванням засобами нескінченного алфавіту $A = \{1, 2, ...\}$. При цьому число (символ) $a_n = a_n(x)$ називається n*-ою цифрою (символом)* цього зображення, вона є функцією x (числа, що розкладається (розгортається) в ряд (3)).

Зауваження 1. *З теореми 1 випливають твердження:*

1) $x_1 = x_2$ *тоді і тільки тоді, коли* $a_i(x_1) = a_i(x_2)$ *для всіх* $i \in \mathbb{N}$*;*

2) $x_1 < x_2$ *тоді і тільки тоді, коли існує* m *таке, що* $a_m(x_1) > a_m(x_2)$ *і* $a_i(x_1) = a_i(x_2)$ *при* $i < m$.

Зауваження 2. *Розклад числа* x *в ряд* (3) *є* Q_2*-зображенням цього числа, яке формально записується*

$$x = \Delta^{Q_2}_{\underbrace{0\ldots0}_{a_1-1}1\underbrace{0\ldots0}_{a_2-1}1\underbrace{0\ldots0}_{a_3-1}1\underbrace{0\ldots0}_{a_n-1}1\ldots} = \Delta^{q_0^\infty}_{a_1a_2\ldots a_n\ldots}. \qquad (5)$$

Цей запис встановлює зв'язок (відповідність) між Q_2*-зображенням числа* $x \in (0; 1]$ *з двосимвольним алфавітом* $A_2 = \{0, 1\}$ *і кодуванням його засобами нескінченно символьного алфавіту* $A = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

2. Умови раціональності числа у його q_0^∞-зображенні

Якщо q_0 — число раціональне, то q_0^∞-зображення називатимемо *раціональним* q_0^∞*-зображенням.*

Теорема 2. *Якщо раціональне* q_0^∞*-зображення числа* x *є періодичним, то* x *— раціональне число.*

Доведення. Оскільки розклад (3) є Q_2-зображенням числа x, то це твердження можна вивести з добре відомого факту: *число* x *є раціональним, якщо його* Q_2*-зображення є періодичним* та наступної леми.

Лема 1. q_0^∞*-зображення числа* x *є періодичним тоді і тільки тоді, коли його* Q_2*-зображення є періодичним.*

Доведення. Необхідність очевидно випливає з (5).

Доведемо достатність. Нехай x має періодичне раціональне Q_2-зображення

$$x = \Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots a_m(c_1c_2\ldots c_p)}.$$

Якщо $p = 1$ і $c_1 = 0$, то $\alpha_m = 1$ і

$$x = b_{\alpha_1}q_{\alpha_1} + b_{\alpha_2}q_{\alpha_1}q_{\alpha_2} + \ldots + b_{\alpha_{m-1}}\prod_{i=1}^{m-1}q_{\alpha_i} + b_1\prod_{i=1}^{m}q_{\alpha_i} =$$

де $b_0 = 0$, $b_1 = q_0$. Тоді, використовуючи (5), отримаємо

$$x = q_0^{a_1} + (1-q_0)q_0^{a_1+a_2-1} + ... + (1-q_0)^{k-1}q_0^{a_1+a_2+...+a_k-k+1} +$$
$$+ q_0^{a_1+a_2+...+a_k-k+1}(q_0(1-q_0)^k + q_0(1-q_0)^{k+1} + ...) =$$
$$= q_0^{a_1} + (1-q_0)q_0^{a_1+a_2-1} + ... + (1-q_0)^{k-1}q_0^{a_1+a_2+...+a_k-k+1} + (1-q_0)^k q_0^{a_1+a_2+...+a_k-k+1} = \Delta^{q_0^\infty}_{a_1...a_k(1)},$$

де $k = \sum\limits_{i=1}^{m-1} \alpha_i$, $a_1 + a_2 + \ldots + a_j = n : \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = j$.

Якщо $p = 1$ і $c_1 = 1$, то $\alpha_m = 0$ і

$$x = \Delta^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_{m-1}1(0)},$$

тобто маємо попередній випадок.

Якщо $p > 1$, то в наборі $(c_1, c_2, \ldots, c_p)$ існують як 0, так і 1.

Далі, в разі потреби, для спрощення записів використовуватимемо скорочене позначення $a_1 + a_2 + \ldots + a_k = \tau_k$.

Тоді знайшовши суму $c_1 + c_2 + \ldots + c_p = q$, знаходимо числа $n_1, n_2, \ldots n_q$ такі, що $c_{n_1} + c_{n_2} + \ldots + c_{n_j} = j$.

Звідки знаходимо $s_1 = n_1,\ s_2 = n_2 - c_1,\ \ldots\ s_j = n_j - (c_1 + c_2 + \ldots + c_{j-1})$.

Тоді

$$x = q_0^{a_1} + (1-q_0)q_0^{\tau_2-1} + \ldots + (1-q_0)^{k-1}q_0^{\tau_k-k+1} + (1-q_0)^k q_0^{\tau_k+s_1-k} + (1-q_0)^{k+1}q_0^{\tau_k+s_1+s_2-k-1} + \ldots +$$
$$+ (1-q_0)^{k+q-1}q_0^{\tau_k+s_1+s_2+...+s_q-k-q+1} + (1-q_0)^{k+q}q_0^{\tau_k+2s_1+s_2+...+s_q-k-q} +$$
$$+ (1-q_0)^{k+q+1}q_0^{\tau_k+2s_1+2s_2+...+s_q-k-q} + ... + (1-q_0)^{k+2q-1}q_0^{\tau_k+2s_1+2s_2+...+2s_q-k-2q+1} + ... =$$
$$= \Delta^{q_0^\infty}_{a_1a_2...a_k(s_1s_2...s_q)},$$

тобто q_0^∞−зображення числа x є періодичним. □

□

Наслідок 1. *Раціональне q_0^∞-зображення ірраціонального числа є неперіодичним.*

Виникає питання: чи правильне твердження, обернене до теореми 2?

Відповідь на нього дає наступний контрприклад.

Покажемо, що при $q_0 = \dfrac{1}{3}$ число $x = \dfrac{1}{2}$ має неперіодичне q_0^∞-зображення.

Припустимо супротивне. Нехай $\dfrac{1}{2} = \Delta^{\left(\frac{1}{3}\right)^\infty}_{a_1...a_k(c_1...c_m)}$, тобто

$$\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{a_1} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{a_1+a_2-1} + ... + \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{a_1+a_2+...+a_k-k+1} +$$
$$+ \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{a_1+a_2+a_k-k+1}\left[\frac{\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{c_1-1} + ... + \left(\frac{2}{3}\right)^m\left(\frac{1}{3}\right)^{c_1+c_2+...+c_m-m}}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^m\left(\frac{1}{3}\right)^{c_1+c_2+...+c_m-m}}\right].$$

Очевидно, що числа

$$A = 3^{a_1+a_2+...+a_k}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{a_1} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{a_1+a_2-1} + ... + \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{a_1+a_2+...+a_k-k+1}\right],$$

$$B = 3^{a_1+a_2+...+a_k}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{a_1+a_2+a_k-k+1},$$

$$C = 3^{c_1+c_2+...+c_m}\left[\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{c_1-1} + ... + \left(\frac{2}{3}\right)^{m}\left(\frac{1}{3}\right)^{c_1+c_2+...+c_m-m}\right]$$

є натуральними.

Отже

$$\frac{1}{2} = \frac{A}{3^{a_1+a_2+...+a_k}} + \frac{B}{3^{a_1+a_2+...+a_k}}\cdot\frac{C}{3^{c_1+c_2+...+c_m}-2^m},$$

звідки

$$\frac{3^{a_1+a_2+...+a_k}\cdot(3^{c_1+c_2+...+c_m}-2^m)}{2} = A\left(3^{c_1+c_2+...+c_m}-2^m\right) + BC.$$

Оскільки права частина останньої рівності — натуральне число, то вираз $3^{a_1+a_2+...+a_k}\cdot(3^{c_1+c_2+...+c_m}-2^m)$ має ділитись на 2. Це, очевидно, не так, а отже наше припущення невірне і число $x = \dfrac{1}{2}$ має неперіодичне q_0^∞-зображення при $q_0 = \frac{1}{3}$.

3. Геометрія q_0^∞-зображення чисел

Означення **2.** Нехай $(c_1, c_2, \ldots, c_m)$– впорядкований набір натуральних чисел. *Циліндром рангу m з основою $c_1c_2\ldots c_m$* називається множина $\Delta^{q_0^\infty}_{c_1c_2\ldots c_m}$ чисел $x \in (0,1]$, перші m цифр q_0^∞-зображення яких є $c_1, c_2, \ldots, c_m$ відповідно, тобто

$$\Delta^{q_0^\infty}_{c_1c_2\ldots c_m} = \{x: \quad x = \Delta^{q_0^\infty}_{c_1c_2\ldots c_m a_{m+1}a_{m+2}\ldots},\ a_{m+i}\in\mathbb{N},\ i = 1,2,3,\ldots\}.$$

Безпосередньо з означення випливають наступні властивості циліндрів:

1. $\Delta^{q_0^\infty}_{c_1c_2\ldots c_m} = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\Delta_{c_1c_2\ldots c_m i}$;
2. $\Delta^{q_0^\infty}_{c_1c_2\ldots c_m} \subset [a;b]$, де

$$a = q_0^{c_1} + (1-q_0)q_0^{c_1+c_2-1} + ... + (1-q_0)^{m-1}q_0^{c_1+c_2+...+c_m-m+2} + (1-q_0)^m q_0^{c_1+c_2+...+c_m-m+1},$$

$$b = q_0^{c_1} + (1-q_0)q_0^{c_1+c_2-1} + ... + (1-q_0)^{m-1}q_0^{c_1+c_2+...+c_m-m+1} + (1-q_0)^m q_0^{c_1+c_2+...+c_m-m};$$

3. Для діаметра циліндра виконується рівність

$$d(\Delta^{q_0^\infty}_{c_1c_2\ldots c_m}) = (1-q_0)^m q_0^{c_1+c_2+...+c_m-m}.$$

4. $\max\Delta^{q_0^\infty}_{c_1c_2\ldots c_m(i+1)} = \inf\Delta^{q_0^\infty}_{c_1c_2\ldots c_m i}, \quad i = 1,2,\ldots;$

5. Циліндри одного рангу не перетинаються або співпадають (рівні), причому

$$\Delta^{q_0^\infty}_{c_1c_2\ldots c_m} = \Delta^{q_0^\infty}_{c'_1c'_2\ldots c'_m} \iff c_i = c'_i \quad i = \overline{1,m};$$

6. Мають місце рівності

$$\Delta^{q_0^\infty}_{c_1c_2\ldots c_m} \cap \Delta^{q_0^\infty}_{c'_1\ldots c'_m c'_{m+1}\ldots c'_{m+k}} = \begin{cases} \varnothing, & \text{якщо } \exists\, i \le m,\ c_i \ne c'_i, \\ \Delta^{q_0^\infty}_{c'_1 c'_2\ldots c'_m c'_{m+1}\ldots c'_{m+k}}, & \text{якщо } c_i = c'_i, i = \overline{1,m}. \end{cases}$$

7. Для довільної послідовності $(c_m) \in L$ переріз

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} \Delta^{q_0^\infty}_{c_1c_2\ldots c_m} = x = \Delta^{q_0^\infty}_{c_1c_2\ldots c_m\ldots}$$

є точка півінтервала $(0;1]$.

Лема 2. *Циліндр* $\Delta^{q_0^\infty}_{c_1c_2\ldots c_m}$ *є півінтервалом* $(a;b]$, *де*

$$a = q_0^{c_1} + (1-q_0)q_0^{c_1+c_2-1} + \ldots + (1-q_0)^{m-1}q_0^{c_1+c_2+\ldots+c_m-m+2} + (1-q_0)^m q_0^{c_1+c_2+\ldots+c_m-m+1} \equiv$$
$$\equiv \Delta^{q_0^\infty}_{c_1c_2\ldots c_{m-1}(c_m+1)(1)},$$
$$b = q_0^{c_1} + (1-q_0)q_0^{c_1+c_2-1} + \ldots + (1-q_0)^{m-1}q_0^{c_1+c_2+\ldots+c_m-m+1} + (1-q_0)^m q_0^{c_1+c_2+\ldots+c_m-m} \equiv$$
$$\equiv \Delta^{q_0^\infty}_{c_1c_2\ldots c_{m-1}c_m(1)}.$$

Доведення. Враховуючи властивість 2, залишається довести включення

$$(a;b] \subset \Delta^{q_0^\infty}_{c_1c_2\ldots c_m}.$$

Нехай x – будь-яке число з $(a;b]$, тобто $0 < a < x \le b \le 1$.

Згідно з теоремою 1 число x розкладається в ряд (3):

$$x = q_0^{a_1} + \sum_{n=1}^{\infty}(1-q_0)^n q_0^{a_1+a_2+\ldots+a_{n+1}-n}.$$

Тоді $a_i(x) = a_i(a) = a_i(b) = c_i$ при $i \le m-1$ і

$$c_m = a_m(b) \le a_m(x) < a_m(a) = c_m + 1,$$

тобто $a_m(x) = c_m$, а отже, $x \in \Delta^{q_0^\infty}_{c_1c_2\ldots c_m}$. □

Наслідок 2. *Довжина циліндра обчислюється за формулою*

$$|\Delta^{q_0^\infty}_{c_1c_2\ldots c_m}| = (1-q_0)^m q_0^{c_1+c_2+\ldots+c_m-m}.$$

Наслідок 3. *Має місце рівність (основне метричне відношення)*

$$\frac{|\Delta^{q_0^\infty}_{c_1c_2\ldots c_m i}|}{|\Delta^{q_0^\infty}_{c_1c_2\ldots c_m}|} = (1-q_0)q_0^{i-1}.$$

4. Оператор зсуву символів

У множині $\mathcal{Z}_{(0;1]}^{q_0^\infty}$ всіх q_0^∞-зображень дійсних чисел півінтервала $(0;1]$ розглянемо оператор $\widehat{\omega}$ зсуву цифр, означений рівністю

$$\widehat{\omega}\left(\Delta^{q_0^\infty}_{a_1a_2\ldots a_n\ldots}\right)=\Delta^{q_0^\infty}_{a_2a_3\ldots a_n\ldots},$$

який породжує функцію $\omega:\ (0;1]\to(0;1]$.

Даний оператор володіє властивістю сюр'єктивності, але не має властивості ін'єктивності, оскільки

$$\omega(\Delta^{q_0^\infty}_{ia_2\ldots a_n\ldots})=\omega(\Delta^{q_0^\infty}_{ja_2\ldots a_n\ldots})\quad \text{при } i\neq j.$$

Точки $\Delta^{q_0^\infty}_{(i)}$, $i=1,2,3,\ldots$, є інваріантними для відображення ω.

n-кратне застосування оператора зсуву $\widehat{\omega}$ приводить до оператора $\widehat{\omega}^n$:

$$\widehat{\omega}^n\left(\Delta^{q_0^\infty}_{a_1a_2\ldots a_n\ldots}\right)=\Delta^{q_0^\infty}_{a_{n+1}a_{n+2}\ldots}.$$

Лема 3. 1. *Функція $\omega(x)$ є кусково-лінійною, причому лінійною на кожному циліндрі першого рангу:*

$$\omega(x)=\frac{q_0^{1-i}x-q_0}{1-q_0},\quad \textit{якщо}\quad x\in\Delta^{q_0^\infty}_i, \tag{6}$$

тобто $x=\Delta^{q_0^\infty}_{ia_2\ldots a_n\ldots}$, $\quad i=1,2,3,\ldots$.

2. *В точці* $x=\Delta^{q_0^\infty}_{i(1)}$, $i>1$, *вона має розрив першого роду зі стрибком* 1.

Доведення. 1. Справді,

$$x=\Delta^{q_0^\infty}_{ia_2a_3\ldots a_n\ldots}=q_0^i+q_0^{i-1}(1-q_0)\sum_{n=1}^{\infty}(1-q_0)^n q_0^{a_2+\ldots+a_{n+1}-n},$$

тобто

$$x=q_0^i+q_0^{i-1}(1-q_0)\omega(x),$$

звідки випливає (6).

2. Безпосередньо з означення функції ω маємо

$$\omega(\Delta^{q_0^\infty}_{i(1)})=\Delta^{q_0^\infty}_{(1)}=1.$$

Дослідимо поведінку функції $\omega(x)$ в правому ε-півоколі точки $x=\Delta^{q_0^\infty}_{i(1)}$. Оскільки умова $x\to\Delta^{q_0^\infty}_{i(1)}+0$ рівносильна умові $x\in\Delta^{q_0^\infty}_{[i-1]j}$, де $j\to\infty$, то

$$\lim_{x\to\Delta^{q_0^\infty}_{i(1)}+0}\omega(x)=\lim_{j\to\infty}\omega\left(\Delta^{q_0^\infty}_{(i-1)j(1)}\right)=\lim_{j\to\infty}\Delta^{q_0^\infty}_{j(1)}=0.\quad\square$$

Зауваження 3. *Всі прямі, що є графіками лінійних функцій* (6), *мають різні кутові коефіцієнти, але вісь ординат перетинають в одній точці.*

Наслідок 4. *Оператор зсуву символів ω кожну підмножину півінтервала* $(0;1]$ *нульової міри Лебега переводить в множину нульової міри Лебега, а підмножину повної міри – в множину повної міри; більше того прообразом множини нульової міри є множина нульової міри, а множини повної міри – множина повної міри.*

5. Хвостові множини

У множині $\mathcal{Z}^{q_0^\infty}_{(0,1]}$ всіх q_0^∞-зображень чисел $(0,1]$ введемо бінарне відношення еквівалентності "мати однаковий хвіст" (символічно: $\sim$).

Означення **3.** Будемо говорити, що два q_0^∞-зображення

$$\Delta^{q_0^\infty}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots} \quad i \quad \Delta^{q_0^\infty}_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots}$$

мають однаковий хвіст, або *перебувають у відношенні* $\sim$, якщо існують натуральні числа m та k такі, що $\alpha_{m+j} = \beta_{k+j}$ для будь-якого $j \in N$.

Очевидно, що відношення $\sim$ є відношенням еквівалентності (тобто має властивості рефлективності, симетричності та транзитивності) і розбиває множину, на якій воно задане, на класи еквівалентності. Кожен з класів еквівалентності називатимемо *хвостовою множиною.* Кожна хвостова множина однозначно визначається довільним своїм елементом (представником).

Будемо говорити, що два числа x і y мають однаковий хвіст (або пребувають у відношенні $\sim$), якщо їх q_0^∞-зображення перебувають у відношенні $\sim$.

Символічно: $x \sim y$.

Лема 4. *Кожна хвостова множина є зліченною і щільною в* $(0,1]$ *множиною.*

Доведення. Нехай H — довільний клас еквівалентності, $x_0 = \Delta^{q_0^\infty}_{c_1\ldots c_k\ldots}$ — його представник. Тоді очевидно, що для довільного натурального m існує множина H_m таких чисел x, що $\alpha_{m+j}(x) = \alpha_{k+j}(x_0)$ для довільного $j \in N$, $k = 1, 2, \ldots$.

Тоді множина $H = \bigcup\limits_{m \in N} H_m$, будучи зліченним об'єднанням зліченних множин, є множиною зліченною.

Доведемо тепер, що множина H щільна в $(0,1]$. Оскільки належність числа x до множини H не залежить від довільної скінченної кількості перших символів його q_0^∞-зображення, то в кожному з циліндрів довільного рангу m існує точка множини H. Отже, H є всюди щільною в $(0,1]$ множиною. Що й вимагалось довести. $\square$

Теорема 3. *Фактор-множина* $G \equiv (0,1]/\sim$ *є континуальною.*

Доведення. Скористаємось методом доведення від супротивного. Припустимо, що G є зліченною. Тоді, згідно з лемою 2, півінтервал $(0,1]$ є зліченним об'єднанням зліченних множин. Але добре відомо, що остання множина є зліченною, а півінтервал $(0,1]$ є континуальною множиною. Отримана суперечність доводить теорему. $\square$

5.1. **Задача Гаусса-Кузьміна для q_0^{∞}-зображень чисел.** Нехай $u = \Delta^{q_0^{\infty}}_{a_1 a_2 \ldots a_k \ldots}$ — q_0^{∞}-зображення числа $u \in (0;1]$. Позначимо $z_n(u) = \Delta^{q_0^{\infty}}_{a_{n+1} a_{n+2} \ldots a_{n+k} \ldots}$. Розглянемо множину

$$E_n(x) = \{u: \ u \in (0;1], \ z_n(u) < x\}.$$

Задача Гаусса-Кузьміна полягає у визначенні границі $\lambda[(E_n(x)]$ при $n \to \infty$.

Теорема 4. *Міра Лебега множини*

$$E_n(x) = \{u: \ u \in [0;1], \quad z_n(u) < x\} \tag{7}$$

не залежить від n і дорівнює x, тобто

$$\lambda[E_n(x)] = x.$$

Доведення. Нехай $\Delta^{q_0^{\infty}}_{x_1 \ldots x_n \ldots}$ — q_0^{∞}-зображення числа x, а $\Delta^{q_0^{\infty}}_{u_1 \ldots u_n \ldots}$ — q_0^{∞}-зображення числа u.

При $n = 0$ множина

$$E_0(x) = \{u: \ u \in (0;1], \quad z_0(u) = u < x\}$$

містить ті і тільки ті точки $(0;1]$, які менші x. Тому $\lambda[E_0(x)] = x$.

При $n = 1$ належінсть точки u множині

$$E_1(x) = \{u: \ u \in (0,1], \quad z_1(u) = \Delta^{q_0^{\infty}}_{u_2 \ldots u_n \ldots} < x\}$$

не залежить від її першого q_0^{∞}-символа. Більше того,

$$\overline{u} = \Delta^{q_0^{\infty}}_{a_1 u_1 \ldots u_n \ldots} \in E_1 \quad \Leftrightarrow \quad u = \Delta^{q_0^{\infty}}_{u_1 \ldots u_n \ldots} \in E_0$$

і

$$z_1(u) < x \quad \Leftrightarrow \quad \overline{u} < \overline{x} = \Delta^{q_0^{\infty}}_{a_1 x_1 \ldots x_n \ldots} \, .$$

Тому

$$E_1(x) = \bigcup_{c=1}^{\infty} [\Delta^{q_0^{\infty}}_c \cap E_1(x)] \quad \text{і} \quad E_0(x) \overset{(1-q_0)q_0^{c-1}}{\sim} [\Delta^{q_0^{\infty}}_c \cap E_1(x)].$$

Звідки

$$\lambda[E_1(x)] = \sum_{c=1}^{\infty} \lambda[\Delta^{q_0^{\infty}}_c \cap E_1(x)] = \sum_{c=1}^{\infty} (1-q_0) q_0^{c-1} \lambda[E_0(x)] = \lambda[E_0(x)] \sum_{c=1}^{\infty} (1-q_0) q_0^{c-1} = x.$$

Аналогічно

$$E_n(x) = \bigcup_{c_1=1}^{\infty} \dots \bigcup_{c_n=1}^{\infty} [\Delta^{q_0^{\infty}}_{c_1\dots c_n} \cap E_n(x)]$$

і

$$E_0(x) \overset{k}{\sim} [\Delta^{q_0^{\infty}}_{c_1\dots c_n} \cap E_n(x)], \quad \text{де} \quad k = (1-q_0)^n q_0^{c_1+\dots+c_n-n}.$$

Тому

$$\lambda[E_n(x)] = \sum_{c_1=1}^{\infty} \dots \sum_{c_n=1}^{\infty} \lambda[\Delta^{q_0^{\infty}}_{c_1\dots c_n} \cap E_n(x)] =$$

$$= \lambda[E_0(x)] \sum_{c_1=1}^{\infty} \dots \sum_{c_n=1}^{\infty} (1-q_0)^n q_0^{c_1+\dots+c_n-n} = \lambda[E_0(x)] = x.$$

□

6. Метричні задачі

Метрична теорія дійсних чисел займається задачами про міру Жордана, Лебега та ін. множин дійсних чисел, що володіють певною властивістю, зокрема, визначених умовами на вживання символів (цифр) у зображенні числа в тій чи іншій системі, а також розв'язанням теоретико-числових проблем з використанням засобів теорії міри.

Лема 5. *Для міри Лебега виконуються наступні співвідношення:*

$$\lambda\left(\bigcup_{i=k+1}^{\infty} \Delta_{c_1\dots c_m i}\right) = (1-q_0)^m q_0^{c_1+\dots+c_m+k-m}; \tag{8}$$

$$\lambda\left(\bigcup_{i=1}^{k} \Delta_{c_1\dots c_m i}\right) = (1-q_0)^m q_0^{c_1+\dots+c_m-m}(1-q_0^k); \tag{9}$$

$$\lambda\left(\bigcup_{i=k+1}^{n} \Delta_{c_1\dots c_m i}\right) = (1-q_0)^m q_0^{c_1+\dots+c_m+k-m}(1-q_0^{n-k}). \tag{10}$$

Доведення. Використовуючи наслідок 1 леми 2 та властивості міри Лебега, отримуємо:

$$\lambda\left(\bigcup_{i=k+1}^{\infty} \Delta_{c_1\dots c_m i}\right) = \sum_{i=k+1}^{\infty} \lambda(\Delta_{c_1\dots c_m i}) =$$

$$= \sum_{i=k+1}^{\infty} (1-q_0)^{m+1} q_0^{c_1+\dots+c_m+i-m-1} = (1-q_0)^m q_0^{c_1+\dots+c_m+k-m};$$

$$\lambda\left(\bigcup_{i=1}^{k} \Delta_{c_1\dots c_m i}\right) = \sum_{i=1}^{k} \lambda(\Delta_{c_1\dots c_m i}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k}(1-q_0)^{m+1}q_0^{c_1+\ldots+c_m+i-m-1} = (1-q_0)^m q_0^{c_1+\ldots+c_m-m}(1-q_0^k);$$

$$\lambda\left(\bigcup_{i=k+1}^{n}\Delta_{c_1\ldots c_m i}\right) = \sum_{i=k+1}^{n}\lambda(\Delta_{c_1\ldots c_m i}) =$$

$$= \sum_{i=k+1}^{n}(1-q_0)^{m+1}q_0^{c_1+\ldots+c_m+i-m-1} = (1-q_0)^m q_0^{c_1+\ldots+c_m+k-m}(1-q_0^{n-k}).$$

□

Теорема 5. *Множина*

$$C = C[q_0^\infty,(V_n)] = \{x:\ x = \Delta^{q_0^\infty}_{a_1a_2\ldots a_n\ldots},\ a_n(x)\in V_n\subseteq\mathbb{N}\} \qquad \text{є:}$$

1. *об'єднанням півінтервалів, якщо $V_n=\mathbb{N}$ для всіх n, більших деякого n_0;*
2. *ніде не щільною множиною, якщо нерівність $V_n\neq\mathbb{N}$ виконується нескінченну кількість разів;*
3. *міра Лебега множини C обчислюється за формулою*

$$\lambda(C) = \prod_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda(F_{k+1})}{\lambda(F_k)} = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda(\overline{F}_{k+1})}{\lambda(F_k)}\right),$$

де $F_0=(0;1]$, $F_k = \bigcup\limits_{c_1\in V_1}\ldots\bigcup\limits_{c_{k-1}\in V_{k-1}}\bigcup\limits_{i\in V}\Delta_{c_1\ldots c_{k-1}i}$, $\overline{F}_{k+1}=F_k\backslash F_{k+1}$.

Доведення. 1. Очевидно, що при $V_n=\mathbb{N}$ для всіх $n\in\mathbb{N}$ $C=(0;1]$.

Якщо $V_n=\mathbb{N}$ для $n>n_0$, то

$$C\ni x = q_0^{a_1}+(1-q_0)q_0^{a_1+a_2-1}+\ldots+(1-q_0)^{n_0-1}q_0^{a_1+\ldots+a_{n_0}-n_0+1}+(1-q_0)^{n_0}q_0^{a_1+\ldots+a_{n_0}-n_0}x_1,$$

де

$$x_1 = q_0^{a_{n_0+1}}+(1-q_0)q_0^{a_{n_0+1}+a_{n_0+2}-1}+\ldots. \tag{11}$$

Множина всіх

$$\widetilde{x} = (1-q_0)^{n_0}q_0^{a_1+\ldots+a_{n_0}-n_0}x_1,$$

де (a_{n_0+k}) – пробігає множину всіх послідовностей натуральних чисел, є циліндром першого рангу з основою $a=a_1+a_2+\ldots+a_{n_0}$.

Тому

$$C = \bigcup_b\left[b\oplus\Delta_a^{q_0^\infty}\right],$$

де $b = q_0^{a_1}+(1-q_0)q_0^{a_1+a_2-1}+\ldots+(1-q_0)^{n_0-1}q_0^{a_1+\ldots+a_{n_0}-n_0+1}$, а $(a_1,a_2,\ldots,a_{n_0-1})$ – пробігає $\underbrace{\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\ldots\times\mathbb{N}}_{n_0-1}$, що і вимагалось довести.

2. Скористаємось означенням ніде не щільної множини, а саме: покажемо, що в будь-якому інтервалі $(c;d)$ існує підінтервал $(c';d')$, що не містить точок множини C.

Нехай $c = \Delta^{q_0^\infty}_{c_1c_2\ldots c_n\ldots}$ і $d = \Delta^{q_0^\infty}_{d_1d_2\ldots d_n\ldots}$. Оскільки $c < d$, то існує m таке, що

$$c_m > d_m \quad \text{і} \quad c_j = d_j \quad \text{при} \quad j < m.$$

Таким інтервалом $(c'; d')$ є

$$(c'; d') = \nabla_{d_1d_2\ldots d_m(d_{m+1}+1)\underbrace{1\ldots1}_{k}j},$$

де k таке, що $V_{m+k+2} \neq \mathbb{N}$ і $j = \mathbb{N} \setminus V_{m+k+2}$.

Справді цей інтервал лежить правіше c, бо $c_m > d_m$ і лівіше d, бо $d_{m+1} + 1 > d_{m+1}$. А не містить він точок множини C, бо $j \in \overline{V} = \mathbb{N} \setminus V$.

3. Оскільки F_k – це об'єднання циліндрів рангу k, серед внутрішніх точок яких є точки множини C, то $C \subset F_{k+1} \subset F_k$ для всіх $k \in \mathbb{N}$ і більше того,

$$C = \lim_{k\to\infty} F_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k \quad \text{і} \quad \lambda(C) = \lim_{k\to\infty} \lambda(F_k).$$

Тому з рівності $F_{k+1} = F_k \backslash \overline{F}_{k+1}$ маємо $\lambda(F_k) = \lambda(F_{k-1}) - \lambda(\overline{F}_k)$. Звідки

$$\lambda(F_k) = \prod_{i=1}^{k} \frac{\lambda(F_i)}{\lambda(F_{i-1})} = \prod_{i=1}^{k} \frac{\lambda(F_{i-1}) - \lambda(\overline{F}_i)}{\lambda(F_{i-1})} = \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{\lambda(\overline{F}_i)}{\lambda(F_{i-1})}\right).$$

А отже,

$$\lambda(C) = \lim_{k\to\infty} \lambda(F_k) = \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda(\overline{F}_i)}{\lambda(F_{i-1})}\right). \quad \square$$

Наслідок 5. *Міра Лебега множини $C[q_0^\infty, (V_n)]$ дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли розбігається ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(\overline{F}_{k+1})}{\lambda(F_k)}.$$

Наслідок 6. *Якщо послідовність множин (V_n) є сталою, а саме $V_n = V \neq \mathbb{N}$, то множина $C[q_0^\infty, \{V_n\}]$ є множиною нульової міри Лебега.*

Теорема 6. *Нехай c і s – фіксовані натуральні числа. Множина*

$$D \equiv D[q_0^\infty, \overline{cs}] = \{x : \; x = \Delta^{q_0^\infty}_{a_1a_2\ldots a_n\ldots}, \quad \textit{де } \overline{a_na_{n+1}} \neq \overline{cs} \; \forall \; n \in \mathbb{N}\}$$

є ніде не щільною множиною нульової міри Лебега.

Доведення. Скористаємось означенням ніде не щільної множини, а саме: покажемо, що в будь-якому інтервалі $(a; b)$ існує підінтервал $(a'; b')$, що не містить точок множини D.

Нехай $a = \Delta^{q_0^\infty}_{a_1a_2\ldots a_n\ldots}$ і $b = \Delta^{q_0^\infty}_{b_1b_2\ldots b_n\ldots}$. Оскільки $a < b$, то існує m таке, що

$$a_m > b_m \quad \text{і} \quad a_j = b_j \quad \text{при} \quad j < m.$$

Нехай $a' = \Delta^{q_0^\infty}_{b_1\ldots b_{m-1}(b_m+1)b_{m+1}b_{m+2}\ldots}$ і $b' = \Delta^{q_0^\infty}_{b_1\ldots b_{m-1}b_m(b_{m+1}+1)b_{m+2}\ldots}$. Очевидно, що інтервал $(a'; b')$ міститься в $(a; b)$ і не містить точок множини D.

З означення множини D та циліндричних відрізків маємо:

$$D \subset \left(\bigcup_{a_1 \neq c} \Delta^{q_0^\infty}_{a_1}\right) \cup \left(\bigcup_{a_2 \neq s} \Delta^{q_0^\infty}_{ca_2}\right).$$

Звідки, враховуючи властивості міри Лебега, отримуємо:

$$\lambda(D) \leq \lambda(D) \sum_{i:i(\neq c} |\Delta^{q_0^\infty}_{i}| + \lambda(D) \sum_{i:i\neq s} |\Delta^{q_0^\infty}_{ci}| =$$

$$= (1-(1-q_0)q_0^{c-1})\lambda(D) + ((1-q_0)^{c-1} - (1-q_0)^2 q_0^{c+s-2})\lambda(D) =$$

$$= \lambda(D) - (1-q_0)^2 q_0^{c+s-2}\lambda(D),$$

що, очевидно, можливо тільки при $\lambda(D) = 0$. □

Теорема 7. *Множина чисел півінтервалу* $(0; 1]$ *з обмеженими символами* q_0^∞*-зображень є множиною нульової міри Лебега.*

Доведення. Позначимо через E_M множину чисел півінтервала $(0, 1]$, всі q_0^∞-символи яких менші за M. Нехай $\Delta_{c_1c_2\ldots c_n}$ — довільний циліндр рангу n, такий, що

$$c_k < M,\ k = \overline{1, n}. \tag{12}$$

Точки x цього циліндра, які задовольняють додаткову умову $c_{n+1}(x) = k$, утворюють інтервал $\nabla_{c_1c_2\ldots c_nk}$ рангу $n+1$. В силу основного метричного відношення (наслідок 3) $\left|\Delta^{q_0}_{c_1\ldots c_nk}\right| = (1-q_0)q_0^{k-1}\left|\Delta^{q_0}_{c_1\ldots c_n}\right|$, звідки

$$\lambda\left(\bigcup_{k\geqslant M} \Delta^{q_0}_{c_1\ldots c_nk}\right) = \left|\Delta^{q_0}_{c_1\ldots c_n}\right| \sum_{k\geqslant M}(1-q_0)q_0^{k-1} = \left|\Delta^{q_0}_{c_1\ldots c_n}\right| \sum_{i=0}^{\infty}(1-q_0)q_0^{M+i} = \left|\Delta^{q_0}_{c_1\ldots c_n}\right| q_0^M.$$

Оскільки $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \Delta^{q_0}_{c_1\ldots c_nk} = \Delta^{q_0}_{c_1\ldots c_n}$, то

$$\bigcup_{k<M} \left|\Delta^{q_0}_{c_1\ldots c_nk}\right| = (1-q_0^M)\left|\Delta^{q_0}_{c_1\ldots c_n}\right|. \tag{13}$$

Позначивши через $E_M^{(n)}$ множину чисел півінтервала $(0, 1]$, які задовольняють умові (12), з нерівності (13) бачимо, що частина множини $E_M^{(n+1)}$, яка міститься в деякому циліндрі $\Delta^{q_0}_{c_1c_2\ldots c_n}$ рангу n, має міру $(1-q_0^M)\left|\Delta^{q_0}_{c_1\ldots c_n}\right|$. Сумуючи нерівність (12) по всім циліндрам рангу n, які входять в множину $E_M^{(n)}$, отримаємо: $\lambda\left(E_M^{(n+1)}\right) = (1 - q_0^M)\lambda\left(E_M^{(n)}\right)$. Послідовне застосування цієї нерівності, очевидно, дає $\lambda\left(E_M^{(n+1)}\right) = (1-q_0^M)^n\lambda\left(E_M^{(1)}\right)$ $(n \geqslant 1)$, звідки $\lambda\left(E_M^{(n)}\right) \to 0$ $(n \to \infty)$, оскільки $(1-q_0^M) < 1$. Але визначена нами вище множина E_M, очевидно, міститься в кожній з множин $E_M^{(n)}$, внаслідок чого $\lambda(E_M) = 0$.

Покладаючи тепер $\bigcup\limits_{M=1}^{\infty} E_M = E$, отримаємо $\lambda(E) \leqslant \sum\limits_{M=1}^{\infty} \lambda(E_M) = 0$. Але кожне число з обмеженими елементами належить, очевидно, множині E_M при достатньо великому M, а значить, належить множині E. □

7. q_0^∞-циліндри і фрактальна розмірність Хаусдорфа-Безиковича

Оскільки q_0^∞-циліндри є Q_2-циліндрами рангу $c_1 + c_2 + \ldots + c_m$, а саме:

$$\Delta^{q_0^\infty}_{c_1 c_2 \ldots c_m} = \Delta^2_{\underbrace{0\ldots0}_{c_1-1}1\underbrace{0\ldots0}_{c_2-1}1\ldots\underbrace{0\ldots0}_{c_m-1}1},$$

то згідно з **??** при визначенні (обчисленні) фрактальної розмірності Хаусдорфа-Безиковича можна обмежитись Q_2-циліндрами.

Теорема 8. *Множина*

$$C \equiv C[q_0^\infty, V] = \{x : \ x = \Delta^{q_0^\infty}_{a_1 a_2 \ldots a_n \ldots}, \ a_n \in V \neq \mathbb{N}\}$$

є самоподібною, якщо V скінченна, і N-самоподібною, якщо V нескінченна, самоподібна і фрактальна розмірність Хаусдорфа-Безиковича якої є розв'язком рівняння

$$\sum_{v \in V} \left((1 - q_0) q_0^{v-1}\right)^x = 1.$$

Доведення. Позначимо $\hat{\Delta}^{q_0^\infty}_{c_1 \ldots c_n} = \Delta^{q_0^\infty}_{c_1 \ldots c_n} \cap C$. Очевидно, що

$$\begin{cases} C \subset \bigcup\limits_{v \in V} \hat{\Delta}^{q_0^\infty}_v, \\ \hat{\Delta}^{q_0^\infty}_v \overset{(1-q_0)q_0^{v-1}}{\sim} C. \end{cases}$$

Звідки, а також з означень самоподібної та N-самоподібної множини, самоподібної та N-самоподібної розмірності і того факту, що вони співпадають з розмірністю Хаусдорфа-Безиковича, випливає твердження теореми. □

Наслідок 7. *Множина $C \equiv C[q_0^\infty, V]$ є інваріантною відносно оператора зсуву символів.*

8. Самоподібні множини чисел типу Безиковича-Егглстона

Нехай $N_i(x, n)$ – кількість цифр i у q_0^∞-зображенні числа x до n-го місця включно, тобто

$$N_i(x, n) = \sharp\{j : \ a_j(x) = i, \ j \leq n\}.$$

Якщо існує границя

$$\lim_{n \to \infty} \frac{N_i(x, n)}{n} \equiv \nu_i(x),$$

то вона називається *частотою* цифри i у q_0^∞-зображенні числа x.

Коректність означення частоти є наслідком єдиності q_0^∞-зображення числа. Легко навести приклад числа, у якого відсутня частота принаймні однієї цифри. Наприклад, число

$$x = \Delta^{q_0^\infty}_{\underbrace{11}_{2}\underbrace{23}_{2}\underbrace{1111}_{4}\underbrace{4567}_{4}\underbrace{1...1}_{8}\underbrace{8...15}_{8}...}$$

не має частоти цифри 1, але має частоти рівні 0 всіх інших цифр.

Теорема 9. *Множина*

$$E \equiv E[q_0^\infty; \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n, \ldots] = \{x: \ \nu_i(x) = \tau_i, \quad i \in \mathbb{N}\}$$

є всюди щільною самоподібною множиною, розмірність Хаусдорфа-Безиковича якої обчислюється за формулою

$$\alpha_0(E[q_0^\infty, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n, \ldots]) = \frac{\ln \tau_1^{\tau_1} \tau_2^{\tau_2} \ldots \tau_n^{\tau_n} \ldots}{\ln(1-q_0) q_0^{\tau_1 + 2\tau_2 + \ldots + n\tau_n + \ldots - 1}}. \tag{14}$$

Доведення. Всюди щільність і самоподібність множини E випливає з того, що належність точки x до множини E не залежить від довільного скінченного числа її перших q_0^∞-символів і існують точки з відсутньою частотою принаймні одного символа.

При визначенні розмірності Хаусдорфа-Безиковича множини E, можна скористатись теоремою Біллінгслі: якщо μ_1 і μ_2 — неперервні ймовірнісні міри і

$$E \subset E_0 = \left\{ x: \quad \lim_{m \to \infty} \frac{\ln \mu_1(\Delta^{q_0^\infty}_{c_1(x) \ldots c_m(x)})}{\ln \mu_2(\Delta^{q_0^\infty}_{c_1(x) \ldots c_m(x)})} = \delta \right\},$$

то $\alpha_{\mu_2}(E) = \delta \alpha_{\mu_1}(E)$.

Для цього візьмемо в якості міри μ_2 — міру Лебега, а в якості μ_1 — ймовірнісну міру на борелівських множинах $[0;1]$, відносно якої $\{c_i(x)\}$ є послідовністю незалежних випадкових величин з розподілами $\mu_1\{x: \ c_k(x) = i\} = \tau_i$, $i \in N$.

Тоді

$$\mu_1(\Delta^{q_0^\infty}_{c_1(x)c_2(x)\ldots c_k(x)}) = \tau_1^{N_1(x,k)} \cdot \tau_2^{N_2(x,k)} \cdot \ldots \cdot \tau_m^{N_m(x,k)} \cdot \ldots,$$
$$\lambda(\Delta^{q_0^\infty}_{c_1(x)c_2(x)\ldots c_k(x)}) = (1-q_0)^k q_0^{c_1(x) + \ldots + c_k(x) - k} =$$
$$= \frac{(1-q_0)^k}{q_0^k} \cdot q_0^{N_1(x,k) + 2N_2(x,k) + \ldots + mN_m(x,k) + \ldots}.$$

Оскільки

$$\delta = \lim_{k \to \infty} \frac{\ln \mu_1(\Delta^{q_0^\infty}_{c_1(x)c_2(x)\ldots c_k(x)})}{\ln \lambda(\Delta^{q_0^\infty}_{c_1(x)c_2(x)\ldots c_k(x)})} = \lim_{k \to \infty} \frac{\ln \tau_1^{\frac{N_1(x,k)}{k}} \cdot \tau_2^{\frac{N_2(x,k)}{k}} \cdot \ldots \cdot \tau_m^{\frac{N_m(x,k)}{k}} \cdot \ldots}{\ln(1-q_0) q_0^{\frac{N_1(x,k)}{k} + \frac{2N_2(x,k)}{k} + \ldots + \frac{mN_m(x,k)}{k} + \ldots - 1}} =$$

$$= \frac{\ln \tau_1^{\tau_1} \tau_2^{\tau_2} \ldots \tau_m^{\tau_m} \ldots}{\ln(1-q_0) q_0^{\tau_1+2\tau_2+\ldots+m\tau_m+\ldots-1}},$$

і за посиленим законом великих чисел E має μ_1-міру рівну 1, тобто $\alpha_{\mu_1}(E) = 1$, то, згідно з теоремою Біллінгслі, має місце рівність (14). $\square$

Література

[1] *Гетьман Б. І., Працьовитий М. В., Барановський О. М.* Про властивості однієї сім'ї множин канторівського типу, що визначається умовами на елементи розкладу в ряд Енгеля // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – 2010. – № 11. – С. 97-118.

[2] *Дмитренко С. О., Кюрчев Д. В., Працьовитий М. В.* Ланцюгове A_2-зображення дійсних чисел // Український математичний журнал. – 2009. – том 61. – № 4. – С. 452-463.

[3] *Жихарева Ю. І., Працьовитий М. В.* Зображення чисел знакододатними рядами Люрота: основи тополого-метричної, фрактальної і ймовірнісної теорій // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – 2008. – № 9. – С. 200-211.

[4] *Колмогоров А.М., Фомін С.В.* Елементи теорії функцій і функціонального аналізу. – К.: Вища шк., 1974. – 456 с.

[5] *Постников А.Г.* Вероятностная теория чисел. М. : Знание, 1974. – 64 с.

[6] *Працьовитий М. В., Задніпряний М. В.* Геометрія і основи метричної теорії зображення дійсних чисел рядами Сільвестера // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. –

[7] *Працьовитий М. В.* Геометрія класичного двійкового зображення дійсних чисел. — К.: Вид-во НПУ імені М.П.Драгоманова. — 2012. — 68 с.

[8] *Працьовита І. М., Задніпряний М. В.* Розклади чисел в ряди Сільвестера та їх застосування // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – 2009. – № 10. – С. 73-87.

[9] *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. – Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. – 296 с.

[10] *Турбин А. Ф., Працевитый Н. В.* Фрактальные множества, функции, распределения. К. : Наукова думка, 1992. – 208 с.

[11] *Kakutani S.* Equivalence of infinite product measures // Ann. of Math. – 1948. – Vol. 49. – P. 214-224.

[12] *Pratsiovytyi M.* Geometry of numbers in the representation systems with infinite alphabet is a basis of topological, metric, fractal, and probabilistic theories // International Conference on Algebra dedicated to 100th anniversary of S.M. Chernikov. Kyiv, Ukraine, August 20-26, 2012 / Book of abstracts. – P. 118.

[13] *Pratsiovytyi M., Kyurchev D.* Properties of the random variable defined by A_2-continued fraction with independent elements // Random operators and stochastic equations. – 2009. – Volume 17. – Number 1. – P. 91-101.

[14] *Zhykharyeva Y., Pratsiovytyi M.* Expansions of numbers in positive Luroth series and their applications to metric, probabilistic and fractal theories of numbers // Algebra and Discrete Mathematics. – 2012. – Volume 14. – Number 1. – P. 145-160.