Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2013, № 15.— С. 134–143.

УДК 517.5

Q_2-зображення дробової частини дійсного числа та інверсор його цифр

М. В. Працьовитий, С. В. Скрипник
(Національний педагогічний університет імені М.П.Драгоманова)

Анотація. У роботі розглядається Q_2-зображення дробової частини дійсного числа, яке є узагальненням класичного двійкового зображення, вказуються ймовірнісні задачі, які приводять до цього поняття, розглядається інверсор цього зображення, його властивості та зв'язок з породжуючим його Q_2-зображенням.

Ключові слова: Q_2-зображення числа, двійкове зображення числа, двосимвольна система зображення чисел, циліндричні множини чисел, інверсор цифр, сингулярна функція.

Abstract. We consider the Q_2-representation of the fractional part of a real number, which is a generalization of the classical binary image, specified probability problems, which lead to the concept, the inversor of this image, its properties and connection with its own Q_2-representation.

Keywords: Q_2-representation of the number, binary image of the number, two-letter coding system of numbers, cylinder sets, inversor of digits, singular function.

1. Вступ

Двійкова система числення відома давно, нею на початку XII століття користувався Леонардо Пізанський. У 1494 році Лука Почиолі використовував її для розв'язання задач про мінімальне число зважування гирь різної маси. Систематичний виклад двійкової системи числення здійснив Дж. Непер у 1617 році.

Сьогодні розвиваються чимало теорій (моделей загальної аксіоматичної теорії), які є аналогами теорії дійсних чисел як теорії нескінченних десяткових рядів Карла Вейєрштраса. Один із класів таких теорій містить теорію дійсних чисел як теорію двійкових рядів і їх різнопланових узагальнень та метричні теорії двосимвольних кодувань. Часто вони ґрунтуються на відомій теорії дійсних чисел та ідеї іншого нового способу їх представлення та зображення (формального запису).

Ці системи зображення дійсних чисел мають класичний двійковий алфавіт $\{0,1\}$ і або нульову, або ненульову надлишковість, тобто мають єдине (не більше двох), або навіть нескінченну кількість зображень одного і того ж числа. До згаданих зображень відносять ланцюгове, медіантне, неповними сумами збіжних рядів.

Ще одним з таких способів представлення дійсних чисел є Q_2-представлення. Q_2-представлення дійсних чисел допомагає символічно легко задавати деякий клас множин, функцій, випадкових величин, є зручним апаратом для задання фрактальних об'єктів.

Q_2-представлення як узагальнення двійкового зображення дійсних чисел з методологічної точки зору не лише збагачує можливості задання математичних об'єктів, а й забезпечує неперервний діапазон, а отже, тонку неперервну залежність математичних об'єктів від геометрії цифр.

2. Поняття Q_2-зображення дробової частини дійсного числа

Нехай q_0 - фіксоване дійсне число з інтервалу $(0,1)$, $q_1 = 1 - q_0$, $\beta_i = iq_{1-i}$, $i \in A = \{0,1\}$, тобто $\beta_0 = 0, \beta_1 = q_0$.

Теорема 1. *Для довільного $x \in [0,1]$ існує послідовність (a_n), $a_n \in A$ така, що*

$$x = \beta_{a_1} + \sum_{k=2}^{\infty}\left(\beta_{a_k}\prod_{j=1}^{k-1} q_{a_j}\right) = \triangle^{Q_2}_{a_1 a_2 \ldots a_n \ldots}\ ,\ a_n \in A. \tag{1}$$

Подання числа x рядом (1) називається Q_2-*представленням* цього числа, а його формальний запис $x = \triangle^{Q_2}_{a_1 a_2 \ldots a_n \ldots}$ називатимемо його Q_2-*зображенням.*

Q_2-зображення $\triangle^{Q_2}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k \ldots}$ числа $x \in [0,1]$ називається *періодичним*, якщо існують $m \in N_0$ і $t \in N$ такі, що

$$\alpha_{m+nt+j}(x) = \alpha_{m+j}(x)$$

для довільних $n, j \in N$.

Це скорочено записується так:

$$\triangle^{Q_2}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k \ldots (\alpha_{m+1}\alpha_{m+2}\ldots\alpha_{m+t})}.$$

При цьому набір цифр $(\alpha_{m+1}\alpha_{m+2}\ldots\alpha_{m+t})$ називається *періодом*, а число t – його *довжиною.*

Нехай $(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ - фіксований впорядкований набір чисел з $\{0,1\}$.

Циліндром рангу m з основою $(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ називається множина $\triangle^{Q_2}_{c_1 c_2 \ldots c_m}$ всіх чисел $x \in [0,1]$, які мають наступне Q_2-зображення:

$$\triangle^{Q_2}_{c_1 c_2 \ldots c_m a_{m+1} a_{m+2} \ldots a_{m+k} \ldots}$$

Властивості циліндричних множин:

1. $\Delta^{Q_2}_{c_1 c_2 \ldots c_k} = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \Delta^{Q_2}_{c_1 c_2 \ldots c_k i}$.

2. $|\Delta^{Q_2}_{c_1 c_2 \ldots c_k}| \to 0$, $k \to \infty$.

3. Циліндри одного рангу не перетинаються або співпадають, причому $\Delta^{Q_2}_{c_1 c_2 \ldots c_k} = \Delta^{Q_2}_{s_1 s_2 \ldots s_k}$ тоді і тільки тоді, коли $c_i = s_i$ $i = \overline{1, m}$;

4. $\nabla^{Q_2}_{c_1 c_2 \ldots c_k i} \bigcap \nabla^{Q_2}_{c_1 c_2 \ldots c_k j} = \varnothing, i \neq j$.

5. $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \Delta^{Q_2}_{c_1 c_2 \ldots c_k} = x = \Delta^{Q_2}_{c_1 c_2 \ldots c_k \ldots}$.

6. Основне метричне співвідношення:

$$\frac{|\Delta^{Q_2}_{c_1 c_2 \ldots} c_k i|}{|\Delta^{Q_2}_{c_1 c_2 \ldots} c_k|} = q_i.$$

Властивість 1 випливає безпосередньо з означення циліндру. Властивості 3 і 4 очевидні в силу єдиності модифікованого Q_2-зображення довільного дійсного числа x з $[0;1]$. Оскільки циліндр рангу m з основою $c_1 c_2 \ldots c_m$ – це послідовність вкладених компактів, то властивість 5 випливає з аксіоми Кантора.

При обчисленні фрактальної розмірності Хаусдорфа-Безиковича підмножин відрізка $[0,1]$ можна використовувати їх покриття циліндрами Q_2-зображення, що призводить до еквівалентного означення. Зауважимо, що Q_2-представлення(зображення) є узагальненням класичного двійкового подання(зображення) числа:

$$x = \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2^2} + \ldots + \frac{\alpha_k}{2^k} + \ldots \equiv \triangle^2_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k \ldots}$$

і співпадає з ним, коли $q_0 = \dfrac{1}{2}$.

Q_2-зображення є двосимвольною системою кодування дробової частини дійних чисел з алфавітом $A = \{0,1\}$, вона має нульову надлишковість (це означає, що практично всі числа мають єдине зображення і лише злічення підмножина множини раціональних чисел має їх два).

У випадку, коли число має два зображення, домовляються використовувати лише одне позначення, наприклад, те, яке містить в періоді 0. Після цієї домовленості кожна точка має єдине Q_2-зображення.

Q_2-зображення вперше було введене (описане) і використане в 1986 році у роботі [5], хоча в «незовсім явному» вигляді воно зустрічалось вже у роботі [6].

З тих пір Q_2 -зображення фігурувало у десятках робіт і використовувалось для моделювання випадкових величин, функцій, мір, динамічних систем тощо[12,13].

Узагальненням Q_2-зображення є марковське двосимвольне зображення, яке в явному вигляді як система кодування чисел описане в роботі [11]. Як система представлення числа воно зустрічалось уже в роботі [10]. «Геометрія» цього зображення є квазісамоподібною.

3. Задачі, що призводять до поняття Q_2-зображення чисел

Нескладно навести приклади задач, які приводять до поняття Q_2-зображення чисел. Однією з таких є задача про вираз функції розподілу випадкової величини з незалежними однаково розподіленими двійковими цифрами, розв'язок якої дає наступне твердження.

Теорема 2. *Значення функції F_ξ невиродженого розподілу випадкової величини*

$$\xi = \triangle^2_{\eta_1\eta_2\ldots\eta_k\ldots}$$

з незалежними однаково розподіленими двійковими цифрами η_k з ймовірностями $P\{\eta_k = 0\} = p_0, P\{\eta_k = 1\} = 1 - p_0 = p_1$ має Q_2-зображення з $q_0 = p_0$, а саме:

$$F_\xi(x) = \beta_{\alpha_1(x)} + \sum_{k=2}^{\infty}\left(\beta_{\alpha_k(x)}\prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j(x)}\right).$$

Доведення. Згідно з означенням $F_\xi(x) = P\{\xi < x\}$.

Враховуючи геометрію двійкового зображення, подію $\{\xi < x\}$ можна подати у вигляді:

$\{\xi < x\} = \{\eta_1 < \alpha_1(x)\} \cup \{\eta_1 = \alpha_1(x) \wedge \eta_2 < \alpha_2(x)\} \cup \ldots$
$\ldots \cup \{\eta_1 = \alpha_1(x), \eta_2 = \alpha_2(x), \ldots, \eta_k = \alpha_k(x), \eta_{k+1} < \alpha_{k+1(x)}\} \cup \ldots.$

Враховуючи, що події $\{\eta_1 < \alpha_1(x)\}$, $\{\eta_1 = \alpha_1(x) \wedge \eta_2 < \alpha_2(x)\}$, $\ldots\{\eta_1 = \alpha_1(x), \eta_2 = \alpha_2(x), \ldots, \eta_k = \alpha_k(x), \eta_{k+1} < \alpha_{k+1(x)}\}\ldots$ є несумісними, маємо наступний вираз для значення функції розподілу:

$F_\xi(x) = P\{\xi < x\} = P\{\{\eta_1 < \alpha_1(x)\} \cup \{\eta_1 = \alpha_1(x) \wedge \eta_2 < \alpha_2(x)\} \cup \ldots$
$\ldots \cup \{\eta_1 = \alpha_1(x), \eta_2 = \alpha_2(x), \ldots, \eta_k = \alpha_k(x), \eta_{k+1} < \alpha_{k+1(x)}\} \cup \ldots\} =$
$= P\{\{\eta_1 < \alpha_1(x)\}\} + P\{\{\eta_1 = \alpha_1(x) \wedge \eta_2 < \alpha_2(x)\}\} + \ldots$
$\ldots + P\{\{\eta_1 = \alpha_1(x), \eta_2 = \alpha_2(x), \ldots, \eta_k = \alpha_k(x), \eta_{k+1} < \alpha_{k+1(x)}\}\}\ldots$

Врахувавши те, що події η_k є незалежними, отримаємо:

$F_\xi(x) = P\{\{\eta_1 < \alpha_1(x)\}\} + P\{\{\eta_1 = \alpha_1(x)\} \cdot P\{\eta_2 < \alpha_2(x)\}\} + \ldots$
$\ldots + P\{\{\eta_1 = \alpha_1(x)\} \cdot P\{\eta_2 = \alpha_2(x)\} \cdot \ldots \cdot P\{\eta_k = \alpha_k(x)\} \cdot P\{\{\eta_{k+1} < \alpha_{k+1(x)}\}\} + \ldots =$

$$= \beta_{\alpha_1(x)} + p_{\alpha_1(x)}\beta_{\alpha_2(x)} + \ldots + \prod_{j=1}^{k-1} p_{\alpha_j(x)}\beta_{\alpha_k(x)} + \ldots = \beta_{\alpha_1(x)} + \sum_{k=2}^{\infty}\left(\beta_{\alpha_k(x)}\prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j(x)}\right),$$

що і треба було довести.

□

4. Інверсор цифр Q_2- зображення дробової частини дійсного числа

Означення **1.** Функцію

$$y = I(x) = \triangle^{Q_2}_{[1-\alpha_1][1-\alpha_2]\ldots[1-\alpha_n]\ldots}$$

називатимемо *інверсором* символів Q_2-зображення дійсного числа $x \in [0,1]$, де $x = \triangle^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$.

Лема 1. *Для довільного* $x \in [0,1]$ *має місце рівність:*

$$I(\triangle^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n 1(0)}) = I(\triangle^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n 0(1)})$$

Доведення. Покажемо, що ліва і права частина даної рівності мають однаковий вигляд.

Перетворимо ліву частину:

$$I(\triangle^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n 0(1)}) = \triangle^{Q_2}_{[1-\alpha_1][1-\alpha_2]\ldots[1-\alpha_n]0(1)} = \beta_{[1-\alpha_1]} + \beta_{[1-\alpha_2]}q_{[1-\alpha_1]} + \cdots + \beta_{[1-\alpha_n]}\prod_{j=1}^{n-1} q_{[1-a_j]} + 0\cdot\prod_{j=1}^{n} q_{[1-a_j]} + q_0^2\cdot\prod_{j=1}^{n} q_{[1-a_j]} + q_0^2 q_1\cdot\prod_{j=1}^{n} q_{[1-a_j]} + \ldots = \beta_{[1-\alpha_1]} + \beta_{[1-\alpha_2]}q_{[1-\alpha_1]} + \cdots + \beta_{[1-\alpha_n]}\prod_{j=1}^{n-1} q_{[1-a_j]} + \frac{q_0^2\prod_{j=1}^{n} q_{[1-a_j]}}{1-q_1} = \beta_{[1-\alpha_1]} + \beta_{[1-\alpha_2]}q_{[1-\alpha_1]} + \cdots + \beta_{[1-\alpha_n]}\prod_{j=1}^{n-1} q_{[1-a_j]} + \frac{q_0^2\prod_{j=1}^{n} q_{[1-a_j]}}{q_0} = \beta_{[1-\alpha_1]} + \beta_{[1-\alpha_2]}q_{[1-\alpha_1]} + \cdots + \beta_{[1-\alpha_n]}\prod_{j=1}^{n-1} q_{[1-a_j]} + q_0\prod_{j=1}^{n} q_{[1-a_j]}.$$

Розглянемо праву частину рівності:

$$I(\triangle^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n 1(0)}) = \triangle^{Q_2}_{[1-\alpha_1][1-\alpha_2]\ldots[1-\alpha_n]0(1)} = \beta_{[1-\alpha_1]} + \beta_{[1-\alpha_2]}q_{[1-\alpha_1]} + \cdots + \beta_{[1-\alpha_n]}\prod_{j=1}^{n-1} q_{[1-a_j]} + q_0\prod_{j=1}^{n} q_{[1-a_j]} + 0 = \beta_{[1-\alpha_1]} + \beta_{[1-\alpha_2]}q_{[1-\alpha_1]} + \cdots + \beta_{[1-\alpha_n]}\prod_{j=1}^{n-1} q_{[1-a_j]} + q_0\prod_{j=1}^{n} q_{[1-a_j]}.$$

Отже, права і ліва частини рівності рівні. Лему доведено. □

Лема 1 дає змогу стверджувати, що функція $y = I(x)$ є коректно визначеною для усіх Q_2-раціональних чисел з $[0,1]$, які мають по два різних зображення.

Теорема 3. *Функція* $y = I(x)$ *є неперервною, монотонно спадною та сингулярною на* $[0,1]$

Доведення. 1. Доведемо, що функція $y = I(x)$ є неперервною в кожній точці відрізка $[0, 1]$.

Нехай x_0 — довільна точка $[0, 1]$. Для доведення неперервності $I(x)$ в точці x_0 досить показати, що

$$\lim_{x \to x_0} |I(x) - I(x_0)| = 0.$$

Спочатку розглянемо випадок, коли x_0 — Q_2 -ірраціональна точка. Для довільного $x \in [0, 1]$ існує $m = m(x)$ таке, що

$$\begin{cases} \alpha_i(x) = \alpha_i(x_0), 1 \leq i \leq m-1, \\ \alpha_m(x) \neq \alpha_m(x_0), \end{cases}$$

причому умова $x \to x_0$ рівносильна умові $m \to \infty$. Тоді

$|I(x) - I(x_0)| = |\triangle^{Q_2}_{[1-\alpha_1(x)][1-\alpha_2(x)]\dots[1-\alpha_n(x)]\dots} - \triangle^{Q_2}_{[1-\alpha_1(x_0)][1-\alpha_2(x_0)]\dots[1-\alpha_n(x_0)]\dots}| \leq |(\beta_{[1-\alpha_m(x)]} - \beta_{[1-\alpha_m(x_0)]}) \prod\limits_{j=1}^{m-1} q_{[1-a_j]}| \to 0 (m \to \infty)$.

Отже, $I(x)$ — неперервна в точці x_0.

Нехай тепер x_0 — Q_2-раціональне число. Доведемо, що $I(x)$ — неперервна зліва і неперервна справа в точці x_0.

Для доведення неперервності зліва досить використати Q_2 -представлення x_0, що містить період (1), а неперервності справа — Q_2-представлення x_0, що містить період (0), і повторити попередні міркування, які проводились для Q_2-ірраціональної точки.

Таким чином, ми показали, що функція $y = I(x)$ є неперервною в кожній точці відрізка $[0, 1]$.

2. Покажемо, що функція $y = I(x)$ є монотонно спадною на $[0, 1]$.

Нехай $x_1 = \triangle^{Q_2}_{\alpha_1^{(1)}\alpha_2^{(1)}\dots\alpha_n^{(1)}\dots}$, $x_2 = \triangle^{Q_2}_{\alpha_1^{(2)}\alpha_2^{(2)}\dots\alpha_n^{(2)}\dots}$, $x_1 < x_2$.

Це означає, що $\exists k \in \mathbf{N}$ таке, що:

$\alpha_1^{(1)} = \alpha_1^{(2)} = \alpha_1, \alpha_2^{(1)} = \alpha_2^{(2)} = \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}^{(1)} = \alpha_{k-1}^{(2)} = \alpha_{k-1}$, але $\alpha_k^{(1)} < \alpha_k^{(2)}$.

Тоді $1 - \alpha_k^{(1)} > 1 - \alpha_k^{(2)}$.

$I(x_1) - I(x_2) = \triangle^{Q_2}_{[1-\alpha_1^{(1)}][1-\alpha_2^{(1)}]\dots[1-\alpha_n^{(1)}]\dots} - \triangle^{Q_2}_{[1-\alpha_1^{(2)}][1-\alpha_2^{(2)}]\dots[1-\alpha_n^{(2)}]\dots} = \triangle^{Q_2}_{[1-\alpha_1][1-\alpha_2]\dots[1-\alpha_{k-1}][1-\alpha_k^{(1)}]\dots} - \triangle^{Q_2}_{[1-\alpha_1][1-\alpha_2]\dots[1-\alpha_{k-1}][1-\alpha_k^{(2)}]\dots} = \beta_{[1-\alpha_1]} + \beta_{[1-\alpha_2]} q_{[1-\alpha_1]} + \dots + \beta_{[1-\alpha_{k-1}]} \prod\limits_{j=1}^{k-2} q_{[1-a_j]} + \beta_{[1-\alpha_k^{(1)}]} \prod\limits_{j=1}^{k-1} q_{[1-a_j]} + \dots - (\beta_{[1-\alpha_1]} + \beta_{[1-\alpha_2]} q_{[1-\alpha_1]} + \dots + \beta_{[1-\alpha_{k-1}]} \prod\limits_{j=1}^{k-2} q_{[1-a_j]} + \beta_{[1-\alpha_k^{(2)}]} \prod\limits_{j=1}^{k-1} q_{[1-a_j]} + \dots) = (\beta_{[1-\alpha_k^{(1)}]} - \beta_{[1-\alpha_k^{(2)}]}) \prod\limits_{j=1}^{k-1} q_{[1-a_j]} + \beta_{[1-\alpha_{k+1}^{(1)}]} q_{[1-\alpha_k^{(1)}]} \prod\limits_{j=1}^{k-1} q_{[1-a_j]} - \beta_{[1-\alpha_{k+1}^{(2)}]} q_{[1-\alpha_k^{(2)}]} \prod\limits_{j=1}^{k-1} q_{[1-a_j]} + \dots \geq q_0 \prod\limits_{j=1}^{k-1} q_{[1-a_j]} - \left(q_0^2 \prod\limits_{j=1}^{k-1} q_{[1-a_j]} + q_0^2 q_1 \prod\limits_{j=1}^{k-1} q_{[1-a_j]} + \dots \right) = q_0 \prod\limits_{j=1}^{k-1} q_{[1-a_j]} - \dfrac{q_0^2}{1 - q_1} \prod\limits_{j=1}^{k-1} q_{[1-a_j]} = 0.$

Отже, якщо $x_1 < x_2$, то $I(x_1) > I(x_2)$, тобто функція $y = I(x)$ є монотонно спадною, що і треба було довести.

3. Доведемо сингулярність функції $y = I(x)$.

Розглянемо множину нормальних чисел у Q_2-зображенні. Для них частоти відповідних цифр набувають наступних значень:

$$\nu_0(x) = q_0, \nu_1(x) = q_1.$$

Обчислимо похідну функції $y = I(x)$.

$$I'(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{I(\triangle^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots})}{\mid \triangle^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots} \mid} = \lim_{n\to\infty} \frac{\prod\limits_{j=1}^{n} q_{[1-a_j]}}{\prod\limits_{j=1}^{n} q_{a_j}} = \lim_{n\to\infty} \frac{q_0^{N_1(x)} q_1^{N_0(x)}}{q_0^{N_0(x)} q_1^{N_1(x)}} == \lim_{n\to\infty} \left(\frac{q_0}{q_1}\right)^{N_1-N_0} =$$
$$\lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{q_0}{q_1}\right)^{\frac{N_1-N_0}{n}}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{q_0}{q_1}\right)^{\nu_1-\nu_0}\right)^n == \lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{q_0}{q_1}\right)^{q_1-q_0}\right)^n.$$

Оцінимо значення виразу $\left(\frac{q_0}{q_1}\right)^{q_1-q_0}$.

Можливі випадки:

1. $q_0 < q_1$, тоді $\frac{q_0}{q_1} < 1$, $q_1 - q_0 > 0$, значить, $\left(\frac{q_0}{q_1}\right)^{q_1-q_0} < 1$.

2. $q_0 > q_1$, тоді $\frac{q_0}{q_1} > 1$, $q_1 - q_0 < 0$, значить, $\left(\frac{q_0}{q_1}\right)^{q_1-q_0} < 1$.

Отже, $I'(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\left(\frac{q_0}{q_1}\right)^{q_1-q_0}\right)^n = 0$.

Тому похідна функції $y = I(x)$ на $[0, 1]$ дорівнює нулю майже скрізь у розумінні міри Лебега, тому дана функція є сингулярною, що і треба було довести. □

Теорема 4. *Функція* $y = I(x)$ *не має похідної в жодній з* Q_2*-раціональних точок відрізка* $[0, 1]$.

Доведення. Нехай x_0– довільна Q_2-раціональна точка відрізка $[0, 1]$.

$$x_0 = \triangle^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k 1(0)}.$$

Розглянемо послідовність (x_m) таку, що

$$x_m = \triangle^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k 1\underbrace{0\ldots0}_{m}1\ldots}.$$

Очевидно, що $x_m \to x_0$, коли $m \to \infty$.

Знайдемо відповідні значення функції:

$I(x_0) = \triangle^{Q_2}_{[1-\alpha_1][1-\alpha_2]\ldots[1-\alpha_k]0(1)}$, $I(x_m) = \triangle^{Q_2}_{[1-\alpha_1][1-\alpha_2]\ldots[1-\alpha_k]0\underbrace{1\ldots1}_{m}0\ldots}$

Обчислимо похідну даної функції зліва:

$$I'_{-}(x_0) = \lim_{m\to\infty} \frac{|I(x_m) - I(x_0)|}{|x_m - x_0|} = \lim_{m\to\infty} \frac{q_0^2 q_1^m \prod\limits_{j=1}^{k} q_{[1-a_j]}}{q_0^{m+1} q_1 \prod\limits_{j=1}^{k} q_{[1-a_j]}} =$$

$$\lim_{m\to\infty} \frac{q_1^{m-1}\cdot q_0^{N_0}\cdot q_1^{N_1}}{q_0^{m-1}\cdot q_0^{N_1}\cdot q_1} = \lim_{m\to\infty} \frac{q_1^{m-1+k-N_0} q_0^{N_0}}{q_0^{m-1+k-N_0} q_1^{N_0}} = \lim_{m\to\infty} \left(\frac{q_1}{q_0}\right)^{m-1+k-2N_0}.$$

Оскільки кожне Q_2-раціональне число має два різних зображення, то можна обчислити значення похідної в точці x_0 для зображення, що містить (1):

$$x_0 = \triangle^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k 0(1)}.$$

Для цього зображення розглянемо наступну послідовність:

$$x_m = \triangle^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k 0\underbrace{1\ldots1}_{m}0\ldots}.$$

Очевидно, що $x_m \to x_0$, коли $m \to \infty$.

$I(x_0) = \triangle^{Q_2}_{[1-\alpha_1][1-\alpha_2]\ldots[1-\alpha_k]1(0)}$,

$I(x_m) = \triangle^{Q_2}_{[1-\alpha_1][1-\alpha_2]\ldots[1-\alpha_k]1\underbrace{0\ldots0}_{m}1\ldots}$

Обчислимо похідну даної функції справа:

$$I'_{+}(x_0) = \lim_{m\to\infty} \frac{|I(x_m) - I(x_0)|}{|x_m - x_0|} = \lim_{m\to\infty} \frac{q_0^{m+1} q_1 \prod\limits_{j=1}^{k} q_{[1-a_j]}}{q_0^2 q_1^m \prod\limits_{j=1}^{k} q_{[1-a_j]}} = \lim_{m\to\infty} \frac{q_0^{m-1}\cdot q_1^{N_0}\cdot q_0^{N_1}}{q_1^{m-1}\cdot q_0^{N_0}\cdot q_1^{N_1}}$$

$$= \lim_{m\to\infty} \frac{q_0^{m-1+k-N_0} q_1^{N_0}}{q_1^{m-1+k-N_0} q_0^{N_0}} = \lim_{m\to\infty} \left(\frac{q_0}{q_1}\right)^{m-1+k-2N_0}.$$

Можливі два випадки:

1. $q_0 < q_1$, тоді:

$$I'_{-}(x_0) = \lim_{m\to\infty} \left(\frac{q_1}{q_0}\right)^{m-1+k-2N_0} = \infty,$$

$$I'_{+}(x_0) = \lim_{m\to\infty} \left(\frac{q_0}{q_1}\right)^{m-1+k-2N_0} = 0.$$

2. $q_0 > q_1$, тоді:

$$I'_{-}(x_0) = \lim_{m\to\infty} \left(\frac{q_1}{q_0}\right)^{m-1+k-2N_0} = 0,$$

$$I'_{+}(x_0) = \lim_{m\to\infty} \left(\frac{q_0}{q_1}\right)^{m-1+k-2N_0} = \infty.$$

Отже, в обох випадках похідна в жодній з Q_2-раціональних точок відрізка $[0, 1]$. не існує, що і треба було довести. $\square$

5. Зв'язок між Q_2-зображенням та інверсором його цифр

Означення **2.** Два представлення дійсних чисел Q_2 і Q'_2 називатимемо *спряженими*, якщо $q'_0 = q_1 = 1 - q_0$.

Теорема 5. *Для довільного* $x \in [0, 1]$ *має місце рівність:*

$$\triangle^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots} + \triangle^{Q'_2}_{[1-\alpha_1][1-\alpha_2]\ldots[1-\alpha_n]\ldots} = 1.$$

Доведення. Нехай $x = \triangle^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$. Тоді $1 - x \equiv x' \in (0, 1)$,

$x + x' = 1$.

Введемо перепозначення циліндрів:

$$\triangle^{Q_2}_{c_1c_2\ldots c_m} = \triangle^{Q'_2}_{c'_1c'_2\ldots c'_m},$$

де $c'_i = 1 - c_i$.

Оскільки x належить системі циліндрів $\triangle^{Q_2}_{\alpha_1}, \triangle^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2}, \ldots, \triangle^{Q_2}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}, \ldots$, то x' належить системі циліндрів $\triangle^{Q'_2}_{\alpha'_1}, \triangle^{Q'_2}_{\alpha'_1\alpha'_2}, \ldots, \triangle^{Q'_2}_{\alpha'_1\alpha'_2\ldots\alpha'_m}, \ldots$.

Отже,

$$x' = \bigcap_{n=1}^{\infty} \triangle^{Q'_2}_{[1-\alpha_1][1-\alpha_2]\ldots[1-\alpha_n],\ldots},$$

а це означає, що $x' = \triangle^{Q'_2}_{[1-\alpha_1][1-\alpha_2]\ldots[1-\alpha_n]\ldots}$, що і треба було довести. □

Література

[1] *Albeverio S., Pratsiovytyi M., Torbin G.* Singular probability distributions and fractal properties of sets of real numbers defined by the asymptotic frequencies of their s-adic digits // Ukrainian Math. J. — 2005. — 57, № 9. — P. 1361–1370.

[2] *Besicovitch A.S.* Sets of fractional dimension. 2: On the sum of digits of real numbers represented in the dyadic system // Math. Ann. — 1934. — 110, № 3. — p. 321-330.

[3] *Marsalia G.* Random variables with independ binary digits // Ann. Math. Statist. — 1971. — 42. №2. — P. 1922-1929.

[4] Працевитый Н.В. Геометрические вероятности на фрактальных совершенных абсолютно самоподобных множествах пространства R^1 // Применение аналитических методов в вероятносных задачах. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1986. – С. 100-109.

[5] Працевитый Н.В. Случайные величины с независимыми Q_2-символами//Асимптотические методы в исследовании стохастических моделей. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1987. – С. 92-102.

[6] Працевитый Н.В. Сингулярные распределения с фрактальными носителями канторовского и салемовского типов: Автореф. дис. на соиск. ученой степени канд. физ.-мат. наук 01.01.05 – Киев, 1987. – 15 с.

[7] Працевитый Н.В. Распределения случайных величин с независимыми Q-символами // Асимптотические и прикладные задачи случайных эволюций. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1990. – С. 92-101.

[8] Працьовитий М.В. Фрактальні властивості розподілів випадкових величин, Q-знаки яких утворюють однорідний ланцюг Маркова // Асимптотичний аналіз випадкових еволюцій. – Київ: Ін-т математики АН України, 1994. – С. 245-254.

[9] Працевитый Н.В., Торбин Г.М. Случайные величины с независимыми Q^*-знаками // Случайные эволюции: теоретические и прикладные задачи. – Киев: Ин-т математики АН Украины, 1992 г. – С.95-104.

[10] Працьовитий М.В. Канторовість і фрактальні властивості розподілів випадкових величин, Q-знаки яких утворюють однорідний ланцюг Маркова // Теорія ймовірностей та мат. статистика. – 1998. – № 58. – С. 139-148.

[11] Працьовитий О.М. Про один специфічний спосіб кодування дійсних чисел та його застосування // Студентські фізико-математичні етюди, 2008, №7. – С.57-67.

[12] Працьовитий М.В. Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. – К., Вид-во НПУ імені М.П.Драгоманова. – 1998. – 296с.

[13] Турбин А.Ф., Працевитый Н.В. Фрактальные множества, функции, распределения. – Киев Наук. Думка, 1992 – 208 с.

[14] Лисенко І.М., Працьовитий М.В. Модифікація класичного двійкового зображення // Єдність навчання і наукових досліджень – головний принцип університету: Збірник наукових праць звітно-наукової конференції викладачів університету за 2011 рік, 9-10 лютого 2012 року. Частина 2./ Укл. Г.І.Волинка, О.В.Уваркіна, О.П.Симоненко, О.П.Ємельянова. – К.: Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова, 2012. – С.10-13.