

УДК 511.72 + 517.51

Інверсор цифр Q_3 -зображення дробової частини дійсного числа як розв'язок системи трьох функціональних рівнянь

М. В. Працьовитий, І. В. Замрій

(Національний педагогічний університет імені М.П.Драгоманова)

АНОТАЦІЯ. Основним об'єктом дослідження є одна монотонно спадна, залежна від двох параметрів q_0 і q_1 ($0 < q_i < 1$, $q_0 + q_1 < 1$), неперервна на відрізку $[0, 1]$ функція (названа інверсором цифр Q_3 – зображення дробової частини дійсного числа), яка означається в термінах Q_3 – зображення дійсних чисел і належить до континуальної двопараметричної сім'ї неперервних монотонних або ніде не монотонних функцій. Її значення отримується з зображення аргумента заміною цифр: 0 на 2 та 2 на 0.

Вказано систему трьох функціональних рівнянь, єдиним розв'язком якої в класі визначених та обмежених на $[0, 1]$ функцій є інверсор цифр Q_3 – зображення дробової частини дійсного числа.

Ключові слова: Q_3 -зображення числа, інверсор цифр, сингулярна функція, міра Лебега, система функціональних рівнянь, дробова частина дійсного числа.

АБСТРАКТ. The main object of study is a monotonically decreasing, depending on two parameters q_0 and q_1 ($0 < q_i < 1$, $q_0 + q_1 < 1$), continuous on $[0, 1]$ function. It is called inversor of digits of Q_3 -representation of fractional part of a real number and defined in terms of Q_3 -representation of real numbers. This function belongs to the two-parameter continuum family of continuous monotonic or nowhere monotonic functions. Its value is obtained from representation of argument by change of digits: 0 to 2 and 2 to 0.

We specify system of three functional equations such that this inversor is a unique solution of this system in the class of functions defined and bounded on $[0, 1]$.

Keywords: Q_3 -representation of number, inversor of digits, singular function, Lebesgue measure, system in the class of functions defined, fractional part of a real number.

ВСТУП

Сингулярні функції (неперервні функції, відмінні від константи, похідна яких майже скрізь у розумінні міри Лебега дорівнює нулю) тривалий час вважались екзотичними і їм приділялось недостатня увага дослідників. Хоча сингулярна компонента є однією з трьох «рівноправних» складових у лінійній комбінації розкладу Лебега довільної функції обмеженої варіації $f = \alpha_1 f_d + \alpha_2 f_{ac} + \alpha_3 f_s$ ($\alpha_i \geq 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$), де f_d – дискретна, f_{ac} – абсолютно неперервна та f_s – сингулярна функції.

Інтерес до сингулярних функцій виник у теорії ймовірностей, де вони виступали в якості функцій розподілу випадкових величин зі складною локальною структурою, тобто в класі монотонних функцій. Окремий інтерес викликали сингулярні строго зростаючі функції (про які йдеться у роботах [10, 11, 9]), а не лише функції канторівського типу. Крім того, інтерес до таких функцій значно зріс після доведення у 1981 році теореми Замфіреску [12], яка стверджує, що сингулярні функції в метричному просторі всіх неперервних монотонних функцій з супремум-метрикою утворюють множину другої категорії Бера (не є множиною, яка є об'єднанням не більш ніж зліченної кількості ніде не щільних множин). Ще одним, але дуже важливим рушієм інтересу стало доведення того, що сингулярні функції розподілу випадкових величин є домінуючими у класах випадкових величин, символи яких у тому чи іншому зображенні є незалежними [1].

В останні роки з'являється все більше публікацій, пов'язаних з сингулярними функціями [1, 3, 5, 8]. Але існують деякі труднощі розвитку загальної та індивідуальної теорії сингулярних функцій, вони насамперед пов'язані з відсутністю ефективного апарату для їх задання та дослідження. Останнім часом для цього використовують різні системи зображення дійсних чисел і теорію рядів. Також для їх задання та вивчення все частіше використовують теорію функціональних рівнянь.

Дана робота присвячена одній сингулярній монотонно спадній функції, залежній від двох параметрів q_0 і q_1 ($0 < q_i < 1$, $q_0 + q_1 < 1$), зокрема як розв'язку системи трьох функціональних рівнянь. Для якої ми вказуємо більш широкий континуальний двопараметричний клас (залежний від тих же параметрів) функцій, кожна з яких є або ніде не монотонною, або монотонною і сингулярною (за виключенням кількох вироджених випадків).

Нагадаємо [1] деякі відомі поняття і факти з теорії Q_3 – зображення дійсних чисел з $[0, 1]$, які будуть далі використовуватись. Нехай $Q_3 = \{q_0, q_1, q_2\}$ – впорядкована множина чисел, де $q_k > 0$, $q_0 + q_1 + q_2 = 1$. Відомо [1], що для довільного числа

$x \in [0, 1]$ існує послідовність (α_n) , $\alpha_n \in A_3 = \{0, 1, 2\}$ така, що

$$x = \beta_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left[\beta_{\alpha_k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j} \right] \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q_3}, \quad (1)$$

де $\beta_0 = 0$, $\beta_k = \sum_{j=0}^{k-1} q_j = \beta_{k-1} + q_{k-1}$, тобто $\beta_1 = q_0$, $\beta_2 = q_0 + q_1$, $\beta_3 = q_0 + q_1 + q_2 = 1$.

Розклад числа x у ряд (1) називається його Q_3 – *представленням*, а скорочений (символічний) запис $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q_3}$ називають Q_3 – *зображенням*, при цьому α_n називається n -тим Q_3 – символом цього зображення. Якщо Q_3 – зображення є періодичним, то його період записується у круглих дужках.

Взагалі кажучи, поняття n -ого Q_3 – символа числа x є некоректно визначеним, оскільки деякі числа мають по два Q_3 – зображення, це числа виду

$$\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_{n-1} \alpha_n(0)}^{Q_3} = \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_{n-1} [\alpha_n - 1](2)}^{Q_3}.$$

Такі числа називаються Q_3 – *раціональними*, а решта, тобто ті, що не містять періода (0) чи (2), мають єдине Q_3 – зображення і називаються Q_3 – *ірраціональними*. Для подальших міркувань важливим є поняття циліндра, тому нагадаємо його.

Нехай (c_1, c_2, \dots, c_m) – фіксований впорядкований набір символів з алфавіту A_3 . Циліндром рангу m з основою $c_1 c_2 \dots c_m$ називається множина $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{Q_3}$ всіх чисел $x \in [0, 1]$, які мають наступне Q_3 – зображення $x = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m \alpha_{m+1} \dots \alpha_{m+k} \dots}^{Q_3}$, $\alpha_{m+i} \in A_3$.

Циліндр $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{Q_3}$ є відрізком з кінцями $a = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m(0)}^{Q_3}$ і $b = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m(2)}^{Q_3}$. Крім цього циліндри мають наступні властивості:

- 1) $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{Q_3} = \bigcup_{i=0}^2 \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m i}^{Q_3}$;
- 2) $\max \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m i}^{Q_3} = \min \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m (i+1)}^{Q_3}$;
- 3) $|\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{Q_3}| = \prod_{i=1}^m q_{c_i} \rightarrow 0$ ($m \rightarrow \infty$);
- 4) $\bigcap_{m=1}^{\infty} \Delta_{c_1 \dots c_m}^{Q_3} = x \equiv \Delta_{c_1 \dots c_m \dots}^{Q_3}$ для довільної послідовності (c_m) , $c_m \in A_3$.

Якщо всі $q_i = \frac{1}{3}$, то Q_3 – зображення є класичним трійковим зображенням.

1. УМОВИ ІСНУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКУ СИСТЕМИ ТРЬОХ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Нехай задано чотири набори дійсних чисел q_i, β_i, b_i та d_i , де $i = 0, 1, 2$, причому

$$\begin{cases} q_i > 0, \\ q_0 + q_1 + q_2 = 1, \\ \beta_0 = 0, \beta_k = \sum_{i=0}^{k-1} q_i, \\ |d_i| < 1, \\ 0 \leq b_i < 1. \end{cases}$$

Для $x \in [0, 1]$ розглядається система трьох функціональних рівнянь

$$f(\beta_i + q_i x) = b_{[2-i]} + d_{[2-i]} f(x), \quad i = 0, 1, 2. \quad (2)$$

Спочатку зауважимо, що коли $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{Q_3} - Q_3$ - зображення числа u , $c_n = c_n(u)$, то $\beta_i + q_i u = \Delta_{i c_1 c_2 \dots c_n}^{Q_3}$. Тому систему (2) можна записати у формі

$$f(\Delta_{i \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{Q_3}) = b_{[2-i]} + d_{[2-i]} f(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{Q_3}), \quad i = 0, 1, 2, \quad (3)$$

або $f(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{Q_3}) = b_{[2-\alpha_1]} + d_{[2-\alpha_1]} f(\Delta_{\alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n}^{Q_3}) \quad \forall (\alpha_n) \in L \equiv A_3 \times A_3 \times \dots \times A_3 \times \dots$, які рівносильні початковій системі лише при додаткових умовах, що стосуються різних зображень Q_3 - раціональних чисел, а саме: якщо $x = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{Q_3}(0) = \Delta_{c_1 c_2 \dots [c_n-1](2)}^{Q_3}$, то рівності (3) мають місце як для першого, так і для другого Q_3 - зображення.

Зупинемося на кількох часткових випадках.

Випадок 1. Нехай $d_0 = d_1 = d_2 = 0$, тоді система (2) набуде вигляду

$$f(\beta_i + q_i x) = b_{[2-i]}, \quad i = 0, 1, 2.$$

Очевидно, що остання система має розв'язки в класі обмежених і визначених на $[0, 1]$ функцій, якщо функція f є коректно визначеною в Q_3 - раціональних точках, зокрема $f(\beta_0 + q_0 \Delta_{(2)}^{Q_3}) = f(\beta_1 + q_1 \Delta_{(0)}^{Q_3})$ і $f(\beta_1 + q_1 \Delta_{(2)}^{Q_3}) = f(\beta_2 + q_2 \Delta_{(0)}^{Q_3})$. А це можливо тоді і тільки тоді, коли $b_0 = b_1 = b_2$.

В цьому випадку розв'язком системи є функція $f(x) = \text{const} = b_0$.

Випадок 2. Нехай $d_i = d_j = 0$ і $d_k \neq 0$, де $\{i, j, k\} = \{0, 1, 2\}$, тоді система (2) набуде вигляду

$$\begin{cases} f(\beta_k + q_k x) = b_{[2-k]} + d_{[2-k]} f(x), \\ f(\beta_m + q_m x) = b_{[2-m]}, \quad \text{де } m \in \{i, j\}. \end{cases}$$

Розглянемо випадок, коли $d_0 = d_1 = 0$ і $d_2 \neq 0$. Міркуючи аналогічно до пункту 1, маємо $f(\beta_0 + q_0 \Delta_{(2)}^{Q_3}) = f(\beta_1 + q_1 \Delta_{(0)}^{Q_3})$ і $f(\beta_1 + q_1 \Delta_{(2)}^{Q_3}) = f(\beta_2 + q_2 \Delta_{(0)}^{Q_3})$, а це можливо

тоді і тільки тоді, коли

$$\begin{cases} b_2 + d_2 b_0 = b_1, \\ b_1 = b_0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_2 = b_0(1 - d_2), \\ b_1 = b_0. \end{cases}$$

Для двох інших випадків, при $d_0 = d_2 = 0$ і $d_1 \neq 0$ або $d_1 = d_2 = 0$ і $d_0 \neq 0$ відповідно мають місце

$$\begin{cases} b_1 = b_0(1 - d_1), \\ b_2 = b_0; \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} b_0 = b_2(1 - d_0), \\ b_1 = b_2. \end{cases}$$

У цьому випадку система (3) є коректно визначеною тоді і тільки тоді, коли

$$\begin{cases} b_k = b_j(1 - d_k), \\ b_i = b_j. \end{cases}$$

Випадок 3. Нехай $d_i = 0$ та $d_j \neq 0 \neq d_k$, де $\{i, j, k\} = \{0, 1, 2\}$. Тоді система (2) запишеться у вигляді

$$\begin{cases} f(\beta_m + q_m x) = b_{[2-m]} + d_{[2-m]} f(x), \quad \text{де } m \in \{i, j\}, \\ f(\beta_k + q_k x) = b_{[2-k]}. \end{cases}$$

Детально розглянемо лише випадок, коли $d_0 = 0$ і $d_1 \neq 0 \neq d_2$. Використовуючи аналогічні міркування до попередніх випадків (прирівнюємо значення функції для двох різних Q_3 – зображень в Q_3 – раціональних точках) та рівності системи (2) n разів, отримуємо наступну систему

$$\begin{cases} b_2 + d_2 b_0 = b_1 + d_1 \left(b_2 + d_2 b_2 + d_2^2 b_2 + \dots + d_2^{n-1} b_2 + d_2^{n-1} f \left(\Delta_{(2)}^{Q_3} \right) \right), \\ b_1 + d_1 b_0 = b_0. \end{cases}$$

Очевидно, що $d_2^{n-1} f \left(\Delta_{(2)}^{Q_3} \right) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, тоді сума виразу $b_2 + d_2 b_2 + d_2^2 b_2 + \dots + d_2^{n-1} b_2 + d_2^{n-1} f \left(\Delta_{(2)}^{Q_3} \right)$ прямує до $\frac{b_2}{1 - d_2}$, отже,

$$\begin{cases} b_2 + d_2 b_0 = b_1 + d_1 \frac{b_2}{1 - d_2}, \\ b_1 = b_0(1 - d_1), \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_2 = b_0(1 - d_2), \\ b_1 = b_0(1 - d_1); \\ d_1 + d_2 = 1. \end{cases}$$

Для двох інших випадків при $d_1 = 0$ або $d_2 = 0$, отримаємо відповідно

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} b_1 = b_0 \frac{1}{1-d_0}, \\ b_2 = b_0 \frac{1-d_2}{1-d_0}; \\ d_0 + d_2 = 1. \end{array} \right. \quad \text{або} \quad \left\{ \begin{array}{l} b_1 = b_0 \frac{1-d_1}{1-d_0}, \\ b_2 = b_0 \frac{1}{1-d_0}; \\ d_0 + d_1 = 1. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Система (2) у випадку 3 є коректно визначеною тоді і тільки тоді, коли

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} b_1 = b_0 \frac{1-d_1}{1-d_0}, \\ b_2 = b_0 \frac{1-d_2}{1-d_0}; \\ d_0 + d_1 + d_2 = 1. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Тепер проведемо загальні міркування.

Лема 1. Для того, щоб система (2) мала розв'язки в класі визначених і обмежених на $[0, 1]$ функцій, необхідно і достатньо, щоб

$$\begin{cases} b_1 - b_2 + \frac{b_2 d_1}{1-d_2} - \frac{b_0 d_2}{1-d_0} = 0, \\ b_0 - b_1 + \frac{b_2 d_0}{1-d_2} - \frac{b_0 d_1}{1-d_0} = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Доведення. При умові (припущенні) існування розв'язку системи (2) знайдемо його форму.

Застосувавши рівності системи (2) n разів, отримаємо

$$f(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q_3}) = b_{[2-\alpha_1]} + \sum_{k=2}^n \left[b_{[2-\alpha_k]} \prod_{j=1}^{n-1} d_{[2-\alpha_j]} \right] + \left(\prod_{j=1}^n d_{[2-\alpha_j]} \right) f(\Delta_{\alpha_{n+1} \alpha_{n+2} \dots \alpha_{n+k} \dots}^{Q_3}).$$

Оскільки функція визначена в кожній точці відрізка $[0, 1]$, то цей процес можна продовжувати до нескінченності і він є збіжним, оскільки залишковий член $\left(\prod_{j=1}^n d_{[2-\alpha_j]} \right) f(\Delta_{\alpha_{n+1} \alpha_{n+2} \dots \alpha_{n+k} \dots}^{Q_3})$ прямує до нуля, завдяки тому, що f — обмежена, а $\left(\prod_{j=1}^n d_{[2-\alpha_j]} \right) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). Отже, розв'язок системи (2), у випадку його існування, має вигляд

$$f(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q_3}) = b_{[2-\alpha_1]} + \sum_{k=2}^{\infty} \left[b_{[2-\alpha_k]} \prod_{j=1}^{k-1} d_{[2-\alpha_j]} \right]. \quad (5)$$

Чи визначає рівність (5) функцію?

Якщо число $x \in Q_3$ — ірраціональним числом, а отже, має єдине Q_3 — зображення, то очевидно, що так. Залишається перевірити чи рівні значення виразу (5) для двох різних зображень Q_3 — раціональної точки: $x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1} \alpha_n(0)}^{Q_3} \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1} [\alpha_n-1](2)}^{Q_3}$, де $\alpha_n \neq 0$. З цією метою виразимо різницю:

$$\begin{aligned} \delta &\equiv f\left(\Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}\alpha_n(0)}^{Q_3}\right) - f\left(\Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{n-1}\alpha_n(2)}^{Q_3}\right) = \\ &= \prod_{k=1}^{n-1} d_{[2-\alpha_k]} \left(b_{[2-\alpha_n]} - b_{[3-\alpha_n]} + d_{[2-\alpha_n]} f\left(\Delta_{(0)}^{Q_3}\right) - d_{[3-\alpha_n]} f\left(\Delta_{(2)}^{Q_3}\right) \right) = \\ &= \left(\prod_{i=1}^{n-1} d_{[2-\alpha_i]} \right) \left(b_{[2-\alpha_n]} - b_{[3-\alpha_n]} + \frac{b_2 d_{[2-\alpha_n]}}{1-d_2} - \frac{b_0 d_{[3-\alpha_n]}}{1-d_0} \right). \end{aligned}$$

Для того, щоб $\delta = 0$ (значення для двох різних Q_3 -зображень кожної Q_3 – раціональної точки співпадали), необхідно і достатньо, щоб

$$\rho_{\alpha_n} \equiv \left(b_{[2-\alpha_n]} - b_{[3-\alpha_n]} + \frac{b_2 d_{[2-\alpha_n]}}{1-d_2} - \frac{b_0 d_{[3-\alpha_n]}}{1-d_0} \right) = 0,$$

як при $\alpha_n = 1$, так і при $\alpha_n = 2$, тобто, щоб мала місце система (4).

Н е о б х і д н і с т ь. Оскільки система (4) має розв'язки, то кожен з них має форму (5), а рівність (5) коректно визначає функцію, тоді і тільки тоді, коли має місце система (4).

Д о с т а т н і с т ь. З того, що має місце система (4) випливає коректність визначення функції f рівністю (5), яка задовольняє систему функціональних рівнянь (2), а отже, є її розв'язком. \square

Наслідок 1. Якщо $b_0 = 0$, $b_1 = d_0$, $b_2 = d_0 + d_1$, то $d_0 + d_1 + d_2 = 1$ і система (2) у класі обмежених і визначених на $[0, 1]$ функцій має єдиний розв'язок – функцію, визначену рівністю (5).

Лема 2. Якщо $b_0 = 0$, $b_1 = d_0$, $b_2 = d_0 + d_1$, то із системи (4) випливає, що

$$d_0 + d_1 + d_2 = 1 \quad \text{або} \quad d_0 = 0 = d_1.$$

Доведення. Якщо $b_0 = 0$, $b_1 = d_0$, $b_2 = d_0 + d_1$, то система (4) записується у вигляді

$$\begin{cases} d_0 - d_0 - d_1 + \frac{(d_0 + d_1)d_1}{1-d_2} - \frac{0 \cdot d_2}{1-d_0} = 0, \\ 0 - d_0 + \frac{(d_0 + d_1)d_0}{1-d_2} - \frac{0 \cdot d_1}{1-d_0} = 0, \end{cases}$$

тобто

$$\begin{cases} \frac{d_1(-1 + d_0 + d_1 + d_2)}{1-d_2} = 0, \\ \frac{d_0(-1 + d_0 + d_1 + d_2)}{1-d_2} = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d_0 + d_1 + d_2 = 1, \\ d_0 = 0 = d_1. \end{cases}$$

\square

2. УМОВИ НЕПЕРЕРВНОСТІ ФУНКЦІЇ ЯК РОЗВ'ЯЗКУ СИСТЕМИ ТРЬОХ
 ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Теорема 1. *Якщо для системи (2) одночасно виконуються умови:*

$$\begin{cases} d_0 + d_1 + d_2 = 1, \\ \max_i |d_i| < 1, \\ b_0 = 0, b_k = \sum_{i=0}^{k-1} d_i > 0, \end{cases} \quad (6)$$

то функція f визначена рівністю (5) є неперервною на відрізку $[0, 1]$.

Доведення. Нехай задано число x та $x_0 \in [0, 1]$, причому $\alpha_i(x) = \alpha_i(x_0)$ для всіх $i < n$ та $\alpha_n(x) \neq \alpha_n(x_0)$. Розглянемо різницю

$$f(x) - f(x_0) = \prod_{i=1}^{n-1} d_{[2-\alpha_i]} \left(f \left(\Delta_{\alpha_n(x)\alpha_{n+1}(x)\dots\alpha_{n+k}(x)\dots}^{Q_3} \right) - f \left(\Delta_{\alpha_n(x_0)\alpha_{n+1}(x_0)\dots\alpha_{n+k}(x_0)\dots}^{Q_3} \right) \right).$$

Число x_0 може бути Q_3 – раціональним або Q_3 – ірраціональним, тому необхідно розглянути два випадки.

Нехай $x_0 = Q_3$ – ірраціональне число, тоді умова $x \rightarrow x_0$ рівносильна умові $n \rightarrow \infty$ і зокрема

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \prod_{i=1}^{n-1} d_{[2-\alpha_i]} \leq (\max\{|d_0|, |d_1|, |d_2|\})^{n-1} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

тобто $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Отже, функція $f(x)$ неперервна в точці x_0 .

Якщо $x_0 = Q_3$ – раціональне число, тобто має два різних Q_3 – зображення, то неперервність доводиться аналогічними міркуваннями з використанням означення неперервності та виразу функції f . Але, коли x прямує до x_0 зліва необхідно використати зображення $\Delta_{\alpha_1(x_0)\alpha_2(x_0)\dots\alpha_n(x_0)(0)}^{Q_3}$, а коли x прямує до x_0 справа – $\Delta_{\alpha_1(x_0)\alpha_2(x_0)\dots[\alpha_n-1](x_0)(2)}^{Q_3}$. \square

Лема 3. *Для приросту $\mu_f(\Delta_{c_1c_2\dots c_n}^{Q_3}) \equiv f(\Delta_{c_1c_2\dots c_n(2)}^{Q_3}) - f(\Delta_{c_1c_2\dots c_n(0)}^{Q_3})$ функції f на циліндри $\Delta_{c_1c_2\dots c_n}^{Q_3} \equiv [\Delta_{c_1c_2\dots c_n(0)}^{Q_3}; \Delta_{c_1c_2\dots c_n(2)}^{Q_3}]$ має місце рівність*

$$\mu_f(\Delta_{c_1c_2\dots c_n}^{Q_3}) = - \prod_{j=1}^{n-1} d_{[2-c_j]}.$$

Доведення. Використовуючи, вираз (5) для значення функції f , отримуємо

$$f(\Delta_{c_1c_2\dots c_n(2)}^{Q_3}) - f(\Delta_{c_1c_2\dots c_n(0)}^{Q_3}) = \prod_{j=1}^{n-1} d_{[2-c_j]} \left(f(\Delta_{(2)}^{Q_3}) - f(\Delta_{(0)}^{Q_3}) \right) =$$

$$= \prod_{j=1}^{n-1} d_{[2-c_j]} \left(\frac{b_0}{1-d_0} - \frac{b_2}{1-d_2} \right) = - \prod_{j=1}^{n-1} d_{[2-c_j]}.$$

□

Теорема 2. Якщо для системи (2) виконуються умови (6), то функція є:

- 1) монотонною і набуває невід'ємних значень, якщо всі $d_i \geq 0$, $i = \overline{0, 2}$, зокрема строго монотонною, якщо всі $d_i > 0$;
- 2) сталою на циліндрі $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m}^{Q_3}$, якщо існує $d_{c_k} = 0$ при $k < m$;
- 3) ніде не монотонною, якщо всі $d_i \neq 0$ та існує хоча б одне $d_k < 0$, $k = \{1, 2\}$.

Доведення. Твердження 1) і 2) випливають з попередньої леми.

Твердження 3) доведемо методом від супротивного. Припустимо, що умови твердження 3) виконуються і знайдеться інтервал монотонності функції f . Але очевидно, що існує циліндр $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{Q_3}$, який повністю належить цьому інтервалу монотонності, а отже, є проміжком монотонності функції f .

Зважаючи на те, що всі $d_i \neq 0$ та існує хоча б одне $d_i < 0$, $i = \overline{0, 2}$, та попередню лему, маємо $\mu_f(\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{Q_3}) \neq 0$ і $\mu_f(\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n 0}^{Q_3}) \cdot \mu_f(\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n i}^{Q_3}) < 0$. Тобто на одному з циліндрів $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n 0}^{Q_3}$ чи $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n i}^{Q_3}$ функція має додатній приріст, а на іншому – від'ємний, що суперечить монотонності функції f на циліндрі $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_n}^{Q_3}$ і доводить останнє твердження та всю теорему. □

Наслідок 2. Якщо виконуються умови (6) і $d_i = 0$, то f є сингулярною функцією канторівського типу.

3. ІНВЕРСОР ЯК РОЗВ'ЯЗОК СИСТЕМИ ТРЬОХ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Нехай $b_i = \beta_i$ та $d_i = q_i$, $i = \overline{0, 2}$. Тоді система трьох функціональних рівнянь набуде вигляду

$$f(\beta_i + q_i x) = \beta_{[2-i]} + q_{[2-i]} f(x), \quad i = 0, 1, 2, \quad (7)$$

де $x \in [0, 1]$, яка для класичного трійкового зображення має вигляд

$$f\left(\frac{i+x}{3}\right) = \frac{2-i+f(x)}{3},$$

єдиним розв'язком останньої є функція $f(x) = 1 - x$.

Теорема 3. Єдиним розв'язком системи функціональних рівнянь (7) в класі обмежених і визначених в кожній точці $[0, 1]$ є неперервна функція, значення якої в точці x обчислюється за формулою

$$f(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^{Q_3}) = \beta_{[2-\alpha_1]} + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\beta_{[2-\alpha_k]} \prod_{j=1}^{k-1} q_{[2-\alpha_j]} \right). \quad (8)$$

Доведення. Зважаючи на те, що $b_i = \beta_i$ та $d_i = q_i$ для всіх $i = \overline{0, 2}$, функція f є коректно визначеною (оскільки виконуються умови (4) і (6)), то рівність (5) переписується у формі (8).

Беручи до уваги, що для функції f виконуються умови (6), то f — неперервна монотноспадна функція на відрізку $[0, 1]$ і набуває невід’ємних значень. \square

Зауваження 1. Система (7) задає систему ітерованих функцій, для яких атрaktorом буде деяка компактна множина в R^2 . Але висновок про те, що цією множиною буде графік неперервої функції на $[0, 1]$, взагалі кажучи, є нетривіальним.

Зауваження 2. Система (7) може бути записана наступним чином

- 1) $f(\delta_i(x)) = \beta_{[2-i]} + q_{[2-i]}f(x)$, $i = 0, 1, 2$, де $\delta_i(x) = \Delta_{i\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}^{Q_3}$;
- 2) $f(x) = \beta_{[2-\alpha_1]} + q_{[2-\alpha_1]}f(\omega(x))$, $\alpha_1 \in A_3$, де $\omega(\Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}^{Q_3}) = \Delta_{\alpha_2\alpha_3\dots\alpha_n}^{Q_3}$ — оператор зсуву цифр Q_3 — зображення числа x .

Означення 1. Інверсором цифр Q_3 — зображення числа $\Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}^{Q_3} = x \in [0, 1]$ (далі інверсором) називатимемо функцію I , визначену на $[0, 1]$ рівністю

$$I(\Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}^{Q_3}) = \Delta_{[2-\alpha_1][2-\alpha_2]\dots[2-\alpha_n]}^{Q_3} = \beta_{[2-\alpha_1]} + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\beta_{[2-\alpha_k]} \prod_{j=1}^{k-1} q_{[2-\alpha_j]} \right). \quad (9)$$

Зауваження 3. Єдиним розв’язком системи (7) в класі обмежених і визначених на $[0, 1]$ функцій є інверсор I .

4. ФУНКЦІОНАЛЬНІ СПІВВІДНОШЕННЯ

Впорядковані множини додатних дійсних чисел $Q_3 = \{q_0; q_1; q_2\}$ і $Q'_3 = \{q'_0; q'_1; q'_2\}$ називатимемо *спряженими*, якщо $q'_0 + q'_1 + q'_2 = 1$ і $q'_0 = q_2, q'_1 = q_1, q'_2 = q_0$.

Теорема 4. Для інверсора I цифр Q_3 — зображення чисел відрізка $[0, 1]$ має місце рівність

$$I(\Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}^{Q_3}) = 1 - \Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}^{Q'_3}. \quad (10)$$

Доведення. Нехай $x = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}^{Q_3}$ — довільне число з інтервалу $(0; 1)$. Тоді $1 - x = x'$.

Легко бачити, що має місце рівність: $\Delta_{c_1c_2\dots c_m}^{Q_3} \equiv \Delta_{c'_1c'_2\dots c'_m}^{Q'_3}$, де $c'_i = 2 - c_i$. Справді, оскільки x належить системі вкладених циліндрів $\Delta_{\alpha_1}^{Q_3}, \Delta_{\alpha_1\alpha_2}^{Q_3}, \dots, \Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}^{Q_3}, \dots$, то $x' = 1 - x$ належить системі вкладених циліндрів $\Delta_{\alpha'_1}^{Q'_3}, \Delta_{\alpha'_1\alpha'_2}^{Q'_3}, \dots, \Delta_{\alpha'_1\alpha'_2\dots\alpha'_n}^{Q'_3}, \dots$. Тому,

$$x' = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_{\alpha'_1\alpha'_2\dots\alpha'_n}^{Q'_3} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_{[2-\alpha_1][2-\alpha_2]\dots[2-\alpha_n]}^{Q_3}.$$

З $x + x' = 1$ випливає рівність $\Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}^{Q_3} + \Delta_{[2-\alpha_1][2-\alpha_2]\dots[2-\alpha_n]}^{Q_3} = 1$, яка рівносильна рівності $I(\Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}^{Q_3}) = 1 - \Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}^{Q'_3}$. \square

Лема 4. Для інверсора I мають місце наступні функціональні співвідношення:

$$I(\beta_i + q_i x) = \beta_{[2-i]} + q_{[2-i]} I(x), \quad i = 0, 1, 2; \quad (11)$$

$$I(x) = \beta_{[2-\alpha_1]} + q_{[2-\alpha_1]} I(\omega(x)), \quad \alpha_1 \in A_3; \quad (12)$$

$$I(\beta_i + q_i x) = \beta_{[3-i]} - q_{[2-i]} g(x), \quad i = 0, 1, 2; \quad (13)$$

$$I(x) = \beta_{[3-\alpha_1]} - q_{[2-\alpha_1]} g(\omega(x)), \quad \alpha_1 \in A_3, \quad (14)$$

де $\omega(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{Q_3}) = \Delta_{\alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n}^{Q_3}$ – оператор зсуву цифр числа x , $g(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{Q_3}) = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{Q'_3}$ і $Q'_3 = \{q'_0, q'_1, q'_2\}$ спряжена до Q_3 .

Доведення. Система (11) є очевидною.

Доведемо, що має місце система (13). Для цього використаємо рівність (10) і розглянемо спочатку функцію $g(x)$ визначену рівністю

$$g(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{Q_3}) = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{Q'_3}.$$

Очевидно, що $g(\Delta_{i \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{Q_3}) = g(\beta_i + q_i \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{Q_3})$, причому

$$g(\Delta_{i \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{Q_3}) = \Delta_{i \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{Q'_3} = \beta'_i + q'_i \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{Q'_3} = \beta'_i + q'_i g(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{Q_3}) = \beta'_i + q'_i g(x).$$

Тоді у випадку, якщо:

- 1) $i = 0$, то $\beta'_0 + q'_0 g(x) = 0 + q_2 g(x) = 1 - \beta_3 + q_2 g(x)$;
- 2) $i = 1$, то $\beta'_1 + q'_1 g(x) = q'_0 + q'_1 g(x) = q_2 + q_1 g(x) = 1 - \beta_2 + q_1 g(x)$;
- 3) $i = 2$, то $\beta'_2 + q'_2 g(x) = q'_0 + q'_1 + q'_2 g(x) = q_2 + q_1 + q_0 g(x) = 1 - \beta_1 + q_0 g(x)$.

Тому має місце

$$g(\beta_i + q_i x) = 1 - \beta_{[3-i]} + q_{[2-i]} g(x).$$

Зважаючи на останню рівність та рівність (10), маємо

$$I(\beta_i + q_i x) = 1 - g(\beta_i + q_i x) = 1 - (1 - \beta_{[3-i]} + q_{[2-i]} g(x)),$$

тобто

$$I(\beta_i + q_i x) = \beta_{[3-i]} - q_{[2-i]} g(x).$$

Якщо додатково ввести функцію, яку називають оператором зсуву цифр числа x , для якої має місце рівність

$$\omega(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^{Q_3}) = \Delta_{\alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n}^{Q_3},$$

то систему рівнянь (11) можна переписати у вигляді (12), а систему (13) можна переписати у вигляді (14). \square

ЛІТЕРАТУРА

- [1] *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів — Київ: Вид-во НПУ ім. М.П.Драгоманова, — 1998. — 296с.
- [2] *Працьовитий М. В.* Ніде не монотонні сингулярні функції // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2011. — № 12. — С. 24-36.
- [3] *Працьовитий М. В., Калашніков А. В.* Про один клас неперервних функцій зі складною локальною будовою більшість з яких є сингулярні або недиференційовані // Труды ИПММ НАН Украины. — 2011. — Том 23. — С. 180-191.
- [4] *Працьовитий М. В., Калашніков А. В.* Самоафінні сингулярні та ніде не монотонні функції, пов'язані з Q - зображенням дійсних чисел // Укр. мат. журнал — 2013. — Т 65. — №3. — С. 405-417.
- [5] *Працьовитий М. В., Косопльоткіна О. В.* Фрактальні властивості суперпозиції сингулярних функцій розподілу // Теор. ймов. та мат статистика. — 2002. — Вип.67. — С. 61-69.
- [6] *Пелюх Г. П., Шарковський А. Н.* Введение в теорию функциональных уравнений. — Киев: Наукова думка, 1974. — 119 с.
- [7] *Турбин А. Ф., Працевитий Н. В.* Фрактальные множества, функции, распределения. — Киев: Наук. думка, 1992. — 208с.
- [8] *Billingsley P.* The singular function on bold play // Am. Sci. — 1983. — 71. — P. 392-397.
- [9] *Minkowski H.* Gesammelte Abhandlungen. — Berlin, 1911. — Bd 2. — P. 50-51.
- [10] *Salem R.* On some singular monotonic function which are strictly increasing // Trans. Amer. Math. Soc. — 1943. — Vol.53, no.3. — P. 427-439.
- [11] *Sierpinski W.* Une exemple elementaire d'une fonction croissante qui a presque partout une derivee nulle // Gion. Math. Battaglini(3). — 1916. — 1. — P. 314-334.
- [12] *Zamfirescu T.* Most monotone functions are singular // Amer. Math. Mon. — 1981. — 88. — P. 47-49.