Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова.— 2013, № 15.— С. 188–194.

УДК 511.72

Циліндричне марковське зображення дійсних чисел з нескінченним алфавітом та його застосування

В. В. Луцак
(Національний педагогічний університет імені М.П.Драгоманова)

Анотація. Вивчається зображення дійсних чисел з нескінченним алфавітом і нульовою надлишковістю, основне метричне відношення для якого визначається стохастичною матрицею. Розв'язуються найпростіші задачі метричної і ймовінісної теорії дійсних чисел для цього зображення.

Ключові слова: дійсне число, зображення дійсних чисел з нескінченним алфавітом, основне метричне відношення, метрична теорія дійсних чисел, циліндри.

Abstract. We study representation of real numbers with infinite alphabet and zero redundancy. Its basic metric relation is determined by a stochastic matrix. We solve simplest problems of metric and probabilistic theory of real numbers for this representation.

Keywords: real number, representation of real number with infinite alphabet, basic metric relation, metric theory of real numbers, cylinders.

1. Вступ

Сьогодні в математиці використовуються різні зображення (кодування) дійсних чисел зі скінченним та нескінченним алфавітом, визначені односторонньою чи двостронньою числовою послідовністю (знакододотньою чи знакозмінною) тощо. Одні системи числення породжують простішу, а інші складнішу геометрію. Кожна система зображення числа має свої переваги та слабкі сторони в плані використання для задання та дослідження різних математичних об'єктів (множин, функцій, операторів, динамічних систем та ін), які мають фрактальні властивості.

В даній роботі ми досліджуємо так зване марківське зображення, яке є узагальненням s-адичного та Q-зображення, а також узагальненням зображення, запропонованого в [ОПрац,08]. Геометрія (геометричний зміст цифр, властивості циліндричних множин, метричні відношення) даного зображення є складнішою, ніж геометрія Q-зображення, і залежить від $s^2 - s$ параметрів. Природність цього зображення і вибір терміну для нього обумовлена тим, що зображення функції розподілу випадкової величини, s-кові цифри якої мають марківську залежність (утворюють однорідний ланцюг Маркова) з вектором початкових ймовірностей q_0, q_1,..., q_{s-1} і матрицею перехідних ймовірностей $||p_{ij}||$, в яких відсутні нулі, є марківським.

2. Циліндричне марковське зображення чисел

Нехай $A = Z_0 = \{0, 1, ..., s, ...\}$ — алфавіт, $q = (q_0, q_1, ..., q_{s,...})$ — фіксована послідовність додатних дійсних чисел така, що $q_0 + q_1 + ... + q_s + ... = 1$,

$$G = \|q_{ij}\| = \begin{pmatrix} q_{00} & q_{01} & \cdots & q_{0s} & \cdots \\ q_{10} & q_{11} & \cdots & q_{1s} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ q_{(s-1)0} & q_{(s-1)1} & \cdots & q_{ss} & \cdots \end{pmatrix} \text{— нескінченна стохастична матриця,}$$

тобто $q_{i0} + q_{i1} + ... + q_{is} + ... = 1$ для всіх $i \in A$, яка не містить нулів ($q_{ij} > 0$).

Розглянемо систему подрібнюючих розбиттів проміжка $[0, 1)$

$$[0, 1) = \Delta_0 \cup \Delta_1 \cup ... \cup \Delta_s \cup ...,$$

де $\Delta_0 = [0, q_0)$, $\Delta_i = [q_o + ... + q_{i-1}, q_0 + ... + q_{i-1} + q_i)$, $i = 1, ..., s, ...$

Визначимо систему проміжків n-го рангу

$$\Delta_{a_1...a_n}, \quad \text{де } \ a_n \in A, \ n = 1, 2, ...$$

наступними умовами:

(1) $\Delta_{a_1...a_n} = \Delta_{a_1...a_n 0} \cup ... \cup \Delta_{a_1...a_n s} \cup ...;$
(2) $\max \Delta_{a_1...a_n i} = \min \Delta_{a_1...a_n(i+1)}, \forall i = 1, ..., s, ...;$
(3) $\dfrac{|\Delta_{a_1...a_n ij}|}{|\Delta_{a_1...a_n i}|} = q_{ij}.$

Проміжок $\Delta_{a_1...a_n}$ називатимемо *циліндром рангу n з основою $a_1...a_n$*. Інтервал з тими ж самими кінцями, що й $\Delta_{a_1...a_n}$ позначатимемо через $\bigtriangledown_{a_1...a_n}$.

Лема 1. *Довжина циліндра $\Delta_{a_1...a_n}$ обчислюєтъся за формулою*

$$|\Delta_{a_1...a_n}| = q_{a_1} \prod_{i=1}^{n-1} q_{a_i a_{i+1}}.$$

Доведення. n-кратне застосування властивості циліндрів (3) приводить до:

$$|\Delta_{a_1...a_n|} = q_{a_{n-1}a_n} |\Delta_{a_1...a_{n-2}a_{n-1}}| = q_{a_{n-1}a_n} q_{a_{n-2}a_{n-1}} |\Delta_{a_1...a_{n-2}}| = ... =$$

$$= q_{a_{n-1}a_n} q_{a_{n-2}a_{n-1}} ... q_{a_2a_3} q_{a_1a_2} |\Delta_{a_1}| = q_{a_{n-1}a_n} q_{a_{n-2}a_{n-1}} ... q_{a_2a_3} q_{a_1a_2} q_{a_1} =$$

$$= q_{a_1} \prod_{i=1}^{n-1} q_{a_i a_{i+1}}.$$

□

Наслідок 1. *Для довільної послідовності* (a_n), $a_n \in A$, *має місце* $|\Delta_{a_1 \ldots a_n}| \to 0$ *при* $n \to \infty$.

Лема 2. *Для довільної послідовності* (a_n), *де* $a_n \in A$, *існує єдина точка* $x \in [0,1)$, *така, що належить всім циліндрам послідовності*

$$\Delta_{a_1},\ \Delta_{a_1 a_2},\ \ldots,\ \Delta_{a_1 a_2 \ldots a_n} \ldots,$$

тобто

$$x = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_{a_1 a_2 \ldots a_n} \equiv \Delta_{a_1 a_2 \ldots a_n \ldots}.$$

Доведення. Дане твердження випливає із заданих властивостей проміжків $\Delta_{a_1 \ldots a_m}$, наслідку 1 і аксіоми Кантора. □

Лема 3. *Має місце рівність*

$$x = \Delta_{a_1 \ldots a_n \ldots} = \beta_{a_1} + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{a_k a_{k+1}} \prod_{j=1}^{k-1} q_{a_j a_{j+1}}, \tag{1}$$

$$\text{де} \quad \beta_{a_1} = \sum_{i=0}^{a_1 - 1} q_i, \quad \beta_{a_k a_{k+1}} = q_{a_1} \sum_{i=0}^{a_{k+1}-1} q_{a_k i}. \tag{2}$$

Доведення. Справді,

$$x = \sum_{i=0}^{a_1-1} |\Delta_i| + \sum_{i=0}^{a_2-1} |\Delta_{a_1 i}| + \sum_{i=0}^{a_3-1} |\Delta_{a_1 a_2 i}| + \ldots =$$

$$= \sum_{i=0}^{a_1-1} q_i + \sum_{i=0}^{a_2-1} q_{a_1 i} q_{a_1} + \sum_{i=0}^{a_3-1} q_{a_2 i} q_{a_1 a_2} q_{a_1} + \ldots + \sum_{i=0}^{a_{k+1}-1} q_{a_k i} \prod_{j=1}^{k-1} q_{a_j} q_{a_{j+1}} q_{a_1} + \ldots =$$

$$= \beta_{a_1} + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_{a_k a_{k+1}} \prod_{j=1}^{k-1} q_{a_j a_{j+1}}.$$

□

Теорема 1. *Для довільного* $x \in [0;1)$ *існує послідовність* (a_n), $a_n \in A$ *така, що має місце рівність* (1).

Доведення. Використовуючи властивості циліндрів, легко бачити, що для довільного $x \in [0;1)$ існує система вкладених відрізків Δ_{a_1}, $\Delta_{a_1a_2}$, ..., $\Delta_{a_1a_2...a_n}$, ..., які містять x. Згідно з лемою 2, їх переріз співпадає з точкою x, тобто

$$x = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_{a_1a_2...a_n} \equiv \Delta_{a_1a_2...a_n...} .$$

□

Символічний запис $\Delta_{a_1a_2...a_n...}$ виразу (1) числа x називатимемо *G_∞-марковським зображенням.* При цьому a_n називається *n-ою цифрою (символом)* даного G_∞-марковського зображення.

3. Множини чисел, з обмеженнями на вживання цифр

Нехай (V_n) - послідовність підмножин A.

Через $C = C[\Delta, (V_n)]$ будемо позначати множину всіх чисел з відрізка $[0,1]$, для яких n-ий символ набуває значень з множини V_n, тобто
$C = C[\Delta, (V_n)] = \{x : x = \Delta_{a_1a_2...a_n,...}, a_n \in V_n\}$, де $V_n \subseteq A$.

Теорема 2. *Міра Лебега множини C, обчислюється за формулами*

$$\lambda(C) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(F_n)}{\lambda(F_{n-1})} = \tag{3}$$

$$= \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda(\bar{F}_n)}{\lambda(F_{n-1})}\right), \tag{4}$$

де $F_0 = [0,1]$, F_n– об'єднання цилінрів рангу n, серед внутрішніх точок яких є точки множини C, $\bar{F}_n = F_{n-1} \setminus F_n$.

Доведення. Зрозуміло, що F_n – це замкнена множина, $C \subset F_n$ для довільного $n \in N$, $C = \lim\limits_{n\to\infty} F_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$, $\lambda(C) = \lim\limits_{n\to\infty} \lambda(F_n)$,
і

$$\lambda(F_n) = \lambda(F_{n-1}) - \lambda(\bar{F}_n), \tag{5}$$

причому

$$\bar{F}_n = \begin{cases} \emptyset & \text{якщо } V_n = A, \\ \bigcup\limits_{v_1\in V_1} \dots \bigcup\limits_{v_{n-1}\in V_{n-1}} \bigcup\limits_{w_n\in A\setminus V_n} \nabla_{v_1...v_{n-1}w_n}. & \end{cases}$$

Оскільки $F_n = \bigcup\limits_{v_1\in V_1} \cdots \bigcup\limits_{v_{n-1}\in V_{n-1}} \bigcup\limits_{v_n\in A\setminus V_n} \Delta_{v_1\cdots v_{n-1}v_n}$,
то

$$\lambda(F_n) = \frac{\lambda(F_n)}{\lambda(F_{n-1})} \cdot \frac{\lambda(F_{n-1})}{\lambda(F_{n-2})} \cdot ... \cdot \frac{\lambda(F_2)}{\lambda(F_1)} \cdot \frac{\lambda(F_1)}{\lambda(F_0)} =$$

$$= \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(F_k)}{\lambda(F_{k-1})}.$$

Тоді

$$\lambda(C) = \lim_{n\to\infty} \lambda(F_n) = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{\lambda(F_k)}{\lambda(F_{k-1})} =$$

$$= \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(F_k)}{\lambda(F_{k-1})}.$$

Рівність (1) доведено.

Враховуючи (3), отримуємо

$$\lambda(C) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(F_{k-1}) - \lambda(\bar{F}_k)}{\lambda(F_{k-1})} =$$

$$= \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda(\bar{F}_k)}{\lambda(F_{k-1})}\right),$$

що й вимагалося довести. □

Наслідок 2. *Рівність* $\lambda(C) = 0$ *рівносильна рівності*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(\bar{F}_n)}{\lambda(F_{n-1})} = \infty \tag{6}$$

Доведення. Дане твердження є наслідком теореми 2 і твердження про взаємозв'язок між розбіжністю нескінченних добутків і рядів. □

Теорема 3. *Рівність* $\lambda(C) = 0$ *має місце тоді і тільки тоді, коли послідовність* (V_n) *має властивість* $V_n \neq A$ *для нескінченної множини значень* n.

Доведення. Нехай множина $\{n : V_n \neq A\}$ є нескінченною і для кожного члена послідовності (n_k)

$$V_{n_k} \neq A.$$

Тоді

$$\frac{\lambda(\bar{F_{n_k}})}{\lambda(F_{n_k-1})} \geq q_{\min}$$

і

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda(\bar{F_{n_k}})}{\lambda(F_{n_k-1})} \neq 0.$$

Отже, не виконується необхідна умова збіжності ряду (4), тобто він розбігається і дає, згідно з наслідком теореми 2, $\lambda(C) = 0$.

Нехай $\lambda(C) = 0$. Доведемо, що послідовність (V_n) має властивість $V_n \neq A$ для нескінченної множини значень n. Для цього скористаємося методом від супротивного.

Якщо припустити, що для всіх n, більших деякого n_0, $V_n = A$, то $F_n = F_{n-1}$ для всіх $n > n_0$ і
$$\frac{\lambda(F_n)}{\lambda(F_{n-1})} = 1,$$
а отже, добуток (1) збігається і згідно з теоремою 2
$$\lambda(C) > 0,$$
що суперечить умові $\lambda(C) = 0$. □

Наслідок 3. *$\lambda(C[\Delta, V]) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $V \neq A$, де $V = V_n$ для всіх $n \in N$.*

4. Деякі застосування

Розглянемо випадкову величину
$$\xi = \Delta_{\eta_1 \eta_2 \dots \eta_k \dots}, \tag{7}$$
цифри η_k марківського зображення якої є незалежними і однаково розподіленими, а саме:
$$\mathbb{P}\{\eta_k = i\} = q \geq 0, \qquad q_0 + q_1 + ... + q_{s-1} = 1.$$

Нехай $q_i > 0$.

Виникає питання: чи є функція розподілу випадкової величини (7) оберненою до функції розподілу випадкової величини, що має Q-зображення, Q-символи якого утворюють ланцюг Маркова.

Теорема 4. *1) Якщо*
$$p_0 = p_1 = ... = p_{s-1} = \frac{1}{s}, \qquad p_{ij} = \frac{1}{s},$$
то розподіл ξ є рівномірним.

2) Якщо $p_{ij} = \dfrac{1}{s}$, то розподіл ξ є кусково-рівномірним.

Теорема 5. *Якщо випадкова величина ξ рівномірно розподілена на $[0;1]$, то її цифри є залежними і утворюють однорідний ланцюг Маркова з початковими ймовірностями*
$$p_0 = q_0, \quad p_1 = q_1, \ \dots, \quad p_{s-1} = q_{s-1}$$
і матрицею перехідних ймовіностей $||p_{ij}|| = q_{ij}$.

Доведення. Оскільки ξ рівномірно розподілена на $[0;1]$, то

$$\mathbb{P}\{\xi \in [a,b]\} = \mathbb{P}\{\xi \in (a,b)\} = b - a,$$

зокрема,

$$\mathbb{P}(\Delta^{||p_{ij}||}_{c_1 c_2 \ldots c_m}) = |\Delta^{||p_{ij}||}_{c_1 \ldots c_m}|.$$

Оскільки

$$\mathbb{P}\{\tau_1 = j\} = \mathbb{P}\{\xi \in \Delta_j\} = |\Delta_j|,$$

то

$$\mathbb{P}\{\tau_1 = j\} = q_j.$$

Оскільки

$$\mathbb{P}\{\tau_2 = j/\tau_1 = i\} = \mathbb{P}\{\xi \in \Delta_{ij}\} = |\Delta_{ij}|,$$

то

$$\mathbb{P}\{\tau_2 = j/\tau_1 = i\} = q_i q_{ij}.$$

□

Література

[1] *Працьовитий М.В.* Фрактальні властивості розподілів випадкових величин, Q-знаки яких утворюють однорідний ланцюг Маркова // Асимптотичний аналіз випадкових еволюцій. — Київ: Ін-т математики АН України, 1994. — С.245-254.

[2] *Працьовитий М.В.* Канторовість і фрактальні властивості розподілів випадкових величин, Q-знаки яких утворюють однорідний ланцюг Маркова // Теорія ймовірностей та мат. статистика. — 1998. — № 58. — С.139-148.

[3] *Працьовитий М.В.* Фрактальні властивості спектра розподілу випадкової величини, Q_∞-знаки якої утворюють однорідний ланцюг Маркова // Фрактальний аналіз та суміжні питання. — Київ: ІМ НАН України - НПУ імені М.П.Драгоманова. — 1998. — № 2. — С.36-48.

[4] *Працьовитий М.В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: Вид-во НПУ імені М.П.Драгоманова, 1998. — 296 с.

[5] *Працьовитий М.В.* Сингулярні і фрактальні властивості розподілів випадкових величин, цифри поліосновного зображення яких утворюють однорідний ланцюг Маркова // Укр. мат. журн. — 2000. — 52, № 3. — С.368-374.

[6] *Турбин А.Ф., Працевитый Н.В.* Фрактальные множества, функции, распределения. — Киев: Наук.думка, 1992. — 208с.

[7] *Працьовитий М.В., Фещенко О.Ю.* Математичні моделі двосторонніх динамічних конфліктів і Q-представлення чисел // Наукові записки НПУ імені М.П.Драгоманова. Фізико-математичні науки. — $N^{\underline{o}}$ 4, 2003. — С. 260-269.

[8] *Albeverio S., Pratsiovytyi N. , Torbin G.* Singular probability distributions and fractal properties of sets of real numbers defined by the asymptotic frequencies of their s-adic digits // Укр. мат. журн. — 2005, 57, 9. — 1163-1170.