Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2013, № 15.— С. 5–23.

УДК 511.72

Кодування дійсних чисел з нескінченним алфавітом і основою 2

М. В. Працьовитий, Т. М. Ісаєва
(Національний педагогічний університет імені М.П.Драгоманова)

Анотація. У роботі вводиться зображення дробової частини дійсного числа, алфавітом якого є множина натуральних чисел, а кодування чисел здійснюється за допомогою знакопочережних двійкових рядів та їх підрядів; вивчається геометрія цього зображення (властивості циліндрів та хвостових множин), описуються властивості оператору зсуву цифр, доводиться критерій раціональності числа.

Ключові слова: $\Delta^{\#}$-зображення дробової частини дійсного числа, геометрія зображення, циліндр, основне метричне відношення, раціональність числа, оператор зсуву цифр, хвостова множина, множина канторівського типу.

Abstract. In the paper, we introduce the representation of fractional part of real number such that its alphabet is a set of positive integers and numbers are encoded by means of alternating binary series and their subseries. We study the geometry of this representation (properties of cylinders and tail sets), describe properties of shift operator, prove the criterion of rationality of number.

Keywords: $\Delta^{\#}$-representation of fractional part of real number, geometry of representation, basic metric relation, rationality of number, shift operator, tail set, Cantor-like set.

Вступ

Сьогодні в математиці та її застосуваннях широко використовуються різні системи представлення та зображення (кодування) дійсних чисел, які в принципі є різними моделями дійсного числа. Для потреб фрактальної геометрії та фрактального аналізу вони є зручним інструментом у конструюванні та дослідженнях математичних об'єктів зі складною локальною структурою [1]-[3] (множин, функцій, мір, розподілів випадкових величин, перетворень простору, динамічних систем тощо). Одні з таких систем використовують скінченний [4], інші — нескінченний [5] алфавіти. Створення нової системи кодування дійсних чисел розширює коло об'єктів, які формально просто описуються та вивчаються. Ми розглядаємо ще одну систему кодування, алфавітом якої є множина натуральних чисел. Вона має зв'язок з представленням чисел елементарними ланцюговими дробами [6] та нега-двійковою системою числення. З її допомогою моделюються сингулярні, неперервні ніде не монотонні, звивисті та недиференційовні функції. Разом з цим, лише ґрунтовне вивчення її геометрії дозволить ефективно використовувати її в теорії фракталів. При цьому існує кілька аспектів дослідження: теоретико-числовий, геометричний (тополого-метричний), фрактальний, ймовірнісний тощо, які власне є автономними, хоча органічно взаємопов'язаними (тісно переплітаються).

Представлення чисел, якому присвячена дана робота, вперше фігурувало у роботі Салема [7] у виразі значення сингулярної строго зростаючої функції (сьогодні так званої функції Мінковського [8]), яка в ірраціональних точках означається рівністю:

$$?\,(x) = ?([0; a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]) =$$
$$= 2^{1-a_1} - 2^{1-a_1-a_2} + 2^{1-a_1-a_2-a_3} + \ldots + (-1)^{n+1} 2^{1-a_1-\ldots-a_n} + \ldots,$$

де $x = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots}} \equiv [0; a_1, a_2, ...]$ – елементарний ланцюговий дріб, $(a_n \in N)$,

а в раціональних точках доозначується за неперервністю і виражається скінченною сумою.

1. Представлення дробової частини дійсного числа у системі з основою 2 і нескінченним алфавітом

Лема 1. *При довільних натуральному n і наборі натуральних чисел $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n)$ число*

$$x = 2^{1-a_1} - 2^{1-a_1-a_2} + \ldots + (-1)^{n-1} 2^{1-a_1-a_2-\ldots-a_{n-1}-a_n} \equiv \Delta^{\sharp}_{a_1 a_2 \ldots a_{n-1} a_n (0)} \qquad (1)$$

є раціональним числом з півінтервалу $(0; 2^{1-a_1}]$, причому якщо $a_n = 1$, то

$$x = 2^{1-a_1} - 2^{1-a_1-a_2} + \ldots + (-1)^{n-2} 2^{1-a_1-a_2-\ldots-a_{n-2}-a'_{n-1}} \equiv \Delta^{\sharp}_{a_1 a_2 \ldots a_{n-2} a'_{n-1} (0)}, \qquad (2)$$

де $a'_{n-1} = a_{n-1} + 1$.

Доведення. Раціональність числа x очевидна. Спочатку доведемо першу частину твердження. Для цього використаємо метод математичної індукції.

При $n = 1$ твердження очевидно правильне, оскільки $x = 2^{1-a_1}$.

Припускаємо правильність твердження для $n = k$, тобто, що

$$2^{1-a_1} - 2^{1-a_1-a_2} + \ldots + (-1)^{k-1}2^{1-a_1-a_2-\ldots-a_k} = x \in (0; 2^{1-a_1}].$$

Розглянемо випадок, коли $n = k + 1$. Очевидно, що

$$x = 2^{1-a_1} - 2^{-a_1}x_1,$$

де $x_1 = 2^{1-a_2} - 2^{1-a_2-a_3} + \ldots + (-1)^k 2^{1-a_2-a_3-\ldots-a_{k+1}}$.

За припущенням $x_1 \in (0; 2^{1-a_2}]$. Тому

$$0 < 2^{1-a_1} - 2^{1-a_1-a_2} \leq x = 2^{1-a_1} - 2^{-a_1}x_1 < 2^{1-a_1},$$

що й вимагалось довести.

Тепер доведемо другу частину твердження.

Розглянувши різницю виразів (1) і (2) при $a_n = 1$, отримаємо:

$$(-1)^{n-2}((2^{1-a_1-a_2-\ldots-a_{n-1}} - 2^{1-a_1-a_2-\ldots-a_{n-1}-1}) - 2^{1-a_1-a_2-\ldots-a_{n-2}-(a_{n-1}+1)}) =$$
$$= (-1)^{n-2}(2^{-a_1-a_2-\ldots-a_{n-1}} - 2^{-a_1-a_2-\ldots-a_{n-1}}) = 0.$$

Отже, при $a_n = 1$ для числа x має місце розклад (2). □

Зауважимо, що період (0) у скороченому записі $\Delta^{\sharp}_{a_1a_2\ldots a_{n-1}a_n(0)}$ виразу (1) числа x є чисто символічним, мотивацію чого ми наведемо пізніше.

Лема 2. *Число x, що є значенням виразу* (1) *або* (2)*, є двійково-раціональним, тобто має класичне двійкове зображення з періодом* (0)*.*

Доведення. Враховуючи лему 1, ми можемо вважати, що n є числом парним, тобто $n{=}2m$. Тоді

$$x = (2^{1-a_1} - 2^{1-a_1-a_2}) + \ldots + (2^{1-a_1-\ldots-a_{2m-1}} - 2^{1-a_1-\ldots-a_{2m-1}-a_{2m}}) =$$
$$= \frac{2^{a_2}-1}{2^{a_1+a_2-1}} + \frac{2^{a_4}-1}{2^{a_1+a_2+a_3+a_4-1}} + \ldots + \frac{2^{2m}-1}{2^{a_1+a_2+\ldots+a_{2m}-1}}.$$

Оскільки

$$2^{a_i} - 1 = 2^{a_i-1} + 2^{a_i-2} + \ldots + 2^1 + 2^0,$$

то

$$\frac{2^{a_i}-1}{2^{a_1+a_2+\ldots+a_i-1}} = \frac{2^{a_i-1} + 2^{a_i-2} + \ldots + 2^1 + 2^0}{2^{a_1+a_2+\ldots+a_i-1}} =$$
$$= \frac{1}{2^{a_1+a_2+\ldots+a_{i-1}}} + \frac{1}{2^{a_1+a_2+\ldots+a_{i-1}+1}} + \ldots + \frac{1}{2^{a_1+a_2+\ldots+a_i-1}}.$$

Тому

$$x = \left(\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_1+1}} + \frac{1}{2^{a_1+2}} + \ldots + \frac{1}{2^{a_1+a_2-1}}\right) +$$
$$+ \left(\frac{1}{2^{a_1+a_2+a_3}} + \frac{1}{2^{a_1+a_2+a_3+1}} + \ldots + \frac{1}{2^{a_1+a_2+a_3+a_4-1}}\right) + \ldots +$$

$$+\left(\frac{1}{2^{a_1+\ldots+a_{2m-1}}}+\frac{1}{2^{a_1+\ldots+a_{2m-1}+1}}+\ldots+\frac{1}{2^{a_1+\ldots+a_{2m-1}+a_{2m}-1}}\right)=$$

$$=\Delta^2_{\underbrace{1\ldots1}_{a_2}\underbrace{0\ldots0}_{a_3-a_2}\underbrace{1\ldots1}_{a_4}\underbrace{0\ldots0}_{a_5-a_4}\ldots\underbrace{1\ldots1}_{a_{2m}}(0)}. \qquad \square$$

Лема 3. *При довільній послідовності натуральних чисел* (a_n) *сума* x *ряду*

$$x=2^{1-a_1}-2^{1-a_1-a_2}+\ldots+(-1)^{n-1}2^{1-a_1-a_2-\ldots-a_n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}2^{1-a_1-a_2-\ldots-a_n} \quad (3)$$

належить інтервалу $(0;2^{1-a_1})$, *причому різним послідовностям відповідають різні суми.*

Доведення. Збіжність ряду (3) і те, що його сума $x\le 2^{1-a_1}$ випливає з теореми Лейбніца — ознаки збіжності знакозмінного ряду. Оскільки $x=2^{1-a_1}-2^{-a_1}x_1$, де

$$x_1=2^{1-a_2}-2^{1-a_2-a_3}+\ldots+(-1)^{n-1}2^{1-a_2-a_3-\ldots-a_n}+\ldots=$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\left(2^{1-a_2-\ldots-a_n}-2^{1-a_2-\ldots-a_n-a_{n+1}}\right)=\sum_{n=2}^{\infty}2^{1-a_2-\ldots-a_n}\left(1-\frac{1}{2^{a_{n+1}}}\right)>0$$

і $x_1\le 2^{1-a_2}$ за ознакою Лейбніца, тобто $0<x_1\le 2^{1-a_2}$. Тоді

$$0<2^{-a_1}\le x<2^{1-a_1}.$$

Тепер доведемо, що для різних послідовностей (a_n) і (a'_n) суми відповідних рядів x і x' не є рівними.

Оскільки $(a_n)\ne(a'_n)$, то існує $m\in N$ таке, що $a_m\ne a'_m$, але $a_i=a'_i$ при $i<m$. Тоді

$$x-x'=(-1)^{m-1}2^{1-a_1-\ldots-a_{m-1}-1}\left(2^{-a_m}-2^{-a'_m}+\sum_{i=1}^{\infty}2^{-a_m-\ldots-a_{m+i}}-\sum_{i=1}^{\infty}2^{-a'_m-\ldots-a'_{m+i}}\right).$$

Не порушуючи загальності, вважатимемо, що $a_m<a'_m$. Тоді

$$2^{-a_m}-2^{-a'_m}=\frac{1}{2^{a_m}}-\frac{1}{2^{a'_m}}\ge\frac{1}{2^{a_m}}-\frac{1}{2^{a_m+1}}=\frac{1}{2^{a_m+1}}.$$

Оскільки

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^{a_m+a_{m+1}+\ldots+a_{m+i}}}>0,$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^{a'_m+a'_{m+1}+\ldots+a'_{m+i}}}=\frac{1}{2^{a'_m}}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^{a'_{m+1}+\ldots+a'_{m+i}}}\le\frac{1}{2^{a'_m}}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}=\frac{1}{2^{a'_m}}\le\frac{1}{2^{a_m+1}},$$

то

$$\sum_{i=1}^{\infty}2^{-a_m-\ldots-a_{m+i}}-\sum_{i=1}^{\infty}2^{-a'_m-\ldots-a'_{m+i}}>-\frac{1}{2^{a_m+1}},$$

а отже,

$$\sum_{i=1}^{\infty}(2^{-a_m}-2^{-a'_m})+\sum_{i=1}^{\infty}2^{-a'_m-\ldots-a'_{m+i}}-\sum_{i=1}^{\infty}2^{-a'_m-\ldots-a'_{m+i}}>\frac{1}{2^{a_m+1}}-\frac{1}{2^{a_m+1}}=0,$$

тобто $x > x_1$, що й вимагалось довести. □

Теорема 1. *Для будь-якого $x \in (0;1]$ існує скінченна або нескінченна послідовність натуральних чисел (a_n) така, що*

$$x = \sum_k (-1)^{k-1} 2^{1-a_1-a_2-\ldots-a_k}. \tag{4}$$

Доведення. Оскільки

$$(0;1] = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n}; \frac{1}{2^{n-1}}\right],$$

то існує $a_1 \in N$ таке, що

$$x \in \left(\frac{1}{2^{a_1}}; \frac{1}{2^{a_1-1}}\right] \Leftrightarrow \frac{1}{2^{a_1}} < x \leq \frac{1}{2^{a_1-1}}.$$

Звідки

$$-\frac{1}{2^{a_1}} < x - \frac{1}{2^{a_1-1}} \equiv x_1 \leq 0.$$

Якщо $x_1 = x - \dfrac{1}{2^{a_1-1}} = 0$, то $x = \dfrac{1}{2^{a_1-1}}$.

Нехай $x_1 = x - \dfrac{1}{2^{a_1-1}} < 0$. Оскільки $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{\infty} \left[-\frac{1}{2^{a_1+n-1}}; -\frac{1}{2^{a_1+n}}\right)$, то існує a_2, таке, що

$$-\frac{1}{2^{a_1+a_2-1}} \leq x_1 < -\frac{1}{2^{a_1+a_2}}.$$

Звідки

$$0 \leq x_1 + \frac{1}{2^{a_1+a_2-1}} \equiv x_2 < \frac{1}{2^{a_1+a_2}}.$$

Якщо $x_2 = x_1 + \dfrac{1}{2^{a_1+a_2-1}} = 0$, то $x_1 = -\dfrac{1}{2^{a_1+a_2-1}}$ і $x = \dfrac{1}{2^{a_1-1}} - \dfrac{1}{2^{a_1+a_2-1}}$.

Якщо $x_2 < 0$, то процес продовжується до тих пір, поки не буде отримано $x_k = 0$, яке виражається

$$x_k \equiv x_{k-1} + \frac{(-1)^k}{2^{a_1+a_2+\ldots+a_k-1}},$$

звідки

$$x_{k-1} = \frac{(-1)^{k+1}}{2^{a_1+a_2+\ldots+a_k-1}} + x_k.$$

Тоді

$$x_{k-2} = \frac{(-1)^k}{2^{a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}-1}} + x_{k-1} = \frac{(-1)^k}{2^{a_1+a_2+\ldots+a_{k-1}-1}} + \frac{(-1)^{k+1}}{2^{a_1+a_2+\ldots+a_k-1}} + x_k$$

і т.д.

А отже,

$$x = \frac{1}{2^{a_1-1}} - \frac{1}{2^{a_1+a_2-1}} + \ldots + \frac{(-1)^{k+1}}{2^{a_1+a_2+\ldots+a_k-1}} + x_k,$$

або ж до нескінченності.

У першому випадку
$$x = \frac{1}{2^{a_1-1}} - \frac{1}{2^{a_1+a_2-1}} + \ldots + \frac{(-1)^{k+1}}{2^{a_1+a_2+\ldots+a_k-1}}.$$
Якщо ж $x_k < 0$ для довільного $k \in N$, то
$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2^{a_1+a_2+\ldots+a_k-1}},$$
оскільки збіжність процесу гарантує умова
$$|x_k| \leq \frac{1}{2^{a_1+a_2+\ldots+a_{k+1}-1}} \leq \frac{1}{2^k} \to 0 \qquad (k \to \infty).$$
□

Означення **1.** Подання числа x у формі (4) називається $\Delta^\sharp-$*представленням* числа, а його символічний запис $\Delta^\sharp_{a_1a_2\ldots a_n\ldots}$ у випадку нескінченної суми та $\Delta^\sharp_{a_1a_2\ldots a_n(0)}$ у випадку скінченного розкладу — $\Delta^\sharp-$*зображенням.*

З теореми 1 і лем 1–3 випливає, що кожне ірраціональне число має єдине $\Delta^\sharp-$зображення. Єдине зображення мають також двійково-ірраціональні числа, двійково-раціональні числа, які утворюють підмножину множини раціональних чисел, мають їх два (для одного з них $a_n = 1$).

2. Критерій раціональності числа

Означення **2.** Зображення $\Delta^\sharp_{a_1a_2\ldots a_m\ldots}$ числа $x \in (0,1]$ називається *періодичним*, якщо існують $m, t \in \mathbb{N}$ такі, що
$$a_{m+nt+j} = a_{m+j} \quad \forall\, n, j \in \mathbb{N}.$$

Це коротко записується $\Delta^\sharp_{a_1a_2\ldots a_m(a_{m+1}a_{m+2}\ldots a_{m+t})}$.

Теорема 2. *Для того щоб число $x \in (0,1]$ було раціональним, необхідно і достатньо, щоб його $\Delta^\sharp-$зображення було скінченним або періодичним.*

Доведення. Н е о б х і д н і с т ь. Якщо $x=1$, то $x = 2^{1-1} = \Delta^\sharp_{1(0)}$. Нехай $x = \dfrac{p}{q}$ – раціональне число з $(0,1)$, причому дріб $\dfrac{p}{q}$ є нескоротним. Тоді $p < q$. Зрозуміло, що $\Delta^\sharp-$зображення числа x може бути скінченним. Розглянемо випадок, коли його розклад є нескінченним. Подамо x у вигляді
$$x = 2^{1-a_1} - 2^{1-a_1-a_2} + \ldots + (-1)^{n-2}2^{1-a_1-a_2-\ldots-a_{n-1}} + (-1)^{n-1}2^{-a_1-a_2-\ldots-a_{n-1}}x_{n-1},$$
де
$$x_{n-1} = 2^{1-a_n} - 2^{1-a_n-a_{n+1}} + 2^{1-a_n-a_{n+1}-a_{n+2}} - \ldots.$$

Після множення останньої рівності на 2^{a_n}, отримуємо

$$2^{a_n}x_{n-1} = 2 - (\underbrace{2^{1-a_{n+1}} - 2^{1-a_{n+1}-a_{n+2}} + \ldots}_{x_n}) = 2 - x_n.$$

Тоді кожне x_n є раціональним і

$$x_n = 2 - 2^{a_n}x_{n-1} = 2 - 2^{a_n}(2 - 2^{a_{n-1}}x_{n-2}) = 2 - 2^{a_n+1} + 2^{a_{n-1}+a_n}x_{n-2} =$$
$$= 2 - 2^{a_n+1} + 2^{a_{n-1}+a_n}(2 - 2^{a_{n-2}}x_{n-3}) = 2 - 2^{a_n+1} + 2^{a_{n-1}+a_n+1} - 2^{a_{n-2}+a_{n-1}+a_n}x_{n-3} = \ldots =$$
$$= 2 - 2^{a_n+1} + 2^{a_{n-1}+a_n+1} - \ldots + (-1)^{n-1}2^{a_2+\ldots+a_n+1} + (-1)^n 2^{a_1+\ldots+a_n}x =$$
$$= \frac{2q - q2^{a_n+1} + q2^{a_{n-1}+a_n+1} - \ldots + (-1)^{n-1}q2^{a_2+\ldots+a_n+1} + (-1)^n q2^{a_1+\ldots+a_n}p}{q} = \frac{p_n}{q}.$$

Оскільки $x \in (0,1]$ для всіх n, то або $x_n = 1$ для деякого натурального n, і в цьому випадку розклад скінченний, або ж для кожного n

$$x_n \in \left\{\frac{1}{q}, \frac{2}{q}, \ldots \frac{q-1}{q}\right\}.$$

Тому існують $t,\ n \in \mathbb{N}$ такі, що $x_n = x_{n+t}$. Остання рівність і доводить періодичність $\Delta^\sharp$–зображення числа x.

Д о с т а т н і с т ь. Якщо розклад числа x є скінченним, то x як результат скінченної кількості арифметичних операцій над цілими числами, є раціональним.

Нехай $x = \Delta^\sharp_{a_1a_2\ldots a_n(c_1c_2\ldots c_t)}$ — дійсне число з $(0,1]$, що має періодичне $\Delta^\sharp$–зображення з періодом $(c_1c_2\ldots c_t)$. Якщо покласти

$$a \equiv a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \qquad c \equiv c_1 + c_2 + \ldots + c_t,$$
$$B = 2^{1-a_1} - 2^{1-a_1-a_2} + \ldots + (-1)^{n-1}2^{1-a},$$
$$D = 2^{-c_1} - 2^{-c_1-c_2} + \ldots + (-1)^{t-1}2^{-c},$$

то $x = B + S$, де

$$S = (-1)^n 2^{1-a}\cdot D + (-1)^{n+t}2^{1-a-c}\cdot D + (-1)^{n+2t}2^{1-a-2c}\cdot D + \ldots$$

як сума всіх членів нескінченно спадної геометричної прогресії з першим членом $b_1 = (-1)^n 2^{1-a}\cdot D$ і знаменником $q = (-1)^t 2^{-c}$ виражається

$$S = \frac{(-1)^n 2^{1-a}\cdot D}{1-(-1)^t 2^{-c}}.$$

Оскільки B і S є раціональними числами, раціональною є і їх сума x. □

Очевидно, що число $x = \Delta^\sharp_{a_1a_2\ldots a_n\ldots}$, цифри у $\Delta^\sharp$–зображенні якого утворюють арифметичну прогресію, тобто $a_{n+1} - a_n = d = const$ для кожного $n \in \mathbb{N}$, є раціональним тоді і тільки тоді, коли $d = 0$. Якщо ж цифри у $\Delta^\sharp$–зображенні числа x утворюють геометричну прогресію, тобто $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q = const$ для кожного $n \in \mathbb{N}$, то воно є раціональним тоді і тільки тоді, коли $q = 1$.

Означення **3.** Число x називається $\Delta^\sharp$*–раціональним*, якщо його $\Delta^\sharp$–зображення є скінченним.

Як випливає з леми 1 $\Delta^\sharp$–раціональне число має два $\Delta^\sharp$–зображення і є раціональним числом. Таким чином, $\Delta^\sharp$–раціональні числа утворюють зліченну підмножину множини раціональних чисел, а доповнення множини $\Delta^\sharp$–раціональних чисел до множини раціональних чисел — це множина чисел, що мають періодичні $\Delta^\sharp$–зображення.

3. Геометрія циліндричного $\Delta^\sharp$–зображення чисел

Означення **4.** Нехай $(c_1, c_2, \dots, c_m)$– впорядкований набір натуральних чисел. *Циліндром рангу m з основою $c_1c_2\dots c_m$* називається множина $\Delta^\sharp_{c_1c_2\dots c_m}$ чисел $x \in (0,1]$, які мають $\Delta^\sharp$–зображення таке, що $a_i(x) = c_i,\ i = \overline{1,m}$, тобто або

$$x = \frac{1}{2^{c_1-1}} - \frac{1}{2^{c_1+c_2-1}} + \dots + \frac{(-1)^{m-1}}{2^{c_1+c_2+\dots+c_m-1}},$$

або

$$x = \frac{1}{2^{c_1-1}} - \frac{1}{2^{c_1+c_2-1}} + \dots + \frac{(-1)^{m-1}}{2^{c_1+c_2+\dots+c_m-1}} + \frac{(-1)^m}{2^{c_1+c_2+\dots+c_m}} \cdot x',$$

або

$$x = \frac{1}{2^{c_1-1}} - \frac{1}{2^{c_1+c_2-1}} + \dots + \frac{(-1)^{m-1}}{2^{c_1+c_2+\dots+c_m-1}} + \frac{(-1)^m}{2^{c_1+c_2+\dots+c_m}} \cdot x'',$$

де

$$x' = \frac{1}{2^{a_{m+1}-1}} - \frac{1}{2^{a_{m+1}+a_{m+2}-1}} + \dots + \frac{1}{2^{a_{m+1}+\dots+a_{m+k}-1}},$$
$$x'' = \frac{1}{2^{a_{m+1}-1}} - \frac{1}{2^{a_{m+1}+a_{m+2}-1}} + \dots + \frac{1}{2^{a_{m+1}+\dots+a_{m+k}-1}} + \dots.$$

Циліндри мають наступні властивості.

1. $\bigcup\limits_{c_1=1}^{\infty}\bigcup\limits_{c_2=1}^{\infty}\dots\bigcup\limits_{c_m=1}^{\infty}\Delta^\sharp_{c_1c_2\dots c_m} = (0,1]$, для будь-якого натурального m;
2. $\Delta^\sharp_{c_1c_2\dots c_m} = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\Delta^\sharp_{c_1c_2\dots c_m i}$;
3. $\inf \Delta^\sharp_{c_1c_2\dots c_{2k-1}i} = \sup \Delta^\sharp_{c_1c_2\dots c_{2k-1}(i+1)}; \quad \sup \Delta^\sharp_{c_1c_2\dots c_{2k}i} = \inf \Delta^\sharp_{c_1c_2\dots c_{2k}(i+1)}$;
4. Для діаметра циліндра виконується рівність
$$d(\Delta^\sharp_{c_1c_2\dots c_m}) = \frac{1}{2^{c_1+c_2+\dots+c_m}};$$
5. Циліндри одного рангу не перетинаються або співпадають (рівні), причому
$$\Delta^\sharp_{c_1c_2\dots c_m} = \Delta^\sharp_{c'_1c'_2\dots c'_m} \iff c_i = c'_i \quad i = \overline{1,m};$$

6. Для довільної послідовності (c_m), $c_m \in \mathbb{N}$, переріз

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} \Delta^{\sharp}_{c_1c_2\ldots c_m} = x \equiv \Delta^{\sharp}_{c_1c_2\ldots c_m\ldots}$$

є $\Delta^{\sharp}$−ірраціональною точкою півінтервала $(0;1]$.

Лема 4. *Циліндр $\Delta^{\sharp}_{c_1c_2\ldots c_m}$ є відрізком, причому*

$$\Delta^{\sharp}_{c_1c_2\ldots c_m} = [a-\delta; a], \quad \text{коли} \quad m = 2k-1,$$

і

$$\Delta^{\sharp}_{c_1c_2\ldots c_m} = [a; a+\delta], \quad \text{коли} \quad m = 2k,$$

де

$$\delta = \frac{1}{2^{c_1+c_2+\ldots+c_m}},$$

$$a = \frac{1}{2^{c_1-1}} - \frac{1}{2^{c_1+c_2-1}} + \ldots + \frac{(-1)^{m-2}}{2^{c_1+c_2+\ldots+c_{m-1}-1}} + \frac{(-1)^{m-1}}{2^{c_1+c_2+\ldots+c_m-1}}.$$

Доведення. Введемо позначення

$$C \equiv \triangle^{\sharp}_{c_1c_2\ldots c_m},\ A \equiv [a-\delta; a],\ B \equiv [a; a+\delta].$$

1. Розглянемо випадок, коли $m = 2k-1$. Покажемо, що $C \subset A$.

Нехай $x = \Delta^{\sharp}_{c_1c_2\ldots c_m\ldots}$ — довільний елемент множини C, тобто

$$x = \frac{1}{2^{c_1-1}} - \ldots + \frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{2k-1}-1}} - \frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{2k-1}}}\underbrace{\left(\frac{1}{2^{a_{2k}-1}} - \frac{1}{2^{a_{2k}+a_{2k+1}-1}} + \ldots\right)}_{x_{2k}}.$$

Тоді

$$\min C = \frac{1}{2^{c_1-1}} - \frac{1}{2^{c_1+c_2-1}} + \ldots + \frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{2k-1}-1}} - \frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{2k-1}}},$$

що досягається при $x_{2k} = \dfrac{1}{2^{1-1}} = 1$, а

$$\max C = \frac{1}{2^{c_1-1}} - \frac{1}{2^{c_1+c_2-1}} + \ldots + \frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{2k-1}-1}}.$$

Отже,

$$\underbrace{\frac{1}{2^{c_1-1}} - \ldots + \frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{2k-1}-1}}}_{a} - \underbrace{\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{2k-1}}}}_{\delta} \le x \le \underbrace{\frac{1}{2^{c_1-1}} - \ldots + \frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{2k-1}-1}}}_{a}$$

або $a-\delta \le x \le a$, а це означає, що $C \subset A$.

Доведемо тепер таке включення: $A \subset C$.

Нехай $x \in [a-\delta; a]$. Покажемо, що в цьому випадку або

$$x = \Delta^{\sharp}_{c_1c_2\ldots c_{2k-1}(0)}, \tag{5}$$

або

$$x = \Delta^{\sharp}_{c_1c_2\ldots c_{2k-1}a_{2k}a_{2k+1}\ldots a_{2k+n}(0)}, \tag{6}$$

або

$$x = \Delta^{\sharp}_{c_1c_2\ldots c_{2k-1}a_{2k}a_{2k+1}\ldots}, \tag{7}$$

де $a_{2k+j} \in \mathbb{N}$, тобто що $x \in C$, а отже, $A \subset C$.

Справді, якщо $x = a$, то очевидно, що виконується рівність (5); якщо $x = a - \delta$, то виконується рівність (6), а саме: $x = a - \delta = \Delta^{\sharp}_{c_1c_2\ldots c_{2k-1}1(0)}$. Нехай тепер $a - \delta < x < a$. Покажемо, що в цьому випадку $a_i(x) = c_i$ для всіх $i \leq m = 2k - 1$. Для цього скористаємось методом від супротивного. Припустимо, що існує $a_i(x) = c'_i \neq c_i$ при $i \leq 2k - 1$.

Випадок A. Розглянемо число $x' = \Delta^{\sharp}_{c_1c_2\ldots c_{i-1}c'_i(0)}$. Тоді або $c'_i < c_i$, або $c'_i > c_i$, причому можливі дві ситуації: 1) i – непарне, тобто $i = 2j - 1$; 2) i – парне, тобто $i = 2j$.

A.1. Розглянемо випадок, коли $c'_{2j-1} < c_{2j-1}$. Тоді різниця

$$x' - a = \frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{i-1}+c'_{2j-1}-1}} - \left(\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{i-1}+c_{2j-1}-1}} - \frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{2j-1}+c_{2j}-1}} + \ldots + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{2k-1}-1}}\right) \geq \frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{i-1}+c'_{2j-1}-1}} - \frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{i-1}+c_{2j-1}-1}} > 0.$$

A.2. Нехай тепер $c'_{2j} < c_{2j}$. Тоді різниця

$$x' - a = -\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{i-1}+c'_{2j}-1}} + \left(\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{i-1}+c_{2j}-1}} - \frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{2j}+c_{2j+1}-1}} + \ldots + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{2k-1}-1}}\right) \leq -\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{i-1}+c'_{2j}-1}} + \frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{i-1}+c_{2j}-1}} <$$
$$< -\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{2j}+\ldots+c_{2k-1}}} = -\delta.$$

Отже, у випадках A.1, A.2 число x' лежить за межами інтервала $(a - \delta; a)$. Аналогічно міркуючи, можна показати, що у випадках, коли $c'_{2j} > c_{2j}$ і $c'_{2j-1} > c_{2j-1}$, число x' також лежить за межами інтервала $(a - \delta; a)$. Таким чином, з $x \in A$ випливає, що $a_i(x) = c_i$ для всіх $i \leq 2k - 1$ і має місце рівність (7), тобто $x \in C$.

Випадок B. Розглянемо тепер число $x' = \Delta^{\sharp}_{c_1c_2\ldots c_{i-1}c'_i a_{i+1}\ldots a_{i+n}(0)}$. Тоді також або $c'_i < c_i$, або $c'_i > c_i$, причому можливі ситуації: 1) i – непарне, тобто $i = 2j - 1$; 2) i – парне, тобто $i = 2j$.

B.1. Розглянемо випадок, коли $c'_{2j-1} > c_{2j-1}$. Тоді різниця

$$x' - a = \left(\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{i-1}+c'_{2j-1}-1}} - \frac{1}{2^{c_1+\ldots+c'_{2j-1}+a_{2j}-1}} + \ldots + \frac{(-1)^{2j+n-1}}{2^{c_1+\ldots+c'_{2j-1}+a_{2j}+\ldots+a_{2j+n}-1}}\right) -$$

$$-\left(\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{i-1}+c_{2j-1}-1}}-\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{2j-1}+c_{2j}-1}}+\ldots+\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{2k-1}-1}}\right)=$$
$$=\left(\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{i-1}+c'_{2j-1}-1}}-\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{i-1}+c_{2j-1}-1}}\right)-$$
$$-\left(\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c'_{2j-1}+a_{2j}-1}}-\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{2j-1}+c_{2j}-1}}\right)+\ldots+$$
$$+\left(\frac{(-1)^{2j+n-1}}{2^{c_1+\ldots+c'_{2j-1}+a_{2j}+\ldots+a_{2j+n}-1}}-\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{2k-1}-1}}\right)\leq$$
$$\leq\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{i-1}+c'_{2j-1}-1}}-\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{i-1}+c_{2j-1}-1}}<-\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{2j}+\ldots+c_{2k-1}}}=-\delta.$$

B.2. Нехай тепер $c'_{2j}>c_{2j}$, тоді різниця

$$x'-a=\left(-\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{i-1}+c'_{2j}-1}}+\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c'_{2j}+a_{2j+1}-1}}-\ldots+\frac{(-1)^{2j+n}}{2^{c_1+\ldots+c'_{2j}+a_{2j+1}+\ldots+a_{2j+n+1}-1}}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{i-1}+c_{2j}-1}}-\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{2j}+c_{2j+1}-1}}+\ldots+\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{2k-1}-1}}\right)=$$
$$=\left(-\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{i-1}+c'_{2j}-1}}+\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{i-1}+c_{2j}-1}}\right)-$$
$$-\left(-\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c'_{2j}+a_{2j+1}-1}}+\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{2j}+c_{2j+1}-1}}\right)+\ldots+$$
$$+\left(-\frac{(-1)^{2j+n}}{2^{c_1+\ldots+c'_{2j}+a_{2j+1}+\ldots+a_{2j+n+1}-1}}+\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{2k-1}-1}}\right)\geq$$
$$\geq-\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{i-1}+c'_{2j}-1}}+\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{i-1}+c_{2j}-1}}>0.$$

Аналогічно у випадках, коли $c'_{2j}<c_{2j}$ і $c'_{2j-1}<c_{2j-1}$, можна показати, що число x' лежить за межами інтервала $(a-\delta;a)$.

Випадок C. Розглянемо тепер число $x'=\Delta^{\sharp}_{c_1c_2\ldots c_{i-1}c'_ia_{i+1}a_{i+2}\ldots}$. В цьому випадку також або $c'_i<c_i$, або $c'_i>c_i$, причому можливо: 1) i – непарне, тобто $i=2j-1$; 2) i – парне, тобто $i=2j$.

C.1. Розглянемо випадок, коли $c'_{2j-1}<c_{2j-1}$. Тоді різниця

$$x'-a=\left(\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{i-1}+c'_{2j-1}-1}}-\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c'_{2j-1}+a_{2j}-1}}+\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c'_{2j-1}+a_{2j}+a_{2j+1}-1}}-\ldots\right)-$$
$$-\left(\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{i-1}+c_{2j-1}-1}}-\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{2j-1}+c_{2j}-1}}+\ldots+\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{2k-1}-1}}\right)=$$
$$=\left(\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{i-1}+c'_{2j-1}-1}}-\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{i-1}+c_{2j-1}-1}}\right)-$$

$$-\left(\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c'_{2j-1}+a_{2j}-1}}-\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{2j-1}+c_{2j}-1}}\right)+\ldots+$$
$$+\left(\frac{(-1)^{2j+n-1}}{2^{c_1+\ldots+c'_{2j-1}+a_{2j}+\ldots+a_{2j+n}-1}}-\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{2k-1}-1}}\right)+\ldots\geq$$
$$\geq\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{i-1}+c'_{2j-1}-1}}-\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{i-1}+c_{2j-1}-1}}>0.$$

C.2. У випадку, коли $c'_{2j-1}>c_{2j-1}$, різниця

$$x'-a=\left(\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{i-1}+c'_{2j-1}-1}}-\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c'_{2j-1}+a_{2j}-1}}+\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c'_{2j-1}+a_{2j}+a_{2j+1}-1}}-\ldots\right)-$$
$$-\left(\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{i-1}+c_{2j-1}-1}}-\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{2j-1}+c_{2j}-1}}+\ldots+\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{2k-1}-1}}\right)=$$
$$=\left(\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{i-1}+c'_{2j-1}-1}}-\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{i-1}+c_{2j-1}-1}}\right)-$$
$$-\left(\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c'_{2j-1}+a_{2j}-1}}-\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{2j-1}+c_{2j}-1}}\right)+\ldots+$$
$$+\left(\frac{(-1)^{2j+n-1}}{2^{c_1+\ldots+c'_{2j-1}+a_{2j}+\ldots+a_{2j+n}-1}}-\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{2k-1}-1}}\right)+\ldots\leq$$
$$\leq\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{i-1}+c'_{2j-1}-1}}-\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{i-1}+c_{2j-1}-1}}<-\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{2j}+\ldots+c_{2k-1}}}=-\delta.$$

Аналогічно можна довести, що число x' лежить поза інтервалом $(a-\delta;a)$, коли $c'_{2j}>c_{2j}$ і $c'_{2j}<c_{2j}$.

Отже, x не може мати зображення, відмінне від (5)-(7), а це означає, що $x\in C$ і $A\subset C$. Враховуючи першу частину доведення, маємо $C\subset A$ і $A\subset C$, тобто $A=C$. Таким чином, при $m=2k-1$ циліндр $\Delta^{\sharp}_{c_1c_2\ldots c_m}$ є відрізком $[a-\delta;a]$, що і вимагалось довести.

2. Тепер розглянемо випадок, коли $m=2k$. Покажемо, що $C\subset B$.

Нехай $x=\Delta^{\sharp}_{c_1c_2\ldots c_m\ldots}$ — довільний елемент множини C, тобто

$$x=\frac{1}{2^{c_1-1}}-\frac{1}{2^{c_1+c_2-1}}+\ldots+\frac{(-1)^{2k-1}}{2^{c_1+\ldots+c_{2k}-1}}+\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{2k}}}\underbrace{\left(\frac{1}{2^{a_{2k+1}-1}}-\frac{1}{2^{a_{2k+1}+a_{2k+2}-1}}+\ldots\right)}_{x_{2k+1}}.$$

Тоді

$$\max C=\frac{1}{2^{c_1-1}}-\frac{1}{2^{c_1+c_2-1}}+\ldots+(-1)^{2k-1}\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{2k}-1}}+\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{2k}}},$$

що досягається при $x_{2k+1}=\dfrac{1}{2^{1-1}}=1$, а

$$\min C=\frac{1}{2^{c_1-1}}-\frac{1}{2^{c_1+c_2-1}}+\ldots+(-1)^{2k-1}\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{2k}-1}}.$$

Отже,

$$\underbrace{\frac{1}{2^{c_1-1}}+\ldots+\frac{(-1)^{2k-1}}{2^{c_1+\ldots+c_{2k}-1}}}_{a}\le x\le\underbrace{\frac{1}{2^{c_1-1}}+\ldots+\frac{(-1)^{2k-1}}{2^{c_1+\ldots+c_{2k}-1}}}_{a}+\underbrace{\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{2k}}}}_{\delta}$$

або $a\le x\le a+\delta$, а це означає, що $x\in B$ і $C\subset B$.

Доведемо тепер таке включення: $B\subset C$.

Нехай $x\in[a;a+\delta]$. Покажемо, що в цьому випадку або

$$x=\Delta^{\sharp}_{c_1c_2\ldots c_{2k}(0)},\tag{8}$$

або

$$x=\Delta^{\sharp}_{c_1c_2\ldots c_{2k}a_{2k+1}a_{2k+2}\ldots a_{2k+n}(0)},\tag{9}$$

або

$$x=\Delta^{\sharp}_{c_1c_2\ldots c_{2k}a_{2k+1}a_{2k+2}\ldots},\tag{10}$$

де $a_{2k+j}\in\mathbb{N}$, тобто що $x\in C$, а отже, $B\subset C$.

Справді, якщо $x=a$, то виконується рівність (8); якщо $x=a+\delta=\Delta^{\sharp}_{c_1c_2\ldots c_{2k}1(0)}$, то виконується рівність (9). Нехай тепер $a<x<a+\delta$. Покажемо, що в цьому випадку $a_i(x)=c_i$ для всіх $i\le m=2k$. Для цього знову скористаємось методом від супротивного і припустимо, що існує $a_i(x)=c'_i\ne c_i$ при $i\le 2k$.

Випадок A. Розглянемо число $x'=\Delta^{\sharp}_{c_1c_2\ldots c_{i-1}c'_i(0)}$. Тоді або $c'_i<c_i$, або $c'_i>c_i$, причому можливі дві ситуації: 1) $i-$ непарне, тобто $i=2j-1$; 2) $i-$ парне, тобто $i=2j$.

A.1. Якщо $c'_{2j-1}>c_{2j-1}$, то різниця

$$x'-a=\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{i-1}+c'_{2j-1}-1}}-\left(\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{i-1}+c_{2j-1}-1}}-\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{2j-1}+c_{2j}-1}}+\ldots+\right.$$
$$\left.+\frac{(-1)^{2k-1}}{2^{c_1+\ldots+c_{2k}-1}}\right)\le\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{i-1}+c'_{2j-1}-1}}-\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{i-1}+c_{2j-1}-1}}<0.$$

A.2. Нехай тепер $c'_{2j}>c_{2j}$. Тоді різниця

$$x'-a=-\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{i-1}+c'_{2j}-1}}+\left(\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{i-1}+c_{2j}-1}}-\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{2j}+c_{2j+1}-1}}+\ldots+\right.$$
$$\left.+\frac{(-1)^{2k-1}}{2^{c_1+\ldots+c_{2k}-1}}\right)\ge-\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{i-1}+c'_{2j}-1}}+\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{i-1}+c_{2j}-1}}>\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{2j}+\ldots+c_{2k}}}=\delta.$$

Отже, $x'\notin(a;a+\delta)$. Аналогічно міркуючи, можна показати, що у випадках, коли $c'_{2j}<c_{2j}$ і $c'_{2j-1}<c_{2j-1}$, число x' також лежить за межами інтервала $(a;a+\delta)$. Таким чином, з $x\in A$ випливає, що $a_i(x)=c_i$ для всіх $i\le 2k$ і має місце рівність (10), тобто $x\in C$.

Випадок B. Розглянемо тепер число $x'=\Delta^{\sharp}_{c_1c_2\ldots c_{i-1}c'_i a_{i+1}\ldots a_{i+n}(0)}$. Тоді також або $c'_i<c_i$, або $c'_i > c_i$, причому можливо: 1) $i-$ непарне, тобто $i=2j-1$; 2) $i-$ парне, тобто $i=2j$.

B.1. Розглянемо випадок, коли $c'_{2j-1} < c_{2j-1}$. Тоді різниця

$$x'-a=\left(\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{i-1}+c'_{2j-1}-1}}-\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c'_{2j-1}+a_{2j}-1}}+\ldots+\frac{(-1)^{2j+n-1}}{2^{c_1+\ldots+c'_{2j-1}+a_{2j}+\ldots+a_{2j+n}-1}}\right)-$$

$$-\left(\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{i-1}+c_{2j-1}-1}}-\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{2j-1}+c_{2j}-1}}+\ldots+\frac{(-1)^{2k-1}}{2^{c_1+\ldots+c_{2k}-1}}\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{i-1}+c'_{2j-1}-1}}-\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{i-1}+c_{2j-1}-1}}\right)-$$

$$-\left(\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c'_{2j-1}+a_{2j}-1}}-\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{2j-1}+c_{2j}-1}}\right)+\ldots+$$

$$+\left(\frac{(-1)^{2j+n-1}}{2^{c_1+\ldots+c'_{2j-1}+a_{2j}+\ldots+a_{2j+n}-1}}-\frac{(-1)^{2k-1}}{2^{c_1+\ldots+c_{2k}-1}}\right)\geq$$

$$\geq\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{i-1}+c'_{2j-1}-1}}-\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{i-1}+c_{2j-1}-1}}>\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{2j}+\ldots+c_{2k}}}=\delta.$$

B.2. Якщо $c'_{2j} < c_{2j}$, то різниця

$$x'-a=\left(-\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{i-1}+c'_{2j}-1}}+\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c'_{2j}+a_{2j+1}-1}}-\ldots+\frac{(-1)^{2j+n}}{2^{c_1+\ldots+c'_{2j}+a_{2j+1}+\ldots+a_{2j+n+1}-1}}\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{i-1}+c_{2j}-1}}-\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{2j}+c_{2j+1}-1}}+\ldots+\frac{(-1)^{2k-1}}{2^{c_1+\ldots+c_{2k}-1}}\right)=$$

$$=\left(-\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{i-1}+c'_{2j}-1}}+\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{i-1}+c_{2j}-1}}\right)-$$

$$-\left(-\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c'_{2j}+a_{2j+1}-1}}+\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{2j}+c_{2j+1}-1}}\right)+\ldots+$$

$$+\left(-\frac{(-1)^{2j+n}}{2^{c_1+\ldots+c'_{2j}+a_{2j+1}+\ldots+a_{2j+n+1}-1}}+\frac{(-1)^{2k-1}}{2^{c_1+\ldots+c_{2k}-1}}\right)\leq$$

$$\leq-\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{i-1}+c'_{2j}-1}}+\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{i-1}+c_{2j}-1}}<0.$$

У випадках, коли $c'_{2j-1} > c_{2j-1}$ і $c'_{2j} > c_{2j}$, аналогічно можна показати, що число x' також лежить поза інтервалом $(a; a+\delta)$.

Випадок C. Розглянемо тепер число $x' = \Delta^{\sharp}_{c_1c_2\ldots c_{i-1}c'_i a_{i+1}a_{i+2}\ldots}$. В цьому випадку або $c'_i < c_i$, або $c'_i > c_i$, причому можливі дві ситуації: 1) $i-$ непарне, тобто $i = 2j-1$; 2) $i-$ парне, тобто $i = 2j$.

C.1. Коли $c'_{2j} < c_{2j}$, то різниця

$$x'-a = \left(-\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{i-1}+c'_{2j-1}-1}} + \frac{1}{2^{c_1+\ldots+c'_{2j-1}+a_{2j}-1}} - \frac{1}{2^{c_1+\ldots+c'_{2j-1}+a_{2j}+a_{2j+1}-1}} + \ldots\right) +$$
$$+\left(\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{i-1}+c_{2j-1}-1}} - \frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{2j-1}+c_{2j}-1}} + \ldots + \frac{(-1)^{2k-1}}{2^{c_1+\ldots+c_{2k}-1}}\right) =$$
$$= \left(-\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{i-1}+c'_{2j-1}-1}} + \frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{i-1}+c_{2j-1}-1}}\right) -$$
$$-\left(-\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c'_{2j-1}+a_{2j}-1}} + \frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{2j-1}+c_{2j}-1}}\right) + \ldots +$$
$$+\left(-\frac{(-1)^{2j+n-1}}{2^{c_1+\ldots+c'_{2j-1}+a_{2j}+\ldots+a_{2j+n}-1}} + \frac{(-1)^{2k-1}}{2^{c_1+\ldots+c_{2k}-1}}\right) + \ldots \leq$$
$$\leq -\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{i-1}+c'_{2j-1}-1}} + \frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{i-1}+c_{2j-1}-1}} < 0.$$

C.2. І, нарешті, якщо $c'_{2j} > c_{2j}$, то різниця

$$x'-a = \left(-\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{i-1}+c'_{2j-1}-1}} + \frac{1}{2^{c_1+\ldots+c'_{2j-1}+a_{2j}-1}} - \frac{1}{2^{c_1+\ldots+c'_{2j-1}+a_{2j}+a_{2j+1}-1}} + \ldots\right) +$$
$$+\left(\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{i-1}+c_{2j-1}-1}} - \frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{2j-1}+c_{2j}-1}} + \ldots + \frac{(-1)^{2k-1}}{2^{c_1+\ldots+c_{2k}-1}}\right) =$$
$$= \left(-\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{i-1}+c'_{2j-1}-1}} + \frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{i-1}+c_{2j-1}-1}}\right) -$$
$$-\left(-\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c'_{2j-1}+a_{2j}-1}} + \frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{2j-1}+c_{2j}-1}}\right) + \ldots +$$
$$+\left(-\frac{(-1)^{2j+n-1}}{2^{c_1+\ldots+c'_{2j-1}+a_{2j}+\ldots+a_{2j+n}-1}} + \frac{(-1)^{2k-1}}{2^{c_1+\ldots+c_{2k}-1}}\right) + \ldots \geq$$
$$\geq -\frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{i-1}+c'_{2j-1}-1}} + \frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{i-1}+c_{2j-1}-1}} > \frac{1}{2^{c_1+\ldots+c_{2j}+\ldots+c_{2k}}} = \delta.$$

Аналогічно можна довести, що коли $c'_{2j-1} > c_{2j-1}$ або $c'_{2j-1} < c_{2j-1}$, то число x' лежить за межами інтервала $(a; a+\delta)$.

Отже, x не може мати зображення, відмінне від (8)-(10), а це означає, що $x \in C$ і $B \subset C$, а тому $B = C$. Таким чином, при $m = 2k$ циліндр $\Delta^{\sharp}_{c_1c_2\ldots c_m}$ є відрізком $[a; a+\delta]$, що і вимагалось довести. □

Наслідок 1. *Для довжини циліндра рангу m мають місце співвідношення:*

$$|\Delta^{\sharp}_{c_1c_2\ldots c_m}| = \frac{1}{2^{c_1+c_2+\ldots+c_m}} \leq \frac{1}{2^m} \to 0 \quad (m \to \infty).$$

Наслідок 2. *Для довільного циліндра* $\Delta^{\sharp}_{c_1c_2\ldots c_m}$ *має місце рівність (основне метричне відношення)*

$$\frac{|\Delta^{\sharp}_{c_1c_2\ldots c_m i}|}{|\Delta^{\sharp}_{c_1c_2\ldots c_m}|} = \frac{1}{2^i}, \quad i = 1, 2, \ldots .$$

Зауважимо, що значення основного метричного відношення залежить лише від останнього символа в основі циліндра $\Delta^{\sharp}_{c_1c_2\ldots c_m i}$.

4. Оператор зсуву символів

У множині всіх $\Delta^{\sharp}$–зображень дійсних чисел півінтервала $(0;1]$ розглянемо оператор ω зсуву цифр, означений рівностями

$$\omega\left(\Delta^{\sharp}_{a_1a_2\ldots a_n\ldots}\right) = \Delta^{\sharp}_{a_2a_3\ldots a_n\ldots}, \qquad \omega\left(\Delta^{\sharp}_{a_1a_2\ldots a_n(0)}\right) = \Delta^{\sharp}_{a_2a_3\ldots a_n(0)},$$

який породжує функцію $\omega: \ (0;1] \to (0;1]$.

Даний оператор володіє властивістю сюр'єктивності, але не має властивості ін'єктивності, оскільки

$$\omega(\Delta^{\sharp}_{ia_2\ldots a_n\ldots}) = \omega(\Delta^{\sharp}_{ja_2\ldots a_n\ldots}) \quad \text{при } i \neq j.$$

Точки $\Delta^{\sharp}_{(i)}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ є інваріантними для відображення ω.

Застосування оператора зсуву ω n раз приводить до оператора ω^n :

$$\omega^n\left(\Delta^{\sharp}_{a_1a_2\ldots a_n\ldots}\right) = \Delta^{\sharp}_{a_{n+1}a_{n+2}\ldots}.$$

Лема 5. 1. *Функція* $\omega(x)$ *є кусково-лінійною, причому лінійною на кожному циліндрі першого рангу:*

$$\omega(x) = 2 - 2^i x \quad \text{\textit{при}} \quad x \in \Delta^{\sharp}_i, \tag{11}$$

тобто $x = \Delta^{\sharp}_{ia_2\ldots a_n\ldots}$, $\quad i = 1, 2, 3, \ldots$.

2. *В кожній точці виду* $x = \Delta^{\sharp}_{[i+1](0)}$, $i \in \mathbb{N}$, *вона має розрив першого роду зі стрибком* 1.

Доведення. 1. Справді,

$$x = \Delta^{\sharp}_{ia_2a_3\ldots a_n\ldots} = \frac{1}{2^{i-1}} - \frac{1}{2^i}\left(\frac{1}{2^{a_2-1}} - \frac{1}{2^{a_2+a_3-1}} + \ldots\right),$$

тобто

$$x = \frac{1}{2^{i-1}} - \frac{1}{2^i}\omega(x),$$

звідки випливає (6).

2. Дослідимо поведінку функції $\omega(x)$ в правому ε-півоколі точки $x = \Delta^{\sharp}_{[i+1](0)}$.

Оскільки умова $x \to \Delta^{\sharp}_{[i+1](0)} + 0$ рівносильна умові $x \in \Delta^{\sharp}_{i1j}$, де $j \to \infty$, то

$$\lim_{x \to \Delta^{\sharp}_{[i+1](0)}+0} \omega(x) = \lim_{j\to\infty} \omega\left(\Delta^{\sharp}_{i1j}\right) = \lim_{j\to\infty} \Delta^{\sharp}_{1j} = 1.$$

У лівому ε-півоколі точки $x = \Delta^{\sharp}_{[i+1](0)}$ умова $x \to \Delta^{\sharp}_{[i+1](0)} - 0$ рівносильна умові $x \in \Delta^{\sharp}_{[i+1]j}$, де $j \to \infty$. Тоді

$$\lim_{x \to \Delta^{\sharp}_{[i+1](0)}-0} \omega(x) = \lim_{j\to\infty} \omega\left(\Delta^{\sharp}_{[i+1]j}\right) = \lim_{j\to\infty} \Delta^{\sharp}_{j} = 0. \qquad \square$$

Зауваження 1. *Всі прямі, що є графіками лінійних функцій* (6)*, мають різні кутові коефіцієнти, але вісь ординат перетинають в одній точці.*

Наслідок 3. *Оператор зсуву символів ω кожну підмножину півінтервала* $(0;1]$ *нульової міри Лебега переводить в множину нульової міри Лебега, а підмножину повної міри — в множину повної міри; більше того, прообразом множини нульової міри є множина нульової міри, а множини повної міри — множина повної міри.*

Лема 6. *При кожному фіксованому значенні параметра $i \in \mathbb{N}$ відображення*

$$\delta_i(x) = \Delta^{\sharp}_{ia_1(x)\ldots a_n(x)\ldots} = -\frac{1}{2^i}x + \frac{1}{2^{i-1}}$$

є стискуючим відображенням з коефіцієнтом $\dfrac{1}{2^i}$ і інваріантною точкою $x = \Delta^{\sharp}_{(i)}$.

Доведення. Дане твердження випливає з того, що

$$\delta_i(x) = \Delta^{\sharp}_{ia_1(x)\ldots a_n(x)\ldots} = \frac{1}{2^{i-1}} - \frac{1}{2^i}\left(\frac{1}{2^{a_1-1}} - \frac{1}{2^{a_1+a_2-1}} + \frac{1}{2^{a_1+a_2+a_3-1}} - \ldots\right) = \frac{1}{2^{i-1}} - \frac{1}{2^i}x,$$

а тому,

$$\left|\frac{\delta_i(x_2)-\delta_i(x_1)}{x_2-x_1}\right| = \frac{1}{2^i} \quad \text{і} \quad \delta_i\left(\Delta^{\sharp}_{(i)}\right) = \Delta^{\sharp}_{(i)}. \qquad \square$$

Зауваження 2. *Для оператора зсуву ω і відображення $\delta_i(x)$ мають місце рівності:*

$$\omega(\delta_i(x)) = x; \qquad \delta_{a_1(x)}(\omega(x)) = x.$$

На множині всіх $\Delta^{\sharp}$–зображень дійсних чисел півінтервала $(0;1]$ означимо функцію φ рівностями

$$\varphi(\Delta^{\sharp}_{a_1a_2\ldots a_n\ldots}) = \Delta^{\sharp}_{[a_1+a_2]a_3\ldots a_n\ldots}, \qquad \varphi(\Delta^{\sharp}_{a_1a_2\ldots a_n(0)}) = \Delta^{\sharp}_{[a_1+a_2]a_3\ldots a_n(0)}.$$

Лема 7. 1. *Функція $\varphi(x) = \Delta^{\sharp}_{[a_1+a_2]a_3\ldots a_n\ldots}$ є кусково-лінійною, причому лінійною на кожному циліндрі першого рангу:*

$$\varphi(x) = 2^{1-i} - x \quad \textit{при} \quad x \in \Delta^{\sharp}_{i}, \tag{12}$$

тобто $x = \Delta^{\sharp}_{ia_2\ldots a_n\ldots}$, $\quad i = 1,2,3,\ldots$.

2. *В кожній точці виду $x = \Delta^{\sharp}_{[i+1](0)}$, $i \in \mathbb{N}$, вона має розрив першого роду зі стрибком $\dfrac{1}{2^i}$.*

Доведення. 1. Справді,

$$x = \Delta^{\sharp}_{ia_2a_3\ldots a_n\ldots} = \frac{1}{2^{i-1}} - \left(\frac{1}{2^{i+a_2-1}} - \frac{1}{2^{i+a_2+a_3-1}} + \ldots\right),$$

тобто

$$x = \frac{1}{2^{i-1}} - \varphi(x),$$

звідки випливає (12).

2. Дослідимо поведінку функції $\varphi(x)$ в правому ε-півоколі точки $x = \Delta^{\sharp}_{[i+1](0)}$. Умова $x \to \Delta^{\sharp}_{[i+1](0)} + 0$ рівносильна умові $x \in \Delta^{\sharp}_{i1j}$, де $j \to \infty$, тоді

$$\lim_{x \to \Delta^{\sharp}_{[i+1](0)}+0} \varphi(x) = \lim_{j\to\infty} \varphi\left(\Delta^{\sharp}_{i1j}\right) = \lim_{j\to\infty} \Delta^{\sharp}_{[i+1]j} = \frac{1}{2^i}.$$

Тепер дослідимо поведінку функції $\varphi(x)$ у лівому ε-півоколі точки $x = \Delta^{\sharp}_{[i+1](0)}$. Оскільки умова $x \to \Delta^{\sharp}_{[i+1](0)} - 0$ рівносильна умові $x \in \Delta^{\sharp}_{[i+1]j}$, де $j \to \infty$, то

$$\lim_{x \to \Delta^{\sharp}_{[i+1](0)}-0} \varphi(x) = \lim_{j\to\infty} \varphi\left(\Delta^{\sharp}_{[i+1]j}\right) = \lim_{j\to\infty} \Delta^{\sharp}_{[i+1+j]} = 0. \qquad \square$$

5. Хвостові множини

У множині $\mathcal{Z}^{\sharp}_{(0,1]}$ всіх $\Delta^{\sharp}$−зображень чисел $(0,1]$ введемо бінарне відношення еквівалентності "мати однаковий хвіст"(символічно: $\sim$).

Означення **5.** Будемо говорити, що два $\Delta^{\sharp}$−зображення

$$\Delta^{\sharp}_{a_1a_2\ldots a_n\ldots} \ i \ \Delta^{\sharp}_{b_1b_2\ldots b_n\ldots}$$

мають однаковий хвіст, або *перебувають у відношенні* $\sim$, якщо існують натуральні числа m та k такі, що $a_{m+j} = b_{k+j}$ для будь-якого $j \in N$.

Очевидно, що відношення $\sim$ є відношенням еквівалентності (тобто має властивості рефлективності, симетричності та транзитивності) і розбиває множину, на якій воно задане, на класи еквівалентності. Кожен з класів еквівалентності називається *хвостовою множиною.* Кожна хвостова множина однозначно визначається довільним своїм елементом (представником).

Будемо говорити, що два числа x і y мають однаковий хвіст (або пребувають у відношенні $\sim$), якщо їх $\Delta^{\sharp}$−зображення перебувають у відношенні $\sim$.

Символічно: $x \sim y$.

Лема 8. *Кожна хвостова множина є зліченною і щільною в* $(0,1]$ *множиною.*

Доведення. Нехай H — довільний клас еквівалентності, $x_0 = \Delta^{\sharp}_{c_1\ldots c_k\ldots}$ — його представник. Тоді очевидно, що для довільного натурального m існує множина H_m таких чисел x, що $a_{m+j}(x) = a_{k+j}(x_0)$ для довільного $j \in N$, $k = 1, 2, \ldots$.

Тоді множина $H = \bigcup\limits_{m \in N} H_m$, будучи зліченним об'єднанням зліченних множин, є множиною зліченною.

Доведемо тепер, що множина H щільна в $(0, 1]$. Оскільки належність числа x до множини H не залежить від довільної скінченної кількості перших символів його $\Delta^{\sharp}$–зображення, то в кожному з циліндрів довільного рангу m існує точка множини H. Отже, H є всюди щільною в $(0, 1]$ множиною. Що й вимагалось довести. □

Теорема 3. *Фактор-множина $G \equiv (0, 1]/\sim$ є континуальною.*

Доведення. Скористаємось методом доведення від супротивного. Припустимо, що G є зліченною. Тоді, згідно з лемою 8, півінтервал $(0, 1]$ є зліченним об'єднанням зліченних множин. Але добре відомо, що остання множина є зліченною, а півінтервал $(0, 1]$ є континуальною множиною. Отримана суперечність доводить теорему. □

Література

[1] *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. — 296 с.

[2] *Працьовитий М. В., Калашніков А. В., Безбородов В. К.* Про один клас сингулярних функцій, що містить класичну функцію Мінковського // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — 2010. — № 11. — С. 207–213.

[3] *Працьовитий М. В., Хворостіна Ю. В.* Основи метричної теорії зображення дійсних чисел знакозмінними рядами Люрота та найпростіші застосування // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — 2010. — № 11. — С. 102–118.

[4] *Працьовитий М. В.* Геометрія класичного двійкового зображення дійсних чисел. — Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 2012. — 68 с.

[5] *Працьовитий М.В.* Геометрія дійсних чисел у їх кодуваннях засобами нескінченного алфавіту як основа топологічних, метричних, фрактальних і ймовірнісних теорій // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — 2013. — № 14.— С. 189–216.

[6] *Хинчин А. Я.* Цепные дроби. — М. : Наука, 1978. — 116 с.

[7] *Salem R.* On some singular monotonic function which are stricly increasing // Trans. Amer. Math. Soc. — 1943. — 53. — P. 423–439.

[8] *Minkowski H.* Gesammeine Abhandlungen. — Berlin, 1911. — vol 2. — P. 50–51.