Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2013, № 15. — С. 56–73.

УДК 511.72

Зображення дійсних чисел нескінченно малими знакододатними узагальненими послідовностями Фібоначчі

Д. М. Карвацький
(Національний педагогічний університет імені М.П.Драгоманова)

Анотація. У статті вивчається двосимвольна система зображення дійсних чисел, в основі якої лежить нескінченно мала знакододатна узагальнена послідовності Фібоначчі, а саме, послідовності дійсних чисел (u_n), члени якої володіють наступною властивістю: $u_{n+2} = pu_{n+1} + su_n, n \in N$, де u_1, u_2, p, s — фіксовані додатні дійсні числа. Досліджувана система числення є надлишковою, оскільки довільне дійсне число з деякого відрізка може бути зображеним нескінченною кількістю способів. Вивчено властивості циліндрів, що відповідають даному зображенню, досліджено специфіку їх перекриттів.

Ключові слова: узагальнені послідовності Фібоначчі, система числення, множина неповних сум ряду, розмірність Хаусдорфа-Безиковича.

Abstract. In this paper we study two-symbol representation of real number, which are based on infinity small positive Fibonacci generalized sequences, namely, the sequences of real numbers (u_n), whose terms satisfying following condition: $u_{n+2} = pu_{n+1} + su_n, n \in N$, where u_1, u_2, p, s — fixed positive real numbers. This numerical system is redundant, since every real number from studied segment can be represented by infinity ways. Investigated the properties of cylindrical sets, which correspond this representing, studied the specificity of their overlap.

Keywords: Fibonacci generalized sequence, numerical system, the set of incomplete sums of series, Hausdorff-Bezicovich dimension.

Вступ

Стрімкий розвиток математики привів до необхідності у використанні різних систем числення та способів подання чисел, зокрема нетрадиційних. Широко використовуються s-адичні розклади, ланцюгові дроби, $\tilde{Q}$-зображення, медіантне, представлення рядами Остроградського і Люрота та інші способи подання дійсних чисел. Вони дають змогу описувати класи фрактальних множин, функцій, розподілів ймовірностей, досліджувати об'єкти зі складною локальною будовою.

Класична послідовність Фібоначчі та її узагальнення широко використовуються в різних розділах математики, зокрема, для побудови метричної, ймовірнісної та фрактальної теорій дійсних чисел. У роботі [8] досліджується система числення в основі якої лежить нескінченно мала послідовність Фібоначчі ($\widehat{\varphi}$-зображення), тобто така послідовність дійсних чисел (u_n), для членів якої виконується рівність

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

Доведено, що довільне дійсне число $x \in [-1; \varphi]$, де $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, може бути представлене підсумою (неповною сумою) ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi^{n-1}$. Така система числення має двосимвольний алфавіт та ненульову надлишковість, що є важливим у питаннях кодування інформації та її технічного використання.

У роботі [9] розглядається зображення чисел підсумами ряду $\sum_{n=1}^{\infty} {F_n}^{-1}$, елементами якого є числа, обернені до членів класичної послідовності Фібоначчі. Така система зображення чисел має ненульову надлишковість і складну геометрію, в основі якої лежать неоднорідні співвідношення між членами і залишками ряду.

Таким чином, числові послідовності Фібоначчі є ефективним засобом для кодування та зображення дійсних чисел, побудови відповідної метричної та фрактальної теорії. Будь-які узагальнення послідовностей Фібоначчі потенційно можуть бути аналогічно використані для представлення дійсних чисел, моделювання та дослідження об'єктів зі складною локальною будовою.

1. Узагальнені послідовності Фібоначчі

Означення **1.** Послідовність дійсних чисел $(u_n) \equiv (u_n)_{n=1}^{\infty}$, яка має властивість

$$u_{n+2} = pu_{n+1} + su_n, \tag{1}$$

де u_1, u_2, p, s — фіксовані дійсні числа, будемо називати *узагальненою послідовністю Фібоначчі.*

Узагальнена послідовність Фібоначчі є чотирьохпараметричним об'єктом, оскільки з (1) зрозуміло, що вираз її загального члена залежить від параметрів u_1, u_2, p, s. Тривіальним прикладом узагальненої послідовності Фібоначчі є $(0) = (0, 0, 0, \ldots)$ — нуль-послідовність. Очевидно, що коли $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ — узагальнена послідовність Фібоначчі, то $(u_n)_{n=m}^{\infty}$ — теж узагальнена послідовність Фібоначчі. Прикладами узагальнених послідовностей Фібоначчі є довільні геометричні прогресії, класична послідовність Фібоначчі, послідовність Люка, послідовність Пелля, послідовність Якобшталя та інші.

Теорема 1 ([14]). *Для загального члена узагальненої послідовності Фібоначчі має місце рівність*

$$u_n = \left[\begin{array}{ll} \dfrac{\Phi^{n-1}(u_2 - u_1\Psi) - \Psi^{n-1}(u_2 - u_1\Phi)}{\Phi - \Psi} & \textit{при} \;\; \Phi \neq \Psi, \\ \Phi^{n-1}\left(u_1 + (n-1)\left(\dfrac{u_2}{\Phi} - u_1\right)\right) & \textit{при} \;\; \Phi = \Psi, \end{array} \right.$$

де

$$\Phi = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4s}}{2} \quad \textit{та} \quad \Psi = \frac{p - \sqrt{p^2 + 4s}}{2}.$$

Наслідок 1. *Якщо $u_1 = 1$, $u_2 = 1$, $p = 1$, $s = 1$, то $(u_n) \equiv (F_n)$ — класична послідовність Фібоначчі, і має місце рівність (формула Біне)*

$$F_n = \frac{\varphi^{n+1} - \widehat{\varphi}^{n+1}}{\sqrt{5}}, \quad \textit{де} \;\; \varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \widehat{\varphi} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Наслідок 2. *Якщо (u_n) — узагальнена послідовність Фібоначчі така, що $p = s = 1$, то має місце рівність*

$$u_n = u_1 F_{n-2} + u_2 F_{n-1},$$

де F_n — n-й член класичної послідовності Фібоначчі.

Множина

$$F = \{(u_n) : \; u_1, u_2 \in R, \; u_n = p u_{n-1} + s u_{n-2}, \; n \geq 2\}$$

узагальнених послідовностей Фібоначчі, з фіксованими параметрами p та s, утворює двовимірний векторний простір з якого можна виділити підпростір S нескінченно малих узагальнених послідовностей Фібоначчі [14].

Теорема 2 ([14]). *Підмножина F^1 множини F таких узагальнених послідовностей Фібоначчі (a_n) для яких ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, утворює лінійний простір, який співпадає з підпростором нескінченно малих узагальнених послідовностей Фібоначчі S.*

2. Знакододатний ряд, члени якого є елементами узагальненої послідовності Фібоначчі

Розглянемо знакододатній ряд

$$u_1 + u_2 + \sum_{n=1}^{\infty} u_{n+2}, \;\; u_{n+2} = pu_{n+1} + su_n, n \in N, u_1, u_2, p, s \in R^+, \tag{2}$$

тобто ряд, члени якого утворюють узагальнену послідовність Фібоначчі з додатними початковими параметрами u_1, u_2, p, s.

Теорема 3. *Для загального члена ряду* (2) *справедлива наступна рівність*

$$u_n = \frac{\Phi^{n-1}\left(u_2 - u_1\Psi\right) - \Psi^{n-1}\left(u_2 - u_1\Phi\right)}{\Phi - \Psi}, n \in N, \tag{3}$$

де

$$\Phi = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4s}}{2} \quad \text{та} \quad \Psi = \frac{p - \sqrt{p^2 + 4s}}{2} \; .$$

Доведення. Задача знаходження загального члена ряду (2) рівносильна задачі розв'язання однорідного різницевого рівняння другого порядку

$$y\left(x+2\right) - py\left(x+1\right) - sy\left(x\right) = 0. \tag{4}$$

Характеристичне рівняння даного рiзнецевого рiвняння має вигляд

$$\lambda^2 - p\lambda - s = 0. \tag{5}$$

Оскільки, початкові параметри p та s за умовою є додатними, то коренями рівняння (5) будуть дійсні числа $\Phi = \frac{p+\sqrt{p^2+4s}}{2}$ та $\Psi = \frac{p-\sqrt{p^2+4s}}{2}$, причому $\Phi \neq \Psi$. Корені характеристичного рівняння задають два розв'язки рівняння (4): $y_1\left(x\right) = \Phi^x$ та $y_2\left(x\right) = \Psi^x$. Отже, загальний розв'язок можна записати як функцію

$$y(x) = c_1\Phi^{x-1} + c_2\Psi^{x-1},$$

а враховуючи початкові умови

$$\begin{cases} c_1y_1\left(1\right) + c_2y_2\left(1\right) = u_1, \\ c_1y_1\left(2\right) + c_2y_2\left(2\right) = u_2, \end{cases}$$

можна знайти сталі c_1 та c_2. Матимемо

$$c_1 = \frac{u_2 - u_1\Psi}{\Phi - \Psi} \quad \text{та} \quad c_2 = -\frac{u_2 - u_1\Phi}{\Phi - \Psi}.$$

Таким чином, загальний член ряду (2) буде мати вигляд

$$u_n = \frac{\Phi^{n-1}\left(u_2 - u_1\Psi\right) - \Psi^{n-1}\left(u_2 - u_1\Phi\right)}{\Phi - \Psi}.$$

$\square$

Теорема 4. *Для членів ряду* (2) *справедлива наступна рівність*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\Phi.$$

Доведення. Використовуючи рівність (3), границю можна записати наступним чином

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\Phi^n(u_2-u_1\Psi)-\Psi^n(u_2-u_1\Phi)}{\Phi^{n-1}(u_2-u_1\Psi)-\Psi^{n-1}(u_2-u_1\Phi)}.$$

Враховуючи, що для членів ряду (2) початкові параметри u_1, u_2, p, s є додатніми дійсними числами, для Φ та Ψ будуть справедливі наступні твердження

$$\Phi=\frac{p+\sqrt{p^2+4s}}{2}>0 \quad , \quad \Psi=\frac{p-\sqrt{p^2+4s}}{2}<0,$$
$$|\Phi|>|\Psi| \quad , \quad u_2-u_1\Psi\neq 0.$$

Взявши до уваги останні нерівності, можна зробити висновок, що

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\Phi.$$

$\square$

Наслідок 3. *Для членів ряду* (2) *справедлива наступна рівність*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+k}}{u_n}=\Phi^k, \forall k\in N.$$

Теорема 5. *Для збіжності ряду* (2) *необхідно і достатньо, щоб виконувалася система нерівностей*

$$\begin{cases} 0<p<1, \\ 0<s<1-p. \end{cases} \tag{6}$$

Доведення. Оскільки довільний член ряду (2) має вигляд (3), то очевидно, що для збіжності ряду необхідно і достатньо, щоб виконувалася хоча б одна з трьох систем

$$\begin{cases} |\Phi|<1, \\ |\Psi|<1, \end{cases} \begin{cases} |\Phi|<1, \\ u_2=u_1\Phi, \end{cases} \begin{cases} |\Psi|<1, \\ u_2=u_1\Psi. \end{cases}$$

Врахувавши те, що при додатніх початкових параметрах

$$|\Phi|>|\Psi| \quad , \quad u_2-u_1\Psi\neq 0,$$

умову збіжності ряду можна записати як систему нерівностей

$$\begin{cases} 0<\Phi<1, \\ -\Phi<\Psi<0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0<\frac{p+\sqrt{p^2+4s}}{2}<1, \\ -1<\frac{p-\sqrt{p^2+4s}}{2}<0. \end{cases}$$

Останню можна переписати відносно параметрів p та s у вигляді

$$\begin{cases} 0 < p < 1, \\ 0 < s < 1 - p. \end{cases}$$

□

Наслідок 4. *Якщо ряд (2) є збіжним, то послідовність (u_n), членів ряду, є монотонно спадною з деякого номера n^*, тобто існує такий номер $n^* \in N$, після якого має місце нерівність*

$$u_{n+1} < u_n, \forall n > n^*.$$

Зауваження 1. *З того, що початкові параметри u_1, u_2, p, s для ряду (2) є додатними слідує, що ряд є знакододатнім, проте обернене твердження невірне. Існують знакододатні узагальнені послідовності Фібоначчі для яких початкові параметри не є одночасно додатними.*

Лема 1. *Якщо ряд (2) збіжний, то*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = r = \frac{u_1(1-\Phi-\Psi)+u_2}{(1-\Phi)(1-\Psi)} = \frac{u_1(1-p)+u_2}{1-p-s}. \tag{7}$$

Доведення. Нехай виконується умова леми. Використовуючи рівність (3), можна записати наступне

$$r = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi^{n-1}(u_2 - u_1\Psi) - \Psi^{n-1}(u_2 - u_1\Phi)}{\Phi - \Psi}.$$

Оскільки, ряд (2) за умовою збіжний, то з умови (6) слідує, що $|\Phi| < 1$ та $|\Psi| < 1$. Таким чином, сума ряду (2) є сумою двох збіжних геометричних прогресій зі знаменниками Φ та Ψ відповідно, звідки отримуємо наступне

$$r = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(u_2 - u_1\Psi)}{\Phi - \Psi}\Phi^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(u_2 - u_1\Phi)}{\Phi - \Psi}\Psi^{n-1} = \frac{u_2 - u_1\Psi}{(\Phi-\Psi)(1-\Phi)} - \frac{u_2 - u_1\Phi}{(\Phi-\Psi)(1-\Psi)} =$$

$$= \frac{u_2 - u_2\Psi - u_1\Psi + u_1\Psi^2 - u_2 + u_2\Phi + u_1\Phi - u_1\Phi^2}{(\Phi-\Psi)(1-\Psi)(1-\Phi)} = \frac{u_1 - u_1(\Phi+\Psi) + u_2}{(1-\Psi)(1-\Phi)}.$$

Врахувавши, що $\Phi \cdot \Psi = -s$ та $\Phi + \Psi = p$, останню рівність можна записати наступним чином

$$r = \frac{u_1 - u_1(\Phi+\Psi) + u_2}{1 - (\Psi+\Phi) + \Phi\Psi} = \frac{u_1(1-p)+u_2}{1-p-s}.$$

□

Лема 2. *Якщо ряд* (2) *збіжний, то*

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} u_n = r_k = \frac{u_{k+1} + \Phi\Psi u_k}{1-(\Psi+\Phi)+\Phi\Psi}) = \frac{u_{k+1}+su_k}{1-p-s}. \tag{8}$$

Доведення. Нехай виконується умова леми. Використовуючи рівність (3), можна записати наступне

$$r_k = \sum_{n=k+1}^{\infty} u_n = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{\Phi^{n-1}\left(u_2-u_1\Psi\right) - \Psi^{n-1}\left(u_2-u_1\Phi\right)}{\Phi-\Psi}.$$

Оскільки, ряд за умовою збіжний, то $|\Phi| < 1$ та $|\Psi| < 1$. Число r_k є сумою залишків двох збіжних геометричних прогресій зі знаменниками Φ та Ψ відповідно, звідки отримаємо

$$r_k = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{(u_2-u_1\Psi)}{\Phi-\Psi}\Phi^{n-1} - \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{(u_2-u_1\Phi)}{\Phi-\Psi}\Psi^{n-1} = \frac{(u_2-u_1\Psi)\Phi^k}{(\Phi-\Psi)(1-\Phi)} - \frac{(u_2-u_1\Phi)\Psi^k}{(\Phi-\Psi)(1-\Psi)} =$$

$$= \frac{u_2\Phi^k - u_2\Phi^k\Psi - u_1\Phi^k\Psi + u_1\Phi^k\Psi^2 - u_2\Psi^k + u_2\Phi\Psi^k + u_1\Phi\Psi^k - u_1\Phi^2\Psi^k}{(\Phi-\Psi)(1-\Psi)(1-\Phi)} = \frac{u_{k+1}+\Phi\Psi u_k}{(1-\Psi)(1-\Phi)}.$$

Врахувавши, що $\Phi\cdot\Psi = -s$ та $\Phi+\Psi = p$, останню рівність можна записати наступним чином

$$r_k = \frac{u_{k+1} + \Phi\Psi u_k}{1-(\Psi+\Phi)+\Phi\Psi}) = \frac{u_{k+1}+su_k}{1-p-s}.$$

□

3. Тополого-метричні та фрактальні властивості множини неповних сум

Означення **2.** Якщо $M \in 2^N$, тобто $M \subseteq N$, то число

$$x = x\,(M) = \sum_{n\in M} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n u_n, \tag{9}$$

де

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 1, & n \in M\ , \\ 0, & n \notin M\ , \end{cases}$$

називається неповною сумою ряду.

З роботи I. E. Nyman та R. A. Saenz [6] відомо, що множина неповних сум збіжного знакододатного ряду є однією з трьох типів: скінченним об'єднанням відрізків, множиною канторівського типу або канторвалом.

Означення **3.** Циліндром k-ого рангу з основою $c_1c_2\dots c_k$, де $c_i \in \{0,1\}$, називається множина $\Delta'_{c_1c_2\dots c_k}$, яка містить всі неповні суми ряду (2) виду

$$\sum_{n=1}^{k} c_n u_n + \sum_{n=k+1}^{\infty} \varepsilon_n u_n, \text{ де } \varepsilon_n \in \{0,1\}\,.$$

Означення **4.** Циліндричним відрізком рангу k з основою $c_1c_2\dots c_k$ називається відрізок

$$\Delta_{c_1c_2\dots c_k} = \left[\inf \Delta'_{c_1c_2\dots c_k}, \sup \Delta'_{c_1c_2\dots c_k}\right].$$

Інтервал з тими ж кінцями, що й в $\Delta_{c_1c_2\dots c_k}$, будемо позначати через $\nabla_{c_1c_2\dots c_k}$ і називатимемо *циліндричним інтервалом рангу k з основою* $c_1c_2\dots c_k$. В залежності від (u_n) і набору $c_1c_2\dots c_k$ можливі випадки, коли $\Delta'_{c_1c_2\dots c_k}$ і $\Delta_{c_1c_2\dots c_k}$ співпадають та не співпадають, але завжди $\Delta'_{c_1c_2\dots c_k} \subset \Delta_{c_1c_2\dots c_k}$. Безпосередньо з означення випливають загальні властивості циліндричних множин, що породжені збіжним знакододатнім рядом:

Властивість 1.

$$\inf \Delta_{c_1c_2\dots c_k} = \inf \Delta'_{c_1c_2\dots c_k} = \sum_{i=1}^{k} c_i u_i,$$

$$\sup \Delta_{c_1c_2\dots c_k} = \sup \Delta'_{c_1c_2\dots c_k} = \sum_{i=1}^{k} c_i u_i + r_k.$$

Таким чином, циліндричний відрізок матиме вигляд

$$\Delta_{c_1c_2\dots c_k} = \left[\sum_{i=1}^{k} c_i u_i, \sum_{i=1}^{k} c_i u_i + r_k\right].$$

Властивість 2.

$$\Delta_{c_1c_2\dots c_k} \subset \Delta_{c_1c_2\dots c_k0} \bigcup \Delta_{c_1c_2\dots c_k1}, \Delta'_{c_1c_2\dots c_k} = \Delta'_{c_1c_2\dots c_k0} \bigcup \Delta'_{c_1c_2\dots c_k1}.$$

Властивість 3.

$$\inf \Delta_{c_1c_2\dots c_k} = \inf \Delta_{c_1c_2\dots c_k0} < \inf \Delta_{c_1c_2\dots c_k1}, \sup \Delta_{c_1c_2\dots c_k} = \sup \Delta_{c_1c_2\dots c_k1} > \sup \Delta_{c_1c_2\dots c_k0}.$$

Властивість 4.

$$|\Delta_{c_1c_2\dots c_k}| = r_k \to 0, \textit{при } k \to \infty.$$

Властивість 5.

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \Delta_{c_1c_2\dots c_k} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Delta'_{c_1c_2\dots c_k} \equiv \Delta_{c_1c_2\dots c_k\dots} = x \subset [0,r]\,.$$

Властивість 6.

$$\frac{|\Delta_{c_1c_2...c_kc}|}{|\Delta_{c_1c_2...c_k}|} = \frac{r_{k+1}}{r_{k+1}+u_{k+1}} = \frac{1}{\delta_{k+1}+1}, \text{ де } \delta_{k+1} = \frac{u_{k+1}}{r_{k+1}}.$$

Властивість 7.

$$\Delta_{c_1c_2...c_k} = \Delta_{s_1s_2...s_k} \leftrightarrow c_i = s_i, i = \overline{1,k}.$$

Властивість 8.

$$\Delta_{c_1c_2...c_k1} \bigcap \Delta_{c_1c_2...c_k0} = \begin{cases} \left[\sum_{n=1}^{k} c_n u_n + u_{n+1}, \sum_{n=1}^{k} c_n u_n + r_n\right], \text{ якщо } u_{k+1} < r_{k+1}, \\ \Delta_{c_1c_2...c_k10...0...}, \text{ якщо } u_{k+1} = r_{k+1}, \\ \emptyset, \text{ якщо } u_{k+1} > r_{k+1}. \end{cases},$$

Властивість 9.

$$\left|\Delta_{c_1c_2...c_k1} \bigcap \Delta_{c_1c_2...c_k0}\right| = \begin{cases} r_{k+1}, \text{ якщо } u_{k+1} < r_{k+1}, \\ 0, \text{ якщо } u_{k+1} \geq r_{k+1}. \end{cases}$$

Як випливає з означення циліндричних множин (циліндрів та відрізків), властивостей 2, 4 та 5, для довільної послідовності $(c_k), c_k \in \{0,1\}$:

$$\Delta_{c_1} \supset \Delta_{c_1c_2} \supset \ldots \Delta_{c_1c_2...c_k} \supset \ldots \quad \text{і} \quad \Delta'_{c_1} \supset \Delta'_{c_1c_2} \supset \ldots \Delta'_{c_1c_2...c_k} \supset \ldots,$$

більше того, існує єдине число $x \in [0, r]$ таке, що

$$x = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Delta_{c_1c_2...c_k} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Delta'_{c_1c_2...c_k} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k. \tag{10}$$

Подання числа x у вигляді (10) називається *циліндричним.* Вираз (10) символічно будемо записувати $x = \Delta_{c_1c_2...c_k...}$ і називатимемо *циліндричним зображенням числа (точки)* x. Множина всіх точок $x \in [0, r]$, що мають циліндричне зображення, співпадає з множиною неповних сум ряду (2).

Теорема 6 ([1]). *Множина неповних сум Δ' збіжного знакододатного ряду має наступні властивості*

1. вона є досконалою множиною (замкненою без ізольованих точок);

2. $\Delta' = \bigcup\limits_{c_1c_2...c_m} \triangle'_{c_1c_2...c_m}$ для довільного $m \in N$, причому всі $\triangle'_{c_1c_2...c_m}$, які входять в об'єднання, є ізометричними;

3. вона являє собою об'єднання відрізків, якщо нерівність $r_n < u_n$ виконується лише для скінченного числа n;

4. вона є ніде не щільною множиною, якщо нерівність $r_n \geq u_n$ виконується лише для скінченного числа n.

Теорема 7. *Якщо для ряду* (2) *виконується система нерівностей*

$$\begin{cases} 0 < p < 1, \\ \frac{1}{4} - \frac{p}{2} \leq s < 1 - p, \end{cases} \tag{11}$$

то ряд збігається, а множина його неповних сум являє собою скінченне об'єднання відрізків.

Доведення. Якщо виконується умова теореми, то автоматично виконується система (6), яка є необхідною і достатньою умовою збіжності ряду. Систему (11) відносно чисел Φ та Ψ можна записати у вигляді

$$\begin{cases} \frac{1}{2} < \Phi < 1, \\ -\Phi < \Psi < 0. \end{cases}$$

Для ряду (2) введемо до розгляду величину

$$\delta_n = \frac{u_n}{r_n},$$

де u_k — k-ий член, r_k — відповідно k-ий залишок ряду (2). Використовуючи рівності (3) та (8), можна встановити справедливість наступного відношення

$$\delta_n = \frac{u_n}{r_n} = \frac{\Phi^{n-1}(u_2 - u_1\Psi) - \Psi^{n-1}(u_2 - u_1\Phi)}{\dfrac{(u_2 - u_1\Psi)\Phi^n}{1-\Phi} - \dfrac{(u_2 - u_1\Phi)\Psi^n}{1-\Psi}}.$$

Враховуючи, що $|\Phi| > |\Psi|$, при додатних параметрах p та s, справедливо наступне

$$\delta = \lim_{n\to\infty} \delta_n = \frac{1-\Phi}{\Phi}.$$

Оскільки, $\frac{1}{2} < \Phi < 1$, то можна зробити висновок, що $\delta_n < 1$ ($\delta < 1$) для нескінченного числа $n \in N$, або іншими словами нерівність $r_n < u_n$ для ряду (2) виконується лише для скінченного числа n. Звідси, за теоремою 6, множина неповних сум ряду буде являти собою скінченне об'єднання відрізків. □

Наслідок 5. *Якщо для ряду* (2) *має місце система* (11) *та додатково виконується нерівність*

$$u_{n+1} \geq (1 - p - 2s)u_n, n \in N,$$

то множина неповних сум такого ряду є відрізком $\left[0, \frac{u_1(1-p)+u_2}{1-p-s}\right]$.

Наслідок 6. *Якщо для ряду* (2) *має місце система нерівністей*

$$\begin{cases} 0 < p < 1, \\ \frac{1}{2} - \frac{p}{2} \leq s < 1 - p, \end{cases}$$

то він збігається, а множина його неповних сум являє собою відрізок $\left[0, \frac{u_1(1-p)+u_2}{1-p-s}\right]$.

Наведемо далі означення α-мірної міри Хаусдорфа та розмірності Хаусдорфа–Безиковича, які будуть потрібні далі.

Нехай E — довільна обмежена підмножина R^1, $d(E)$ — діаметр множини E і Υ — сім'я всіх непорожніх підмножин простору R^1. Тоді для довільних $\alpha > 0$ і $\varepsilon > 0$ можна означити величину

$$m_\alpha^\varepsilon(E) = \inf_{d(E_j) \leq \varepsilon} \left\{ \sum_j d^\alpha(E_j) \right\},$$

де інфімум береться по всіх не більш ніж зчисленних ε-покриттях $\{E_j\}$ множини E множинами $E_j \in \Upsilon$. Величина $m_\alpha^\varepsilon(E)$ називається наближаючою мірою порядку ε.

Означення **5.** Невід'ємне число

$$H_\alpha(E) = \lim_{\varepsilon \to \infty} m_\alpha^\varepsilon(E) = \sup_{\varepsilon > 0} m_\alpha^\varepsilon(E)$$

називається *α-мірою Хаусдорфа–Безиковича множини E.*

Якщо Υ - сім'я всіх відкритих підмножин з R^1 або сім'я всіх замкнених підмножин з R^1, то отримуємо ту ж міру Хаусдорфа $H_\alpha(E)$, хоча наближаючі міри порядку ε можуть відрізнятися одна від одної.

Означення **6.** Невід'ємне число

$$\alpha_0(E) = \sup\{\alpha : H_\alpha(E) = +\infty\} = \inf\{\alpha : H_\alpha(E) = 0\}$$

називається *розмірністю Хаусдорфа–Безиковича множини E.*

Означення **7.** Фракталом називається кожна континуальна обмежена множина простору R^1, яка має тривіальну (рівну 0 або ∞) H_α-міру Хаусдорфа, порядок α якої дорівнює топологічній розмірності.

Теорема 8 ([4])**.** *Якщо збіжний знакододатний ряд задовільняє умову $a_k \leq r_k$ для довільного $k \in N$ (це еквівалентно тому, що $\delta_k = \frac{a_k}{r_k} \geq 1$), тоді міра Хаусдорфа-Безиковича множини його неповних сум обчислюється за формулою*

$$\alpha_0\left(A\right) = \left[\overline{\lim_{k \to \infty}} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \log_2\left(\delta_n + 1\right) \right) \right]^{-1}.$$

Наслідок 7. *Якщо для ряду виконуються умови теореми 8 та $\lim_{n\to\infty} \delta_n = \delta$, то міра Хаусдорфа-Безиковича множини його неповних сум обчислюється за формулою*

$$\alpha_0\left(A\right) = \log_2^{-1}\left(\delta + 1\right).$$

Теорема 9. *Якщо для ряду* (2) *виконується система нерівностей*

$$\begin{cases} 0 < p < \frac{1}{2}, \\ 0 < s < \frac{1}{4} - \frac{p}{2}, \end{cases} \tag{12}$$

то ряд буде збігатися, а множина його неповних сум буде:

1. досконалою;

2. ніде не щільною;

3. нульової міри Лебега;

4. розмірності Хаусдорфа-Безиковича

$$\alpha_0 = -\log_\Phi 2.$$

Доведення. Якщо виконується умова теореми, то автоматично виконується система (6), яка є необхідною і достатньою умовою збіжність ряду. Умову (12) відносно чисел Φ та Ψ можна записати наступним чином

$$\begin{cases} 0 < \Phi < \frac{1}{2}, \\ -\Phi < \Psi < 0. \end{cases}$$

У такому випадку

$$\delta = \lim_{n\to\infty} \delta_n \ = \frac{1-\Phi}{\Phi} > 1.$$

Тоді, згідно теореми 6, множина неповних сум ряду буде досконалою та ніде не щільною, оскільки, нерівність $r_n \geq u_n$ $(\delta > 1)$ виконується лише для скінченного числа n.

Міра Лебега множини неповних сум ряду (2) обчислюється за формулою (в загальному випадку не перевищує числа μ)

$$\mu(\Delta') = \lim_{n\to\infty} 2^n r_n.$$

Неважко переконатися, що при виконанні умови теореми

$$2^n r_n \to 0 \ \text{ при } \ n \to \infty.$$

Це і доводить нульмірність за Лебегом множини неповних сум ряду (2).

Згідно з наслідком 3, розмірність Хаусдорфа-Безиковича множини неповних сум ряду можна обчислити за формулою

$$\alpha_0\left(A\right) = {\log_2}^{-1}\left(\delta+1\right) \ = {\log_2}^{-1}\left(\frac{1}{\Phi}\right) \ = -\log_\Phi 2.$$

Теорему доведено. □

4. Представлення дійсних чисел за допомогою узагальнених послідовностей Фібоначчі

Розглянемо знакододатній ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \tag{13}$$

для членів якого виконуються наступні умови:

(1) $u_{n+2} = pu_{n+1} + su_n,\ n \in N$, причому $u_1,\ u_2,\ p,\ s \in R^+$;

(2) $\begin{cases} 0 < p < 1, \\ 0 < s < 1 - p; \end{cases}$

(3) $u_{n+1} \geq (1 - p - 2s)u_n,\ n \in N.$

Нехай $A = \{0\,,\,1\}\,,\ L = A \times A \times A \times A \times ....$ Відповідність f між множинами L і R^1

$$L \supset (\alpha_n) \xrightarrow{f} x \in R^1,$$

яка встановлюється рівністю

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n,$$

очевидно є функціональною.

Теорема 10. *Для будь-якого* $x \in \left[0\,,\, \frac{u_1(1-p)+u_2}{1-p-s}\right]$, *існує* $L \subseteq N$ *таке, що має місце розклад*

$$x = \sum_{k \in L} u_k = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n, \tag{14}$$

де

$$\alpha_k = \begin{cases} 1,\ k \in L\ , \\ 0,\ n \in N \setminus L. \end{cases}$$

Доведення. Нехай $x \in \left[0\,,\, \frac{u_1(1-p)+u_2}{1-p-s}\right]$. Якщо $x = \frac{u_1(1-p)+u_2}{1-p-s}$, то $L = N$ і теорему доведено.

Якщо $0 < x < \frac{u_1(1-p)+u_2}{1-p-s}$, то очевидно, що існує $k_1 \in N$ таке, що

$$u_{k_1} \leq x < u_{k_1 - 1}$$

і буде виконуватися нерівність

$$0 \leq x - u_{k_1} = x_1 < u_{k_1-1} - u_{k_1}.$$

Звідки отримаємо, що

$$x = u_{k_1} + x_1, \tag{15}$$

де $x_1 \in [0, u_{k_1-1} - u_{k_1})$. У випадку $x_1 = 0$ матимемо, що $x = u_{k_1}$ і рівність (14) доведена. Якщо $x_1 > 0$, то існує $k_2 \in N$ таке, що

$$u_{k_2} \leq x_1 < u_{k_2-1},$$

причому, $k_2 > k_1$ (послідовність (u_n) є спадною). Таким чином,

$$0 \leq x_1 - u_{k_2-1} = x_2 < u_{k_2-1} - u_{k_2}.$$

Матимемо, що $x_1 = u_{k_2} + x_2$, де $x_2 \in [0, u_{k_2-1} - u_{k_2})$.

Підставивши x_1 у рівність (15) отримаємо наступну тотожність

$$x = u_{k_1} + u_{k_2} + x_2.$$

Якщо $x_2 = 0$, то теорему доведено, оскільки $x = u_{k_1} + u_{k_2}$. Якщо ж $x_2 > 0$, то існує $k_3 > k_2, k_3 \in N$ таке, що

$$u_{k_3} \leq x < u_{k_3-1}.$$

Здійснюючи аналогічні міркування, можна знайти $x_3, x_4, x_5 \ldots$.

Якщо на деякому $n-$ому кроці

$$x_n = x_{n-1} - u_{k_n} = 0,$$

то розклад (14) знайдено:

$$x = u_{k_1} + u_{k_2} + \ldots + u_{k_n}.$$

Якщо ж такого скінченного n не знайдеться, то

$$0 < x_n = x_{n-1} - u_{k_n} < u_{k_n-1} - u_{k_n}$$

та існує $k_{n+1} > k_n, k_{n+1} \in N$ таке, що

$$u_{k_{n+1}} \leq x_n < u_{k_{n+1}-1}.$$

Звідки матимемо, що

$$0 \leq x_n - u_{k_n+1} = x_{n+1} < u_{k_{n+1}-1} - u_{k_{n+1}}$$

$$\text{і} \quad x = u_{k_1} + u_{k_2} + \ldots + u_{k_{n+1}} + x_{n+1}.$$

Враховуючи, що

$$u_{k_{n+1}-1} - u_{k_n+1} \to 0,$$

а отже, $x_{n+1} \to 0$ (при $n \to \infty$). Теорему доведено. $\square$

Зауваження 2. *З рівності* (9) *випливає, що множина всіх неповних сум ряду* (13) *співпадає з множиною* E *значень функції* f, *а отже, за теоремою* 5, *являє собою відрізок.*

Означення **8.** Подання числа x з відрізка $\left[0\,,\, \frac{u_1(1-p)+u_2}{1-p-s}\right]$ у вигляді (14) називатимемо F_g*—представленням* (F_g*—розкладом*) даного числа. Символічно це будемо записувати у вигляді

$$x = \triangle_{c_1c_2\ldots c_n\ldots}$$

і називатимемо F_g*—зображенням* цього числа. При цьому c_k називатимемо k*—ою цифрою* F_g*-зображення* числа x.

5. Властивості циліндричних множин

Далі вважатимемо, що ряд (13) є заданим і можна вважати заданою множину його неповних сум Δ', яка згідно наслідку 5, являє собою відрізок $[0, \frac{u_1(1-p)+u_2}{1-p-s}]$. Циліндричні множини, які породжені F_g-представленням, будуть володіти наступними властивостями:

Властивість 10. *Для довільної послідовності* $(c_k), c_k \in \{0,1\}$ *та номеру* $n \in N$ *справедлива рівність*

$$\triangle_{c_1c_2\ldots c_k} \equiv \triangle'_{c_1c_2\ldots c_k}.$$

Властивість 11.

$$\bigcup_{i_1=0}^{1} \cdots \bigcup_{i_k=0}^{1} \triangle_{i_1\ldots i_k} = \left[0\,,\, \frac{u_1(1-p)+u_2}{1-p-s}\right],\ k \in N.$$

Властивість 12.

$$\triangle_{c_1\ldots c_k 0} \bigcap \triangle_{c_1\ldots c_k 1} = \left[\sum_{n=1}^{k} c_n u_n + u_{k+1}, \sum_{n=1}^{k} c_n u_n + \frac{u_{k+2}+su_{k+1}}{1-p-s}\right] = \Pi^{k+1}_{c_1\ldots c_k}(0,1) \neq \emptyset.$$

Властивість 13.

$$|\triangle_{c_1c_2\ldots c_k}| = \frac{u_{k+1}+su_k}{1-p-s}.$$

Означення **9.** Нехай $\triangle_{c_1c_2\ldots c_k}$ — циліндр рангу k з основою $c_1c_2\ldots c_k$. Тоді відношення

$$\frac{\lambda(\triangle_{c_1c_2\ldots c_k c})}{\lambda(\triangle_{c_1c_2\ldots c_k})},$$

де λ — міра Лебега, є додатною дійснозначною функцією $f(c_1,c_2,\ldots,c_k,c)$ від змінних $c_1,c_2,\ldots c_k,c$ і називається *основним метричним відношенням.*

Властивість 14. *Має місце рівність*

$$\frac{|\triangle_{c_1c_2\ldots c_k c}|}{|\triangle_{c_1c_2\ldots c_k}|} = \frac{u_{k+2}+su_{k+1}}{u_{k+1}+su_k} = \frac{(p+s)u_{k+1}+su_k}{u_{k+1}+su_k}.$$

Властивість 15. *Якщо (c_k)— фіксована послідовність нулів та одиниць, то*

$$\triangle_{c_1c_2\ldots c_k\ldots} \equiv \bigcap_{k=1}^{\infty} \triangle_{c_1c_2\ldots c_k} = x \in \left[0\,,\ \frac{u_1(1-p)+u_2}{1-p-s}\right].$$

Властивість 16. *Для довільного $n \in N$ має місце рівність*

$$|\triangle_{c_1c_2\ldots c_n 1} \cap \triangle_{c_1c_2\ldots c_n 0}| = \frac{u_{n+2}-(1-p-2s)u_{n+1}}{1-p-s}.$$

Властивість 17. *Для довільного $k \in N$ мають місце нерівності*

$$\max \triangle_{c_1c_2\ldots c_k 110} > \max \triangle_{c_1c_2\ldots c_k 001},$$

$$\min \triangle_{c_1c_2\ldots c_k 110} > \min \triangle_{c_1c_2\ldots c_k 001}.$$

Властивість 18. *Для довільного $k \in N$ має місце рівність*

$$\frac{|\triangle_{c_1c_2\ldots c_k 1} \cap \triangle_{c_1c_2\ldots c_k 0}|}{|\triangle_{c_1c_2\ldots c_k}|} = \frac{u_{k+2}+(1-p-2s)u_{k+1}}{u_{k+1}+su_k}.$$

Властивість 19. *Циліндри $\Delta_{c_1c_2\ldots c_k\alpha}$ та $\Delta_{(1-c_1)(1-c_2)\ldots(1-c_k)}$ симетричні відносно середини відрізка $\left[0, \frac{u_1(1-p)+u_2}{1-p-s}\right]$, де $c_i \in \{0,1\}, i=\overline{1,k}$.*

Властивість 20. *Циліндри $\Delta_{c_1c_2\ldots c_m\alpha_{m+1}\ldots\alpha_{m+k}}$ та $\Delta_{(1-c_1)(1-c_2)\ldots(1-c_m)(1-\alpha_{m+1})\ldots(1-\alpha_{m+k})}$ симетричні відносно середини $\Delta_{c_1c_2\ldots c_m}$, де $c_i, a_j \in \{0,1\}, i=\overline{1,m}, j=\overline{m+1,m+k}$.*

6. Теореми про різну кількість F_g-зображень

Очевидно, що кінці відрізка $\left[0, \frac{u_1(1-p)+u_2}{1-p-s}\right]$ мають єдине F_g-представлення і більше того

$$0 = \Delta_{000\ldots0\ldots} \qquad \text{та} \qquad \frac{u_1(1-p)+u_2}{1-p-s} = \Delta_{111\ldots1\ldots}.$$

Лема 3. *Для будь-якої точки з інтервала $\left(0, \frac{u_1(1-p)+u_2}{1-p-s}\right)$ існує принаймні одне перекриття циліндрів одного рангу, якому вона належить.*

Доведення. Нехай $x \in \left(0, \frac{u_1(1-p)+u_2}{1-p-s}\right)$. Тоді можливі наступні випадки:

1.1 $x \in \Delta_0 \bigcap \Delta_1 = \Pi^1(0,1)$;

1.2 $x \in \Delta_0 \backslash \Pi^1(0,1)$;

1.3 $x \in \Delta_1 \backslash \Pi^1(0,1)$.

Якщо має місце випадок 1, то лему доведено.

В силу того, що циліндричні множини, які відповідають F_g-зображенню, володіють властивістю симетричності (властивість 19, 20), то подальші міркування можуть бути проведені для одного з випадків 1.2 або 1.3.

Без втрати загальності будемо вважати, що має місце випадок 1.2. Тоді для циліндричних множин другого рангу будемо мати:

2.1 $x \in \Delta_{00} \bigcap \Delta_{01} = \Pi_0^2(0,1)$;

2.2 $x \in \Delta_{00} \backslash \Pi_0^2(0,1)$;

2.3 $x \in \Delta_{01} \backslash \left(\Pi_0^2(0,1) \bigcup \Pi^1(0,1)\right)$.

Якщо має місце випадок 2.1, то твердження леми, очевидно, виконується. Враховуючи, що $\triangle_{00}$ та $\triangle_{01}$ симетрічні відносно середини відрізка $\triangle_0$, подальші міркування можуть бути проведені для одного з випадків 2.2 або 2.3. Нехай виконується 2.2. Для циліндрів третього рангу матимемо:

3.1 $x \in \Delta_{000} \bigcap \Delta_{001} = \Pi_{00}^3(0,1)$;

3.2 $x \in \Delta_{000} \backslash \Pi_{00}^3(0,1)$;

3.3 $x \in \Delta_{01} \backslash \left(\Pi_0^2(0,1) \bigcup \Pi^1(0,1)\right)$.

Таким чином, стає зрозуміло, що ми постійно будемо мати справу з трьома випадками та їх відповідними підвипадками. І, оскільки, $|\Delta_{0\ldots00}| \to 0$ та $|\Delta_{0\ldots01}| \to 0$ при $n, k \to \infty$, то лему доведено. □

Теорема 11. *Усі точки інтервалу* $\left(0, \frac{u_1(1-p)+u_2}{1-p-s}\right)$ *мають континуальну кількість* F_g*-зображень.*

Література

[1] *Gontcharenko Ya. V., Pratsiovytyi M. V., Torbin G. M.* Fractal properties of probability distributions on the set of incomplete sums of positive series, Transactions of the Dragomanov National Pedagogical University of Ukraine. Series 1. Phys.-Math. Sciences, Dragomanov National Pedagogical University of Ukraine, Kyiv, (2005), no. 6, 232–250.

[2] *Miller M. D.* On generalized Fibonacci numbers // Amer. Math. Monthly, 1971. — 78. —P. 1108-1109.

[3] *Pratsiovytyi M. V.* Distributions of sums of random power series, Dopov. Nats. Akad. Nauk Ukrain, (1996), no. 5, 32–37.

[4] *Pratsiovytyi M. V.* Fractal Approach to Investigations of Singular Probability Distributions, Dragomanov National Pedagogical University, Kyiv, (1998).

[5] *M.V. Pratsiovytyi, O.Yu. Feshchenko* Topological, metric and fractal properties of probability distributions on the set of incomplete sums of positive series. // Theory of Stochastic Processes. — 2007. — Т. 13 (29), № 1-2. — С. 205-224. — Бібліогр.: 27 назв.— англ.

[6] *Nyman I.E., Saenz R. A.* On a paper of Guthrie and Nyman on subsums of infinite series // Colloquium matematicum. – 2000. – **10**, N1. – vol. 83.

[7] *Беклемишев Д. В.* Дополнительные главы линейной алгебры. — М.: Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит., 1983. — 336 с.

[8] *Василенко Н.М.* Фібоначчієві подання дійсних чисел // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки. — 9. — К.: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2006. — С. 190-203.

[9] *Василенко Н.М.* Деякі метричні співвідношення, породжені Ф-зображенням дійсних чисел // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки. — 7. — К.: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2006. — С. 190-203.

[10] *Воеводин В.В.* Линейная алгебра. — М.: Наука, 1980. — 400 с.

[11] *Волков Ю.І., Войналович Н.М.* Елементи дискретної математики: Навчальний посібник. — Кіровоград: РВГ ІЦ КДПУ ім. В.Винниченка, 2000. — 190 с.

[12] *Воробьев Н.Н.* Числа Фибоначчи. — М.: Наука, 1969. — 112 с.

[13] *Гельфанд И. М.* Лекции по линейной алгебре: Учебное пособие для студентов вузов; 4-е издание, дополненное. — М.: Наука, Глав. ред. физ.-мат. лит., 1971. — 271 с.

[14] *Карвацький Д. М., Василенко Н. М.* Математичні структури у просторах узагальнених послідовностей Фібоначчі // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки. — 13(1). — К.: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2012. — С. 118-128.

[15] *Працьовитий М.В.* Фрактальний підхід у дослідженні сингулярних розподілів. — К.: Вид-во НПУ імені М.П.Драгоманова, 1998. — 196с.

[16] *Романко В.К.* Разностные уравнения. — М.: БИНОМ, 2006. — 112 с.