

УДК 511.72+517

Перетворення і функції, які зберігають середнє значення цифр трійкового зображення числа

М. В. Працьовитий^{1,2}, С. О. Климчук², О. П. Макаrchук²
(¹Національний педагогічний університет імені М.П.Драгоманова,
²Інститут математики НАН України)

АНОТАЦІЯ. У роботі вивчаються перетворення піввідрїзка $[0; 1)$ і функції, які зберігають середнє значення r цифр трійкового зображення чисел:

$$r(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \alpha_i(x), \text{ де } x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i}{3^i}, \alpha_i \in \{0, 1, 2\}.$$

З'ясовується їх зв'язок з перетвореннями і функціями, які зберігають частоти цифр та фрактальну розмірність Хаусдорфа-Безиковича.

Ключові слова: s -кове зображення дійсного числа; частота цифри; середнє значення цифр; функція, яка зберігає середнє значення цифр; перетворення, яке зберігає частоти цифр.

АБСТРАКТ. We study transformations of interval $[0; 1)$ and functions preserving asymptotic mean r of digits in ternary representation of numbers:

$$r(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \alpha_i(x), \text{ where } x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_i}{3^i}, \alpha_i \in \{0, 1, 2\}.$$

We establish its connection with function preserving digits frequencies and Hausdorff-Besicovitch fractal dimension.

Keywords: s -adic representation of real number; frequency of digits; asymptotic mean of digits; functions that preserve asymptotic mean of digits; transformations that preserve frequency of digits.

ВСТУП

Розглядаючи дробову частину дійсного числа, тобто точки піввідрїзка $[0; 1)$, далі ми обмежуємось числами $x \in [0; 1)$ і без потреби не будемо нагадувати про це.

Нехай $2 \leq s$ — фіксоване натуральне число, $\mathcal{A}_s \equiv \{0, 1, \dots, s-1\}$ — алфавіт s -кової системи числення, $L \equiv \mathcal{A}_s \times \mathcal{A}_s \times \dots \times \mathcal{A}_s \dots$ — простір послідовностей s -кових цифр. Добре відомо, що для довільного дійсного числа $x \in [0; 1]$ існує послідовність (α_k) така, що $(\alpha_k) \in L$ і

$$x = \frac{\alpha_1}{s} + \frac{\alpha_2}{s^2} + \dots + \frac{\alpha_k}{s^k} + \dots \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots}^s.$$

Останній символічний запис називається s -ковим зображенням числа x , а $\alpha_k = \alpha_k(x)$ — його k -тою s -ковою цифрою. Взагалі кажучи, k -та цифра числа x є некоректно визначеною функцією від x , оскільки має місце рівність

$$\Delta_{c_1 \dots c_{k-1} c_k}^s(0) = \Delta_{c_1 \dots c_{k-1} [c_k-1] (s-1)}^s,$$

де (i) — період у зображенні числа. Числа такого виду називаються s -ково-раціональними, вони мають рівно два s -кових зображення і утворюють підмножину множини раціональних чисел. Решта чисел мають лише одне зображення і називаються s -ково-ірраціональними. Для коректності означення k -тої цифри числа досить домовитись використовувати лише перше s -кове зображення, а саме: те, що має період (0) . Тепер $\alpha_k(x)$ є функцією, коректно визначеною на $[0; 1]$.

Нагадаємо, що частотою цифри $i \in \mathcal{A}_s$ у s -ковому зображенні $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots}^s$ числа x називається границя (якщо вона існує):

$$\nu_i(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} v_i^{(n)},$$

де $v_i^{(n)} = n^{-1} N_i(x, n)$ — відносна частота цифри i , $N_i(x, n) = \#\{j : \alpha_j(x) = i, j \leq n\}$ — кількість цифр i у s -ковому зображенні числа x до k -го місця включно.

Поняття частоти цифр у s -ковому зображенні числа x , введене Е. Борелем на початку ХХ століття [3], виявилось достатньо продуктивним. Воно ефективно використовувалось у різних цілях, зокрема 1) для задання різних математичних об'єктів (множин, функцій, мір, перетворень простору тощо); 2) при розв'язанні ряду метричних та ймовірнісних проблем (доведення нормальних та аномальних властивостей чисел, сингулярності функцій та розподілів ймовірностей тощо); 3) у ергодичній теорії та фрактальному аналізі. Зокрема, для задання самоподібних, але не досконалих множин *Безиковича–Егглстона*:

$$E[\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{s-1}] = \{x : x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots}^s, \nu_i(x) = \tau_i \geq 0, i = \overline{0, s-1}\}.$$

Всі множини *Безиковича–Егглстона* є нуль-множинами Лебега, за виключенням множини

$$H_s = \{x : x = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots}^s, \nu_i(x) = s^{-1}, i = \overline{0, s-1}\},$$

нормальних за основою s чисел, яка є, як стверджує відома теорема Бореля [3], множиною повної міри Лебега.

Фрактальна розмірність Хаусдорфа–Безиковича множини $E[\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{s-1}]$ обчислюється [2, 4, 8] за формулою

$$\alpha_0(E[\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{s-1}]) = -\frac{\ln \tau_0^{\tau_0} \tau_1^{\tau_1} \dots \tau_{s-1}^{\tau_{s-1}}}{\ln s}.$$

Середнім значенням цифр s -кового зображення $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots}^s$ дійсного числа

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{s^k} \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots}^s, \quad \alpha_k \in \mathcal{A}_s$$

називається границя (якщо вона існує):

$$r(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \alpha_k(x).$$

Це поняття було введено нами у роботі [11] і використане для задання і вивчення тополого–метричних властивостей фрактальних множин [12]–[14]. Воно тісно пов'язане з частотами цифр, оскільки у випадку існування частот усіх цифр є їх певним усередненим значенням. А саме: якщо s -кове зображення числа x має частоти всіх цифр $\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_{s-1}$, то воно має середнє значення цифр $r(x)$, причому

$$r(x) = \nu_1(x) + 2\nu_2(x) + \dots + (s-1)\nu_{s-1}(x).$$

Як виявилось, без вживання самого терміну це поняття фігурувало уже у роботах [2, 4, 5, 6].

У даній роботі ми вводимо і вивчаємо функції, що є інваріантами середнього значення цифр трійкового ($s = 3$) зображення числа скрізь та майже скрізь (у розумінні міри Лебега) на піввідрізку $[0; 1)$, а також функції, які зберігають частоти цифр.

1. ПЕРЕТВОРЕННЯ $[0; 1)$ І ФУНКЦІЇ, ЯКІ ЗБЕРІГАЮТЬ ЧАСТОТИ ЦИФР

Нехай Θ — множина чисел, для яких існують частоти $\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_{s-1}$ всіх цифр.

Нагадаємо, що *перетворенням* непорожньої множини X називається бієктивне (взаємно однозначне) відображення цієї множини на себе.

Означення 1. Казатимемо, що *перетворення* f піввідрізка $[0; 1)$ зберігає частоти цифр, якщо рівність

$$\nu_i(f(x)) = \nu_i(x),$$

виконується для кожного $i \in \mathcal{A}_s$ і всіх $x \in \Theta$, а для $x \in [0; 1) \setminus \Theta$ одночасно не існують $\nu_i(x)$ і $\nu_i(f(x))$.

Тривіальним прикладом функції, яка зберігає частоти цифр є тотожне перетворення. Цією ж властивістю володіє функція f , визначена на $[0; 1)$ рівністю

$$f(x) = \Delta_{\alpha_2(x)\alpha_1(x)\alpha_4(x)\alpha_3(x)\dots}^s = y,$$

оскільки для будь-якого натурального k

$$N_i(y, 2k) = N_i(x, 2k),$$

$$N_i(y, 2k + 1) = N_i(y, 2k) + b, \text{ де } b \in \{0, 1\}.$$

Простим прикладом перетворення, яке не зберігає частоти цифр, є

$$g(\Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\dots\alpha_n(x)\dots}^3) = \Delta_{\beta_1(x)\beta_2(x)\dots\beta_n(x)\dots}^3,$$

де $\beta_i(x) = \alpha_i(x) + 1 \pmod{3}$, при цьому $g(\Delta_{(1)}^3) \equiv \Delta_{(0)}^3$. Справді, для $x_0 = \Delta_{(0)}^3$, $g(\Delta_{(0)}^3) \equiv \Delta_{(1)}^3$, тобто $1 = \nu_0(x_0) \neq \nu_0(g(x_0)) = 0$.

Лема 1. Множина V всіх перетворень піввідрезка $[0; 1)$, які зберігають частоти всіх s -кових цифр числа відносно операції композиція \circ (суперпозиція) перетворень, утворює некомутативну групу.

Доведення. Добре відомо, що сім'я всіх перетворень довільної множини (в тому числі і $[0; 1)$) відносно операції \circ :

$$[f_2 \circ f_1](x) = f_2(f_1(x))$$

утворює групу. Для доведення леми скористаємось критерієм підгрупи.

Нехай $f_1, f_2 \in V$, тобто $\nu_i(f_j(x)) = \nu_i(x)$, $j \in \{1, 2\}$ і $f_1(x) = x'$, $f_2(x) = x''$. Замкненість множини V відносно операції \circ випливає з рівностей

$$\nu_i(f_2(f_1(x))) = \nu_i(f_2(x')) = \nu_i(x') = \nu_i(f_1(x)) = \nu_i(x).$$

Покажемо, що для кожного перетворення $f \in V$ обернене перетворення f^{-1} теж належить V . Справді, з $f \in V$ маємо $\nu_i(f(x)) = \nu_i(x)$. Якщо $y = f(x)$, то $x = f^{-1}(y)$ і

$$\nu_i(y) = \nu_i(f(x)) = \nu_i(x) = \nu_i(f^{-1}(y)).$$

Отже, $f^{-1} \in V$.

Група (V, \circ) не комутативна, оскільки для перетворень $[0; 1)$

$$f_1(x) = \Delta_{\alpha_2(x)\alpha_1(x)\alpha_4(x)\alpha_3(x)\dots\alpha_{2k}\alpha_{2k-1}\dots}^s,$$

$$f_2(x) = \Delta_{\alpha_3(x)\alpha_2(x)\alpha_1(x)\alpha_4(x)\dots\alpha_{2k+1}\alpha_{2k}\alpha_{2k-1}\dots}^s$$

маємо, $[f_2 \circ f_1](x) = \Delta_{\alpha_4(x)\alpha_1(x)\alpha_2(x)\alpha_3(x)\dots}^s$ і $[f_1 \circ f_2](x) = \Delta_{\alpha_2(x)\alpha_1(x)\alpha_4(x)\alpha_1(x)\dots}^s$, а отже, $f_2 \circ f_1 \neq f_1 \circ f_2$. \square

Означення 2. Якщо для функції f , визначеної на півінтервалі $[0; 1)$ з множиною значень в $[0; 1)$ виконуються умови означення 1, то казатимемо, що *функція f зберігає частоти цифр*.

Зауважимо, що кожне перетворення $[0; 1)$ є функцією, але не кожна функція, визначена на $[0; 1)$ є перетворенням. Простими прикладами функцій, які зберігають частоти цифр і не є перетвореннями, є наступні, визначені на $[0; 1)$ функції:

$$\omega(\Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots}^s) \equiv \Delta_{\alpha_2\alpha_3\dots\alpha_n\dots}^s,$$

$$\delta_i(\Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots}^s) \equiv \Delta_{i\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots}^s,$$

де i — фіксований елемент алфавіту \mathcal{A}_s ,

$$f(\Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_j\dots}^s) = \Delta_{\alpha_1\dots\alpha_{j-1}\alpha_{j+1}\alpha_j\alpha_{j+2}\dots}^s,$$

де j — наперед задане натуральне число.

2. Зв'язок з функціями, що зберігають фрактальну розмірність

Фрактальна геометрія з групової точки зору є теорією інваріантів групи перетворень простору R_n , які зберігають фрактальну розмірність, тобто таких перетворень, для яких рівні фрактальні розмірності образу і прообразу кожної борелівської множини [1, 15].

Теорема 1. *Існують функції, які зберігають частоти цифр і не зберігають фрактальну розмірність Хаусдорфа–Безиковича.*

Доведення. Множина Θ є об'єднанням всеможливих множин Безиковича–Егглстона. Функцію f для всіх $x \in [0; 1)$ означимо рівністю

$$f(x) = \begin{cases} \Delta_{\underbrace{0\dots 0}_{[\tau_0 \cdot 1]} \underbrace{1\dots 1}_{[\tau_1 \cdot 1]} \underbrace{2\dots 2}_{[\tau_2 \cdot 1]} \dots \underbrace{0\dots 0}_{[\tau_0 \cdot n]} \underbrace{1\dots 1}_{[\tau_1 \cdot n]} \underbrace{2\dots 2}_{[\tau_2 \cdot n]}}^3 \equiv x', & \text{якщо } x \in \Theta, \\ x, & \text{якщо } x \notin \Theta, \end{cases}$$

де $\tau_0 = \nu_0(x)$, $\tau_1 = \nu_1(x)$, $\tau_2 = \nu_2(x)$.

Зрозуміло, що x' залежить від частот цифр числа x , тобто $x' = g(\nu_0(x), \nu_1(x), \nu_2(x))$ і функція f не є перетворенням $[0; 1)$, оскільки $f(\Delta_{i\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots}^3) = f(\Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots}^3)$. Більше того, образом множини Безиковича–Егглстона $E[\tau_0, \tau_1, \tau_2]$ при відображенні f є одна єдина точка x' .

Покажемо, що $\nu_i(x') = \nu_i(x)$, якщо $x \in E[\tau_0, \tau_1, \tau_2]$. Для кожного достатньо великого натурального n існує $k_n \in N$ таке, що

$$\sum_{j=1}^{k_n} j = \frac{k_n(k_n + 1)}{2} \leq n < \frac{(k_n + 1)(k_n + 2)}{2} = \sum_{j=1}^{k_n+1} j.$$

Оскільки $z - 1 < [z] \leq z$ для всіх $z \in R$, то

$$\sum_{j=1}^{k_n} ([\tau_0 j] + [\tau_1 j] + [\tau_2 j]) \leq \sum_{j=1}^{k_n} (\tau_0 + \tau_1 + \tau_2) j = \frac{k_n(k_n + 1)}{2} \leq n,$$

$$\sum_{j=1}^{k_n+2} ([\tau_0 j] + [\tau_1 j] + [\tau_2 j]) > \sum_{j=1}^{k_n+2} ((\tau_0 + \tau_1 + \tau_2)j - 1) = \frac{(k_n + 2)(k_n + 3)}{2} - (k_n + 2) > n.$$

Для кожного $i \in \{0, 1, 2\}$ маємо

$$\frac{N_i(x', n)}{n} \geq \frac{\sum_{j=1}^{k_n} [\tau_i \cdot j]}{n} > \frac{\sum_{j=1}^{k_n} (\tau_i \cdot j - 1)}{(k_n + 1)(k_n + 2)} = \frac{\tau_i \frac{k_n(k_n + 1)}{2} - k_n}{\frac{(k_n + 1)(k_n + 2)}{2}} \rightarrow \tau_i (n \rightarrow \infty).$$

З іншого боку,

$$\frac{N_i(x', n)}{n} < \frac{\sum_{j=1}^{k_n+2} [\tau_i \cdot j]}{n} < \frac{\sum_{j=1}^{k_n+2} \tau_i \cdot j}{k_n(k_n + 1)} = \frac{\tau_i \frac{(k_n + 2)(k_n + 3)}{2}}{k_n(k_n + 1)} \rightarrow \tau_i (n \rightarrow \infty).$$

Отже, $\nu_i(x') = \tau_i$ для всіх $i \in \{0, 1, 2\}$, тобто функція $f(x)$ зберігає частоти цифр, але якщо $\tau_0 \tau_1 \tau_2 \neq 0$, то враховуючи формулу Безиковича–Егглстона, $\alpha_0(E[\tau_0, \tau_1, \tau_2]) = -\frac{\ln \tau_0^{\tau_0} \tau_1^{\tau_1} \tau_2^{\tau_2}}{\ln 3} \neq 0$, а з іншого боку, $\alpha_0(\{f(x) : x \in E[\tau_0, \tau_1, \tau_2]\}) = \alpha_0(x') = 0$, тобто

$$\alpha_0(E[\tau_0, \tau_1, \tau_2]) \neq \alpha_0(f(E[\tau_0, \tau_1, \tau_2])).$$

□

Залишається нез'ясованим, чи існують *неперервні* функції, які зберігають частоти, але не зберігають розмірності Хаусдорфа–Безиковича.

3. ПЕРЕТВОРЕННЯ $[0; 1)$ І ФУНКЦІЇ, ЯКІ ЗБЕРІГАЮТЬ СЕРЕДНЄ ЗНАЧЕННЯ ЦИФР І НЕ ЗБЕРІГАЮТЬ ЧАСТОТИ ЦИФР

Означення 3. Казатимемо, що функція f зберігає середнє значення цифр, якщо рівність

$$r(f(x)) = r(x)$$

виконується для всіх $x \in [0; 1)$, для яких $r(x)$ існує.

Означення 4. Кажемо, функція f зберігає середнє значення цифр майже скрізь (у розумінні міри Лебега), якщо рівність

$$r(f(x)) = r(x)$$

виконується на множині повної міри Лебега.

Оскільки $r(x) = \nu_1(x) + 2\nu_2(x)$, то очевидно, що перетворення $[0; 1)$ і функції, які зберігають частоти цифр, зберігають також середнє значення цифр майже скрізь.

Не важко навести приклад функції, яка не зберігає середнє значення цифр. Зокрема, такою є функція, визначена рівністю

$$I(\Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}^s) \equiv \Delta_{[s-1-\alpha_1][s-1-\alpha_2]\dots[s-1-\alpha_n]\dots}^s,$$

оскільки $I(\Delta_{(0)}^3) = \Delta_{(2)}^3$ і $2 = r(I(x)) \neq r(x) = 0$. Функцію I називають *інверсором цифр s -кового зображення числа*.

Лема 2. *Для трійкової системи числення:*

$$\text{якщо } r(x) = 0, \text{ то } \nu_0(x) = 1 \text{ і } \nu_1(x) = \nu_2(x) = 0;$$

$$\text{якщо } r(x) = 2, \text{ то } \nu_2(x) = 1 \text{ і } \nu_0(x) = \nu_1(x) = 0.$$

Доведення. Нехай $r(x) = 0$, тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$. Оскільки

$$r_n(x) = v_1^{(n)}(x) + 2v_2^{(n)}(x) \geq v_i^{(n)}(x) \geq 0,$$

для обох $i \in \{1, 2\}$, то з $r(x) = 0$ випливає, що $\nu_1(x) = \nu_2(x) = 0$, отже, $\nu_0(x) = 1$.

Нехай тепер $r_n(x) = 2$, тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 2$. Оскільки

$$r_n(x) = v_1^{(n)}(x) + 2v_2^{(n)}(x) = 1 - v_0^{(n)}(x) + v_2^{(n)}(x),$$

то $1 \geq v_2^{(n)}(x) = r_n - 1 + v_0^{(n)}(x) \geq r_n - 1$. Оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 2$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} v_2^{(n)}(x) = 1$.

Таким чином, $0 \leq v_i^{(n)}(x) = 1 - v_2^{(n)}(x) - v_{1-i}^{(n)}(x) \leq 1 - v_2^{(n)}(x)$, де $i \in \{0, 1\}$. Але $\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - v_2^{(n)}(x) = 0$, тому $\lim_{n \rightarrow \infty} v_i^{(n)}(x) = 0$, $i \in \{0, 1\}$. \square

Теорема 2. *Якщо функція $g : [0; 1) \rightarrow [0; 1)$ зберігає середнє значення трійкових цифр чисел з множини Θ , то вона зберігає частоти всіх цифр на об'єднанні двох множин Безиковича–Егглстона $E[0, 0, 1] \cup E[1, 0, 0]$.*

Доведення. Нехай $x \in E[0, 0, 1]$, тоді $r(g(x)) = r(x) = 2$. Тому згідно з лемою 2 число $y = g(x)$ належить множині $E[0, 0, 1]$, а це означає, що нерівність (1) не виконується.

Аналогічно, якщо $x \in E[1, 0, 0]$, то має місце включення $g(x) \in E[1, 0, 0]$. \square

4. ЗБЕРЕЖЕННЯ СЕРЕДНЬОГО ЗНАЧЕННЯ І ЧАСТОТ ЦИФР МАЙЖЕ СКРІЗЬ

Природним є питання про існування функції f , яка зберігає середнє значення цифр числа і не зберігає частот цифр *майже скрізь* (у розумінні міри Лебега) на множині Θ , а отже, і на множині H нормальних чисел. Наведемо приклад такої функції.

Означимо функцію f в точці $x = \Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}^3$ рівністю

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \in [0; 1) \setminus H, \\ \Delta_{\beta_1\beta_2\dots\beta_n}^3, & \text{якщо } x \in H, \end{cases}$$

при цьому $\beta_n = \alpha_n$, коли $\alpha_n \neq 1$, а для послідовності n_k , такої, що $\alpha_{n_k} = 1$

$$\beta_{n_k} = \begin{cases} 0 & \text{при } n_k = 0 \pmod{7}, \\ 2 & \text{при } n_k = 1 \pmod{7}, \\ \alpha_{n_k} & \text{в решті випадків.} \end{cases}$$

Тобто, зображення функції $f(x)$ в нормальній точці отримуємо як результат заміни кожної сьомої трійкової цифри «1» числа на цифру «0» і наступної цифри «1» на цифру «2».

Лема 3. Потужність множини $\{1, 2, \dots, n\} \cap \{7k : k \in N\}$ дорівнює $\left\lfloor \frac{n}{7} \right\rfloor$, потужність множини $\{1, 2, \dots, n\} \cap \{7k + 1 : k \in N\}$ дорівнює $\left\lfloor \frac{n-1}{7} \right\rfloor$.

Доведення. Нехай $k \in N$ таке, що $7k \leq n < 7(k+1)$. Звідси $k \leq \frac{n}{7} < (k+1)$, отже, $\left\lfloor \frac{n}{7} \right\rfloor = k$. Нехай $k \in N$ таке, що $7k+1 \leq n < 7(k+1)+1$. Звідси $k \leq \frac{n-1}{7} < (k+1)$, отже, $\left\lfloor \frac{n-1}{7} \right\rfloor = k$. \square

Теорема 3. Якщо $x \in H$, то для вище означеної функції f мають місце рівності $\nu_0(f(x)) = \frac{8}{21}$, $\nu_1(f(x)) = \frac{8}{21}$ і $\nu_2(f(x)) = \frac{5}{21}$.

Доведення. Нехай k — достатньо велике натуральне число, $\varphi(k) \in N$ таке, що

$$n_{\varphi(k)} \leq k < n_{\varphi(k)+1}.$$

Оскільки $\nu_1(x) = \frac{1}{3}$, то $\frac{1}{3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N(x, n_k)}{n_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{n_k}$ і враховуючи лему 3, маємо

$$\frac{N_1(f(x), k)}{k} = \frac{\varphi(k) - \left\lfloor \frac{\varphi(k)}{7} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{\varphi(k)-1}{7} \right\rfloor}{k} \geq \frac{\varphi(k) - \frac{\varphi(k)}{7} - \frac{\varphi(k)-1}{7} + 2}{n_{\varphi(k)+1}} \rightarrow \frac{1}{3} - \frac{1}{21} - \frac{1}{21} = \frac{5}{21}$$

при $k \rightarrow \infty$.

$$\frac{N_1(f(x), k)}{k} = \frac{\varphi(k) - \left\lfloor \frac{\varphi(k)}{7} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{\varphi(k)-1}{7} \right\rfloor}{k} \leq \frac{\varphi(k) - \frac{\varphi(k)}{7} - \frac{\varphi(k)-1}{7}}{n_{\varphi(k)}} \rightarrow \frac{5}{21} \text{ при } k \rightarrow \infty.$$

Отже, $\nu_1(f(x)) = \frac{5}{21}$.

Нехай $N_0(x, k)$ — кількість цифр «0» в наборі $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$. Оскільки $\nu_0 = \frac{1}{3}$, то

$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{N_0(x, k)}{k} = \frac{1}{3}$ і враховуючи лему 3, маємо

$$\frac{N_0(f(x), k)}{k} = \frac{N_0(x, k) + \left\lfloor \frac{\varphi(k)}{7} \right\rfloor}{k} \geq \frac{N_0(x, k)}{k} + \frac{\frac{\varphi(k)}{7} - 1}{n_{\varphi(k)+1}} \rightarrow \frac{1}{3} + \frac{1}{21} = \frac{8}{21} \text{ при } k \rightarrow \infty.$$

$$\frac{N_0(f(x), k)}{k} = \frac{N_0(x, k) + \left\lceil \frac{\varphi(k)}{7} \right\rceil}{k} \leq \frac{N_0(x, k)}{k} + \frac{\frac{\varphi(k)}{7}}{n_{\varphi(k)}} \rightarrow \frac{1}{3} + \frac{1}{21} = \frac{8}{21} \text{ при } k \rightarrow \infty.$$

Отже, $\nu_0(f(x)) = \frac{8}{21}$. Оскільки $\nu_0(f(x)) + \nu_1(f(x)) + \nu_2(f(x)) = 1$, то $\nu_2(f(x)) = 1 - \frac{5}{21} - \frac{8}{21} = \frac{8}{21}$. □

Якщо $x \in H$, то $r(x) = \frac{1}{3} + 2\frac{1}{3} = 1$, тоді за теоремою 3, $r(f(x)) = \frac{5}{21} + 2\frac{8}{21} = 1$.

Отже, для будь-якого нормального за основою 3 числа x виконується рівність $r(x) = r(f(x))$, тобто функція f зберігає середнє значення цифр числа майже скрізь.

Лема 4. Множина функцій, які зберігають середнє значення цифр майже скрізь є гіперконтинуальною.

Доведення. Функція g зберігає середнє значення трійкових цифр майже скрізь на множині Θ тоді і тільки тоді, коли

$$\lambda(\{g(x) : x \in H\} \cap H) = 1.$$

Для будь-якого $x \in H$ поставимо у відповідність $y \in H$. Тоді $r(x) = r(y) = 1$. Тому множина функцій $f : H \rightarrow H$, які зберігають середнє значення цифр майже скрізь має потужність гіперконтинуум. Оскільки множина всіх функцій $z : [0; 1) \rightarrow [0; 1)$ є гіперконтинуальною, то множина функцій $f : [0; 1) \rightarrow [0; 1)$, які зберігають середнє значення цифр майже скрізь також має потужність гіперконтинуум. □

5. ЗБЕРЕЖЕННЯ ФУНКЦІЄЮ СЕРЕДНЬОГО ЗНАЧЕННЯ, КОЛИ ЧАСТОТИ ЦИФР НЕ ІСНУЮТЬ

Побудуємо приклад функції $f(x)$, яка зберігає середнє значення трійкових цифр числа, тобто $r(x) = r(f(x))$ для будь-якого $x \in H$, але частоти $\nu_i(f(x))$ не існують для всіх $i \in \{0, 1, 2\}$.

Розглянемо послідовність (β_n) , таку що $\beta_n = \underbrace{\Delta^3 0 \dots 0}_{1!} \underbrace{1 \dots 1}_{2!} \dots \underbrace{0 \dots 0}_{(2n-1)!} \underbrace{1 \dots 1}_{2n!} \dots$

$$\text{Нехай } f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \in [0; 1) \setminus H, \\ \Delta^3 \underbrace{0 \dots 0}_{[\tau_{01} 1^x]} \underbrace{1 \dots 1}_{[\tau_{11} 1^x]} \underbrace{2 \dots 2}_{[\tau_{21} 1^x]} \dots \underbrace{0 \dots 0}_{[\tau_{0n} n^x]} \underbrace{1 \dots 1}_{[\tau_{1n} n^x]} \underbrace{2 \dots 2}_{[\tau_{2n} n^x]}, & \text{якщо } x \in H, \end{cases} \text{ де}$$

$$(\tau_{0n}; \tau_{1n}; \tau_{2n}) = \begin{cases} (0, 4; 0, 2; 0, 4), & \text{якщо } \beta_n = 0, \\ (0, 3; 0, 4; 0, 3), & \text{якщо } \beta_n = 1. \end{cases}$$

Лема 5. Для будь-якого $\alpha > 0$ виконуються рівності

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{1+\alpha}}{1^{1+\alpha} + 2^{1+\alpha} + \dots + n^{1+\alpha}} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{2+\alpha}}{1^{1+\alpha} + 2^{1+\alpha} + \dots + n^{1+\alpha}} = 2 + \alpha.$$

Доведення. Нехай $s_n = \sum_{i=1}^n i^{\alpha+1}$, тоді за теоремою Лагранжа

$$(n+1)^{2+\alpha} - n^{2+\alpha} = z_n^{1+\alpha}(2+\alpha), \text{ де } z_n \in [n; n+1], \text{ тому}$$

$$\frac{(n+1)^{2+\alpha} - n^{2+\alpha}}{n^{1+\alpha}} = (2+\alpha) \left(\frac{z_n}{n}\right)^{1+\alpha} \rightarrow 2+\alpha.$$

Зрозуміло, що $\frac{(n+1)^{1+\alpha} - n^{1+\alpha}}{s_n - s_{n-1}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1+\alpha} - 1 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, тому за теоремою Штольца $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{1+\alpha}}{s_n} = 0$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{2+\alpha}}{s_n} = 0$. \square

Лема 6. Середнє значення $r(f(x))$ цифр числа $f(x)$ дорівнює 1 для всіх $x \in H$.

Доведення. Для кожного $n \in N$ існує натуральне число $k_n \in N$ таке, що

$$\sum_{j=1}^{k_n} \sum_{i=0}^2 [\tau_{ij} j^{x+1}] \leq n < \sum_{j=1}^{k_n+1} \sum_{i=0}^2 [\tau_{ij} j^{x+1}].$$

Тоді при $n \rightarrow \infty$ маємо

$$r_n(f(x)) > \frac{\sum_{j=1}^{k_n} ([\tau_{1j} j^{x+1}] + 2[\tau_{2j} j^{x+1}])}{\sum_{j=1}^{k_n+1} \sum_{i=0}^2 [\tau_{ij} j^{x+1}]} > \frac{\sum_{j=1}^{k_n} (\tau_{1j} + 2\tau_{2j}) j^{x+1} - 3k_n}{\sum_{j=1}^{k_n+1} (\tau_{0j} + \tau_{1j} + \tau_{2j}) j^{x+1}} = \frac{\sum_{j=1}^{k_n} j^{x+1} - 3k_n}{\sum_{j=1}^{k_n+1} j^{x+1}} =$$

$$= 1 - \frac{(k_n+1)^{x+1}}{\sum_{j=1}^{k_n+1} j^{x+1}} - \frac{3k_n}{\sum_{j=1}^{k_n+1} j^{x+1}} \rightarrow 1,$$

оскільки $\frac{k_n}{\sum_{j=1}^{k_n+1} j^{x+1}} < \frac{k_n}{(k_n+1)^{x+1}} \rightarrow 0$, і $\frac{(k_n+1)^{x+1}}{\sum_{j=1}^{k_n+1} j^{x+1}} = \left(1 + \frac{1}{k_n}\right)^{x+1} \cdot \frac{k_n^{x+1}}{\sum_{j=1}^{k_n+1} j^{x+1}} \rightarrow 0$.

$$r_n(f(x)) < \frac{\sum_{j=1}^{k_n+1} ([\tau_{1j} j^{x+1}] + 2[\tau_{2j} j^{x+1}])}{\sum_{j=1}^{k_n} \sum_{i=0}^2 [\tau_{ij} j^{x+1}]} < \frac{\sum_{j=1}^{k_n+1} (\tau_{1j} + 2\tau_{2j}) j^{x+1}}{\sum_{j=1}^{k_n} (\tau_{0j} + \tau_{1j} + \tau_{2j}) j^{x+1} - k_n} =$$

$$= \frac{\sum_{j=1}^{k_n+1} j^{x+1}}{\sum_{j=1}^{k_n} j^{x+1} - k_n} = \frac{1 + \frac{(k_n+1)^{x+1}}{\sum_{j=1}^{k_n} j^{x+1}}}{1 - \frac{k_n}{\sum_{j=1}^{k_n} j^{x+1}}} \rightarrow 1.$$

Отже, $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(f(x)) = 1$. \square

Лема 7. Для будь-якого числа $x \in \mathbb{N}$ відповідне значення функції $f(x)$ не має частоти $\nu_i(f(x))$, $i \in \{0, 1, 2\}$, всіх трійкових цифр.

Доведення. Оскільки при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{\sum_{k=1}^{n+1} (2k-1)! - \sum_{k=1}^n (2k-1)!}{\sum_{k=1}^{2n+1} k! - \sum_{k=1}^{2n-1} k!} = \frac{(2n+1)!}{(2n+1)! + (2n)!} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2n+1}} \rightarrow 1,$$

то за теоремою Штольца $\frac{1! + 3! + \dots + (2n-1)!}{1! + 2! + \dots + (2n-1)!} \rightarrow 1$, тому $\frac{2! + \dots + (2n-2)!}{1! + \dots + (2n-1)!} \rightarrow 0$.

Враховуючи, що
$$\frac{\sum_{k=1}^{n+1} (2k-1)! - \sum_{k=1}^n (2k-1)!}{\sum_{k=1}^{2n+2} k! - \sum_{k=1}^{2n} k!} = \frac{(2n+1)!}{(2n+2)! + (2n+1)!} = \frac{1}{2n+3} \rightarrow 0,$$

коли $n \rightarrow \infty$, то $\frac{1! + 3! + \dots + (2n-1)!}{1! + 2! + \dots + (2n)!} \rightarrow 0$, тому $\frac{2! + \dots + (2n)!}{1! + \dots + (2n)!} \rightarrow 1$.

Нехай

$$k_n = 1! + 2! + \dots + (2n-1)!,$$

$$l_n = \sum_{j=1}^{k_n} [\tau_{0j} j^x] + [\tau_{1j} j^x] + [\tau_{2j} j^x],$$

тоді при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{N_0(f(x), l_n)}{l_n} = \frac{\sum_{j=1}^{k_n} [\tau_{0j} j^{x+1}]}{l_n} > \frac{\sum_{j=1}^{k_n} \tau_{0j} j^{x+1} - 3k_n}{\sum_{j=1}^{k_n} j^{x+1}}. \quad (\text{Зрозуміло, що } \frac{k_n}{\sum_{j=1}^{k_n} j^{x+1}} \rightarrow 0).$$

$$\sum_{j=1}^{k_n} \tau_{0j} j^{x+1} = 0, 4 \sum_{j=1}^{h_n} b_j^{x+1} + 0, 3 \sum_{j=1}^{s_n} l_j^{x+1},$$

де

$$\sum_{j=1}^{h_n} b_j^{x+1} + \sum_{j=1}^{s_n} l_j^{x+1} = \sum_{j=1}^{k_n} j^{x+1},$$

$$h_n = 1! + 3! + \dots + (2n-1)!,$$

$$s_n = 2! + 4! + \dots + (2n-2)!.$$

Маємо
$$\frac{\sum_{j=1}^{s_n} l_j^{x+1}}{\sum_{j=1}^{k_n} j^{x+1}} < \frac{s_n \cdot k_n^{x+1}}{\sum_{j=1}^{k_n} j^{x+1}} = \frac{s_n}{k_n} \cdot \frac{k_n^{x+2}}{\sum_{j=1}^{k_n} j^{x+1}} \rightarrow 0 \cdot (2+x) = 0.$$

Тому
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=1}^{s_n} l_j^{x+1}}{\sum_{j=1}^{k_n} j^{x+1}} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=1}^{h_n} b_j^{x+1}}{\sum_{j=1}^{k_n} j^{x+1}} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=1}^{k_n} \tau_{0j} j^{x+1} - 3k_n}{\sum_{j=1}^{k_n} j^{x+1}} = 0, 4.$$

З іншого боку,

$$\frac{N_0(f(x), l_n)}{l_n} < \frac{\sum_{j=1}^{k_n} \tau_{0j} j^{x+1}}{\sum_{j=1}^{k_n} j^{x+1} + k_n} = \frac{\frac{\sum_{j=1}^{k_n} \tau_{0j} j^{x+1}}{\sum_{j=1}^{k_n} j^{x+1}}}{1 + \frac{k_n}{\sum_{j=1}^{k_n} j^{x+1}}} \rightarrow 0,4 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Отже, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_0(f(x), l_n)}{l_n} = 0,4$.

Нехай тепер

$$k_n^* = 1! + 2! + \dots + (2n)!,$$

$$l_n^* = \sum_{j=1}^{k_n^*} [\tau_{0j} j^x] + [\tau_{1j} j^x] + [\tau_{2j} j^x],$$

$$h_n^* = 1! + 3! + \dots + (2n-1)!,$$

$$s_n^* = 2! + 4! + \dots + (2n)!.$$

Маємо, $\sum_{j=1}^{k_n^*} \tau_{0j} j^{x+1} = 0,4 \sum_{j=1}^{h_n^*} b_j^{*x+1} + 0,3 \sum_{j=1}^{s_n^*} l_j^{*x+1}$, де $\sum_{j=1}^{h_n^*} b_j^{*x+1} + \sum_{j=1}^{s_n^*} l_j^{*x+1} = \sum_{j=1}^{k_n^*} j^{x+1}$.

Таким чином, $\frac{\sum_{j=1}^{h_n^*} b_j^{*x+1}}{\sum_{j=1}^{k_n^*} j^{x+1}} < \frac{h_n^*}{k_n^*} \cdot \frac{k_n^{*x+2}}{\sum_{j=1}^{k_n^*} j^{x+1}} \rightarrow 0 \cdot (x+2) = 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Отже, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=1}^{h_n^*} b_j^{*x+1}}{\sum_{j=1}^{k_n^*} j^{x+1}} = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=1}^{s_n^*} l_j^{*x+1}}{\sum_{j=1}^{k_n^*} j^{x+1}} = 1$.

$$\frac{N_0(f(x), l_n^*)}{l_n^*} > \frac{\sum_{j=1}^{k_n^*} \tau_{0j} j^{x+1} - k_n^*}{\sum_{j=1}^{k_n^*} j^{x+1}} \rightarrow 0,4 \cdot 0 + 0,3 \cdot 1 = 0,3 \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

$$\frac{N_0(f(x), l_n^*)}{l_n^*} < \frac{\sum_{j=1}^{k_n^*} \tau_{0j} j^{x+1}}{\sum_{j=1}^{k_n^*} j^{x+1} + k_n^*} \rightarrow 0,4 \cdot 0 + 0,3 \cdot 1 = 0,3 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Отже, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_0(f(x), l_n^*)}{l_n^*} = 0,3$ і частота $\nu_0(f(x))$ не існує.

Аналогічно можна показати, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_j(f(x), l_n)}{l_n} = \tau_{j1}$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_j(f(x), l_n^*)}{l_n^*} = \tau_{j2}$, а тому і $\nu_j(f(x))$ не існує, де $j \in \{1, 2\}$. \square

ЛІТЕРАТУРА

- [1] *Albeverio S., Pratsiovytyi M., Torbin G.* Fractal probability distributions and transformations preserving the Hausdorff-Besicovitch dimension // *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* — 2004, 24. — P. 1–16.
- [2] *Besicovitch A.S.* Sets of fractional dimension. 2: On the sum of digits of real numbers represented in the dyadic system // *Math. Ann.* — 1934. — 110, № 3. — p. 321-330.
- [3] *Borel É.* Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques // *Rend. Circ. Mat. Palermo.* — 1909. — 27. — P.247–271.
- [4] *Eggleston H.G.* Sets of fractional dimensions which occur in some problems of number theory // *Proc. London Math. Soc.* — 1951. — 54, P. 42–93.
- [5] *Hardy G. and Littlewood J.* Some problems on Diophantine approximations // *Acta Mathematica.* — 1914. — 37. — P. 155–190.
- [6] *Kennedy R.E., Cooper C.N.* An extension of a theorem by Cheo and Yien concerning digital sums // *Fibonacci Quart.* — 1991, 21 — P.145–149.
- [7] *Olsen L.* Normal and non-normal points of self-similar sets and divergence points of self-similar measures // *J. London Math. Soc.* — 2003. — 2(67), №1. — P. 103–122.
- [8] *Биллингслей П.* Эргодическая теория и информация. — М.: Мир, 1969. — 239 с.
- [9] *Постников А.Г.* Арифметическое моделирование случайных процессов // *Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР.* — 1960. — Т.57. — С. 3–84.
- [10] *Працьовитий М.В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: НПУ імені М.П.Драгоманова, 1998. — 296 с.
- [11] *Працьовитий М.В., Климчук С.О.* Середнє значення символів Q_s -зображення дробової частини дійсного числа і пов'язані з ним задачі фрактальної геометрії та фрактального аналізу // *Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки.* — Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2011, №12. — С. 186–195.
- [12] *Працьовитий М.В., Климчук С.О.* Лінійні фрактали типу Безиковича–Егглстона // *Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки.* — Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2012, №13(2). — С. 80–92.
- [13] *Працьовитий М.В., Климчук С.О.* Тополого-метричні і фрактальні властивості множини дійсних чисел з заданим середнім значенням цифр четвіркового зображення, коли їх частоти існують // *Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова,* 2013. — №14. — С. 217–226.
- [14] *Працьовитий М.В., Климчук С.О., Макаруч О.П.* Частота цифри у зображенні числа і його асимптотичне середнє значення цифр // *Укр. мат. журн.* — 2014, №3. — С. 302–310.
- [15] *Працьовитий М.В., Торбін Г.М.* Фрактальна геометрія та перетворення, що зберігають розмірність Хаусдорфа-Безиковича // *Динамічні системи: Праці Українського математичного конгресу.* — 2001. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2003. — С.94–102.
- [16] *Турбин А.Ф., Працьовитий Н.В.* Фрактальные множества, функции, распределения. — Киев: Наук.думка, 1992. — 208 с.