Красножон О.Б.
Бердянський державний педагогічний університет

Відшукання наближених розв'язків диференціальних рівнянь за методом Адамса і Рунге-Кутта з використанням програмного засобу Mathcad

Однією з передумов успішного розвитку економіки і підвищення ефективності промислового виробництва шляхом його інтенсифікації є розвиток та впровадження технологій, в основу яких покладено останні досягнення фундаментальних і прикладних наук. До основних факторів, які сприяють науково-технічному розвитку, реалізації комплексних і цільових програм із розв'язання найважливіших науково-технічних проблем, підвищення продуктивності праці, відносяться комп'ютеризація і автоматизація усіх сфер промислового та сільськогосподарського виробництва, широке і ефективне впровадження засобів інформаційно-комунікаційних технологій (ІКТ). Такі технології відносяться зокрема потужні математичні програмні засоби, використання яких забезпечує автоматизацію розв'язування широкого класу математичних задач прикладного характеру. Зокрема до таких програмних засобів відносяться потужний професійний пакет для математичних обчислень Mathcad.

Стрімкий розвиток обчислювальної техніки обумовлює розширення сфер застосування розділів сучасної математики. Кількісні математичні методи впроваджуються практично у всі сфери діяльності людини. Разом з тим використання обчислювальної техніки у виробництві та інших сферах господарювання потребує підготовки висококваліфікованих фахівців, які володіють методами обчислювальної математики.

Чисельні методи, обчислювальна математика, методи обчислень, обчислювальні практикуми на ПЕОМ відносять до основних дисциплін, необхідних для підготовки кваліфікованих фахівців з різних галузей господарювання. Мета вивчення циклу зазначених навчальних дисциплін полягає у забезпеченні засвоєння учнями та студентами теоретичних основ і формування в них навичок розв'язування різних прикладних задач із застосуванням математичних моделей і чисельних методів, які реалізуються на комп'ютері.

Однак слід зазначити, що у навчальному процесі закладів середньої та вищої освіти гостро відчувається нестача підручників та методичних напрацювань з обчислювальних дисциплін, навчання яких здійснюється в умовах використання інформаційно-комунікаційних технологій. Відповідні цим умовам методичні системи дістали назву комп'ютерно-орієнтованих. Вважаємо, що прискорення підготовки та видання якісних підручників із зазначених дисциплін та запропонування змістовних методичних напрацювань є пріоритетними завданнями сучасної математичної освіти. Окреслені вище *проблеми* і завдання обумовлюють актуальність науково-методичних досліджень, спрямованих на розробку та обґрунтування засад ефективного впровадження засобів ІКТ у навчальний процес.

Розробці комп'ютерно-орієнтованих реалізацій чисельних методів аналізу присвячені окремі підручники, навчальні посібники, публікації в науково-методичних друкованих виданнях, зокрема, посібник для вчителів [3], навчальні посібники [1], [2], [5], підручник [6], статті [4], [8], [10].

В посібнику для вчителів [3] розкриваються деякі аспекти використання засобів сучасних інформаційних технологій під час вивчення алгебри та початків аналізу в середніх навчальних закладах із різними ухилами навчання. У навчальному посібнику [1] подано основи обчислювальної математики і чисельні методи математичного аналізу в обсязі, необхідному техніку-програмісту для роботи на ПЕОМ. Навчальний посібник [2] містить вибрані питання обчислювальної математики відповідно до програми вищих технічних навчальних закладів. Практикум [5] містить докладні розв'язання типових прикладів курсу "Чисельні методи" з реалізацією в системі Mathcad та завдання для самостійної роботи. У підручнику [6] розглянуто чисельні методи алгебри і математичного аналізу, лінійного програмування і статистичного опрацювання результатів експерименту. Для більшості чисельних методів побудовано алгоритми та описано мовою програмування Бейсік, які реалізуються на ПЕОМ. Статті [4], [8], [10] присвячені методичним та алгоритмічним аспектам використання комп'ютера у процесі математичної підготовки учнів і студентів у середніх та вищих навчальних закладах.

Поданий вище аналіз останніх публікацій дає підстави для виокремлення недостатньо досліджених компонентів загальної методичної проблеми в частині створення програмних реалізацій окремих чисельних методів в середовищі Mathcad.

Розглянемо програмні реалізації в середовищі Mathcad методів Рунге-Кутта і Адамса для знаходження наближеного розв’язку диференціального рівняння та приклади застосування зазначених методів. Слід звернути увагу на доцільність застосування згаданих вище програмних реалізацій у процесі математичної підготовки фахівців як математичних, так і нематематичних спеціальностей, оскільки рівень математичної підготовки студентів останніх спеціальностей іноді недостатній для усвідомлення теоретичних основ побудови таких наближених методів. Специфіка поєднання у процесі обчислень авторських програмних модулів і вбудованих математичних функцій та процедур середовища Mathcad сприятиме формуванню алгоритмічної культури студентів, фахова підготовка яких передбачає опанування методами обчислювальної математики.

Методичні, математичні, алгоритмічні аспекти поєднання авторських і вбудованих програмних реалізацій в середовищі Mathcad становлять *сутність досліджуваного явища*.

Наведемо приклади застосування методів Рунге-Кутта та Адамса для знаходження наближеного розв’язку диференціального рівняння. Зазначені методи будуть використані у позначеннях, запропонованих в навчальному посібнику [2].

Приклад 1. З точністю $\varepsilon = 0{,}5 \cdot 10^{-5}$ знайти наближене значення $y\big|_{x=1,4}$ розв’язку диференціального рівняння $\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x}y = -\frac{\ln x}{x}$, який задовольняє початкову умову $y = 0{,}5$ при $x = 1$. Порівняти отриманий наближений розв’язок з точним.

Розв’язування. Очевидно, дане диференціальне рівняння є звичайним лінійним диференціальним рівнянням. Загальний розв’язок (інтеграл) лінійного рівняння визначається рівністю: $y = e^{2\int\frac{dx}{x}}\left(C_1 - \int\frac{\ln x}{x}\left(e^{-2\int\frac{dx}{x}}\right)dx\right) = x^2\left(C_1 + \frac{1}{2}\frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{4}\frac{1}{x^2}\right) = x^2\left(C_1 + \frac{\ln x^2 + 1}{4x^2}\right) = C_1x^2 + \frac{1}{4}\left(\ln x^2 + 1\right)$.

Таким чином, загальний розв’язок має вигляд: $y = \frac{1}{4}\left(Cx^2 + \ln x^2 + 1\right)$. Використавши початкову умову, отримаємо: $y(1) = \frac{1}{4}(C + 1) = \frac{1}{2}$, тобто $C = 1$. Отже, частинний розв’язок, який задовольняє дану початкову умову, має вигляд: $y = \frac{1}{4}\left(x^2 + \ln x^2 + 1\right)$. Таким чином, неважко отримати точне значення функції y в точці $x = 1{,}4$: $y(1{,}4) = 0{,}9082361$ (обчислення виконуємо із двома запасними цифрами). Але, як відомо, не будь-яке диференціальне рівняння інтегрується в елементарних функція. У таких випадках розв’язування поставленої задачі здійснюється шляхом використання наближених методів. Застосуємо наближені методи до наведеного рівняння і порівняємо отримані результати.

Отже, за умовою, $x_0 = 1$, $y_0 = y(x_0) = 0{,}5$. У даному випадку формулу Адамса зручно звести до виду $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{24}\left(55y'_i - 59y'_{i-1} + 37y'_{i-2} - 9y'_{i-3}\right)$, $i = 3,4,\ldots,n-1$, де h – крок, обраний відповідно до заданої точності обчислень [2, с.168-171]. Крок h обираємо із співвідношення $h^4 < 0{,}000005$, $h = 0{,}04$ [1, с.420]. Зазначений підхід до визначення кроку поділу відрізка іноді застосовується і у методі Рунге-Кутта [1, с.412]. Як бачимо з формули Адамса, для початку процесу обчислення наближеного значення розв’язку необхідний так званий *початковий відрізок* y_0, y_1, y_2, y_3, який визначається із початкової умови за яким-небудь чисельним методом, наприклад, за методом Рунге-Кутта (рис. 1).

$$f(x,y) := \frac{2}{x}\cdot y - \frac{\ln(x)}{x} \qquad x_0 := 1 \qquad y_0 := 0.5 \quad n := 3 \quad a := x_0 \quad b := 1.12$$

$$h := \frac{b-a}{n} \qquad h = 0.04 \quad k := 0..n-1 \qquad x_k := x_0 + k\cdot h$$

$$yrk := \left| \begin{array}{l} z_0 \leftarrow y_0 \\ \text{for } k \in 0..n-1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} k1 \leftarrow h\cdot f(x_k, z_k) \\ k2 \leftarrow h\cdot f\left(x_k + \frac{h}{2}, z_k + \frac{k1}{2}\right) \\ k3 \leftarrow h\cdot f\left(x_k + \frac{h}{2}, z_k + \frac{k2}{2}\right) \\ k4 \leftarrow h\cdot f(x_k + h, z_k + k3) \\ z_{k+1} \leftarrow z_k + \frac{1}{6}\cdot(k1 + 2\cdot k2 + 2\cdot k3 + k4) \end{array} \right. \\ z \end{array} \right.$$

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.04 \\ 1.08 \end{pmatrix} \qquad yrk = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5400104 \\ 0.5800805 \\ 0.6202644 \end{pmatrix}$$

Рис. 1

Отже, початковий відрізок визначено: $y_0 = 0{,}5$; $y_1 = 0{,}5400104$; $y_2 = 0{,}5800805$; $y_3 = 0{,}6202644$. Реалізацію методу Адамса ілюструє рис. 2.

$$f(x,y) := \frac{2}{x}\cdot y - \frac{\ln(x)}{x} \qquad x_0 := 1 \qquad y_0 := 0.5 \quad y_1 := 0.5400104 \qquad y_2 := 0.5800805 \qquad y_3 := 0.6202644$$

$$b := 1.4 \quad n := 10 \qquad h := \frac{b - x_0}{n} \qquad h = 0.04 \qquad i := 1..n \qquad x_i := x_0 + i\cdot h$$

$$i := 3..n-1$$

$$y_{i+1} := y_i + \frac{h}{24}\cdot\left(55 f(x_i, y_i) - 59\cdot f(x_{i-1}, y_{i-1}) + 37\cdot f(x_{i-2}, y_{i-2}) - 9\cdot f(x_{i-3}, y_{i-3})\right)$$

$$y_n = 0.9082344$$

$$g(t) := \frac{1}{4}\cdot\left(t^2 + \ln\left(t^2\right) + 1\right) \qquad R := \left|g(b) - y_n\right| \qquad R = 1.60045824 \times 10^{-6}$$

Рис. 2

Таким чином, $y(1{,}4) = 0{,}9082344$, що добре узгоджується з точним значенням. Згідно із значенням *R*, наближене значення розв'язку містить п'ять правильних десяткових знаків, що свідчить про досягнення заданої точності.

Приклад 2. За допомогою методу Рунге-Кутта знайти наближене значення $y\big|_{x=1}$ розв'язку диференціального рівняння $y'' + 2y' + 2y = 2x^2 + 8x + 6$, який задовольняє початкові умови $y(0) = 1$, $y'(0) = 4$. Порівняти отриманий результат із точним значенням розв'язку [9, с. 318].

Розв'язування. Наведене рівняння за типом є звичайним диференціальним лінійним неоднорідним рівнянням 2-го порядку. Інтегрування даного рівняння у студента-математика труднощів не викликає, оскільки права частина рівняння є функцією спеціального типу. Загальний інтеграл рівняння визначається функцією $y = C_1 e^{-x}\cos x + C_2 e^{-x}\sin x + x^2 + 2x$. З початкових умов отримуємо: $y(0) = C_1 = 1$, $y' = e^{-x}(C_2 - C_1)\cos x - e^{-x}(C_1 + C_2)\sin x + 2(x+1)$, $y'(0) = C_2 - C_1 + 2 = C_2 + 1 = 4$, $C_2 = 3$. Отже, частинний розв'язок, відповідний даним початковим умовам, визначається функцією $y = e^{-x}(\cos x + 3\sin x) + x^2 + 2x$. Таким чином, $y(1) = 4{,}12744574$.

Результат застосування методу Рунге-Кутта для обчислення наближеного значення $y(1)$ ілюструє рис. 3.

$$init\_vals := \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} \qquad init\_x := 0 \qquad final\_x := 1 \qquad nsteps := 10$$

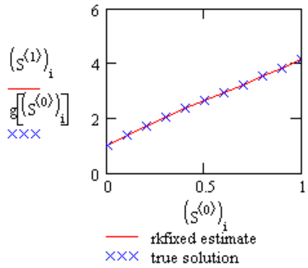
$$D(x,Y) := \begin{pmatrix} Y_1 \\ -2\cdot Y_1 - 2\cdot Y_0 + 2\cdot x^2 + 8\cdot x + 6 \end{pmatrix}$$

$$S := rkfixed(init\_vals, init\_x, final\_x, nsteps, D)$$

$$i := 0..nsteps \qquad g(t) := e^{-t}\cdot(\cos(t) + 3\cdot\sin(t)) + t^2 + 2t \qquad dg(t) := \frac{d}{dt}g(t)$$

S =

	0	1	2
0	0	1	4
1	0.1	1.38131583	3.63930083
2	0.2	1.73038004	3.35419279
3	0.3	2.05450957	3.13975243
4	0.4	2.36050821	2.99066991
5	0.5	2.65463647	2.90141513
6	0.6	2.94259679	2.86637775
7	0.7	3.22953146	2.87998322
8	0.8	3.52003116	2.93678722
9	0.9	3.81815182	3.03155057
10	1	4.12743816	3.15929684



$$error\_function := \max\left(\overrightarrow{\left|S^{\langle 1\rangle} - g\left(S^{\langle 0\rangle}\right)\right|}\right) \qquad g(0) = 1 \qquad dg(0) = 4$$

$$error\_function = 7.573\times 10^{-6}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}g(t) + 2\cdot\frac{d}{dt}g(t) + 2\,g(t) \text{ simplify } \rightarrow 6 + 8\cdot t + 2\cdot t^2$$

$$error\_derivative := \max\left(\overrightarrow{\left|S^{\langle 2\rangle} - dg\left(S^{\langle 0\rangle}\right)\right|}\right)$$

$$g(1) = 4.12744574 \qquad dg(1) = 3.15929272$$

$$error\_derivative = 4.125\times 10^{-6}$$

Рис. 3

У якості “бонусу” Mathcad наводить наближені значення першої похідної функції $y(x)$ у точках поділу. Незважаючи на невелику кількість точок поділу $(n = nsteps = 10)$, наближені значення самої функції та її першої похідної у точках поділу мають не менше чотирьох правильних десяткових знаків, про що свідчать оцінки error_function та error_derivative. Унаочнення оцінки відхилень наближених значень (rkfixed estimate) функції від значень точного розв’язку (true solution) у точках поділу подано на графіку праворуч.

Зрозуміло, що використання вбудованої функції rkfixed розв’язує проблему створення власних програмних реалізацій методу Рунге-Кутта. Однак доцільно ознайомити студентів із алгоритмом методу Рунге-Кутта (рис. 1) з метою формування алгоритмічної культури і більш якісного засвоєння його теоретичних основ.

Під час розв’язування прикладних задач досить часто доводиться розглядати функції, первісну яких не можна виразити в елементарних функціях, а також функції, задані таблично або графічно і аналітичний вираз яких невідомий або аналітичний вираз первісної складний і незручний для обчислень. Відомо, зокрема, що розв’язання диференціального рівняння Ріккаті не зводиться, взагалі кажучи, до квадратур. Як показав Ліувілль (1841 р.), лише в окремих випадках розв’язок спеціального рівняння Ріккаті може бути поданий квадратурами від елементарних функцій. У таких випадках користуються чисельними методами у відповідних комп’ютерних реалізаціях. Деякі з таких реалізацій подані в статті. Створення таких реалізацій і їх використання має вагоме значення для кращого розуміння обчислювальних методів студентами.

Очевидно, розв’язування задач з використанням математичних програмних засобів формує в студентів педагогічних вищих навчальних закладів широкий спектр алгоритмічних прийомів загального характеру, цінних для математичного розвитку особистості і таких, що можуть бути застосованими і на будь-якому іншому математичному матеріалі. Наведені комп’ютерні реалізації методів Рунге-Кутта та Адамса наближеного розв’язування диференціальних рівнянь є корисним методичним матеріалом, для студентів та викладачів педагогічних вищих навчальних закладів. Систематичне і методично виправдане використання математичних програмних засобів в процесі навчання математичних дисциплін сприятиме розв’язуванню проблем неефективного використання навчального часу шляхом усунення, автоматизації і алгоритмізації виконання рутинних однотипних обчислень студентами під час проведення аудиторних і позааудиторних занять.

Корисними та необхідними є також розробки багатоваріантних різнорівневих тестових завдань з математичних дисциплін, призначених для формування і розвитку умінь студентів педагогічних вищих навчальних закладів розв’язувати задачі з використанням математичних програмних засобів. При цьому необхідно доцільно узгоджувати добір прикладного математичного програмного забезпечення із наявними інформаційними ресурсами кафедр інженерно-технічного напряму підготовки фахівців.

Література

1. Вычислительная математика: Учеб. пособие для техникумов / Данилина Н.И., Дубровская Н.С., Кваша О.П., Смирнов Г.Л. – М.: Высш. шк., 1985. – 472 с.
2. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения / Под редакцией Б.П. Демидовича. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963. – 400 с.
3. Жалдак М.І. Комп'ютер на уроках математики: Посібник для вчителів – К.: Техніка, 1997. – 303 с.
4. Зайцева Т.В. Комп'ютерні технології на уроках алгебри та початків аналізу // Комп'ютер у школі та сім'ї. – 1999. – №4. – С.34-37.
5. Литвин О. М., Лобанова Л.С. Практикум з курсів “Математичні методи та моделі в розрахунках на ПЕОМ” і “Чисельні методи” (із застосуванням системи MATHCAD). Навчальний посібник. – Харків: УІПА, 2006. – 153 с.
6. Лященко М.Я., Головань М.С. Чисельні методи: Підручник. – К.: Либідь, 1996. – 288 с.
7. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов, т. 2: Учебное пособие для втузов. – 13-е изд. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1985. – 560 с.
8. Раков С.А., Горох В.П., Осенков К.О. Навчальні дослідження з використанням пакета динамічної геометрії DG //Математика в школі. – 2005. – №1. – С.10-14.
9. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: Учеб. пособие. В 3 ч. Ч. 2 / А.П. Рябушко, В.В. Бархатов, В.В. Державец, И.Е. Юруть; Под общ. ред. А.П. Рябушко. – Мн.: Высш. шк., 1991. – 352 с.
10. Шавальова В. І. Використання персонального комп'ютера у процесі вивчення курсу математичного аналізу у вищому педагогічному навчальному закладі //Комп'ютер у школі та сім'ї. – 2002. – №5. – С. 29-33.