Отже, вивчення фізико-технічних дисциплін з використанням комп’ютерного моделювання передбачає не тільки формування міцних знань, умінь і навичок з даної предметної галузі, але й сприяє активізації навчально-пізнавальної діяльності студентів, інтенсифікації навчально-виховного процесу та зацікавленості студентів у використанні систем автоматизованого проектування в процесі навчання та в подальшій професійній діяльності.

Література

1. Державний стандарт України 2226-93. Автоматизовані системи. Терміни та визначення. – К.: Держстандарт України, 1994. – 91 с.
2. Жалдак М.І. Система підготовки вчителя до використання інформаційно-комунікаційних технологій в навчальному процесі / М.І. Жалдак // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія № 2. Комп’ютерно-орієнтовані системи навчання: Зб. наук. праць / Редрада. – К.: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2011. – № 11 (18). – С. 3-16.
3. Комп’ютерне моделювання систем та процесів. Методи обчислень. Частина 1: навчальний посібник / [Квєтний Р.Н., Богач І.В., Бойко І.Р. та інші]; за заг. ред. Р.Н. Квєтного. – Вінниця: ВНТУ, 2013. – 191 с.
4. Семеріков С.О. Роль, місце та зміст комп’ютерного моделювання в системі шкільної освіти / С.О. Семеріков, І.О. Теплицький // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія № 2. Комп’ютерно-орієнтовані системи навчання: Зб. наук. праць / Редрада. – К.: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2010. – № 9 (16). – С. 30-40.
5. Твердохлеб И.А. Методические аспекты использования средств ИКТ в процессе обучения компьютерной схемотехнике будущих учителей информатики /И.А. Твердохлеб // Проблемы современной науки: сборник научных трудов: выпуск 10. Часть 1. – Ставрополь: Логос, 2013. – С. 147-154.
6. Твердохліб І.А. Вивчення електродинаміки в віртуальній лабораторії на персональному комп'ютері / І.А. Твердохліб // Матеріали ІІІ міжвузівської науково-практичної конференції “Наукова діяльність як шлях формування професійних компетентностей майбутнього фахівця” (НПК-2012), м. Суми, 5-6 грудня 2012 р. – Суми: Вид-во СумДПУ імені А.С. Макаренка, 2012 р. – С. 276-278.
7. Твердохліб І.А. Віртуальний лабораторний практикум з основ мікроелектроніки / І.А. Твердохліб // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія № 5. Педагогічні науки: реалії та перспективи. – Випуск 22 : збірник наукових праць / за ред. В.П. Сергієнка. – К.: Вид-во НПУ імені М.П. Драгоманова, 2010. – С. 471-474.
8. Тлумачний словник з інформатики / Г.Г. Півняк, Б.С. Бусигін, М.М. Дівізінюк та ін. – Д., Нац. гірнич. ун-т, 2010. – 600 с.
9. Хазіна С.А. Комп’ютерне моделювання фізичного процесу у різних програмних середовищах / С.А. Хазіна // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія № 2. Комп’ютерно-орієнтовані системи навчання: Зб. наук. праць / Редрада. – К.: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2008. – № 6 (13). – С. 93-96.
10. Logisim web site [Electronic resource]. – Mode of access: http://ozark.hendrix.edu/~burch/logisim/

Біляй І.М.

Національний педагогічний університет імені М.П.Драгоманова

Дослідження залежності графіка функції розподілу ймовірностей від структури подій

Інформаційно-комунікаційні технології стають одним з найважливіших чинників реалізації принципів дидактики в навчанні математики – науковості, наочності, доступності, системності та фундаментальності. Під час вивчення складних понять математики з використанням ІКТ важливу роль можуть відіграти графічні побудови за допомогою засобів інформаційно-комунікаційних технологій, зокрема пакетів математичних програм.

Нині розроблено значну кількість програмних засобів, за допомогою яких можна розв’язувати досить багато математичних задач різних рівнів складності. Це такі програми як GRAN1, GRAN2D, GRAN3D, Advanced Grapher, DG (динамічна геометрія), Wolfram|Alpha, Maxima, MathCad, Maple і ін. Причому одні з цих програм розраховані на фахівців досить високої кваліфікації в галузі математики, інші – на учнів середніх навчальних закладів чи студентів вузів, які лише почали вивчати шкільний курс математики чи основи вищої математики. Для користування програмами GRAN1, GRAN2D, GRAN3D, Advanced Grapher, DG (динамічна геометрія) не обов’язкова наявність надто потужних комп’ютерів з великою швидкодією, значними обсягами оперативної пам’яті чи високими можливостями графічних побудов.

Названі програми прості у користуванні, оснащені досить зручним інтерфейсом, який максимально наближений до інтерфейсу найбільш поширених програм загального призначення. Від користувача не вимагається значного обсягу спеціальних знань з інформатики, основ обчислювальної техніки, програмування за винятком найпростіших понять, які цілком доступні для учнів загальноосвітніх шкіл.

Однією з найскладніших для сприйняття учнями тем з математики є «Елементи теорії ймовірностей та статистики», під час вивчення якої учні знайомляться з такими основними поняттями, як випадкова подія, частота відбування випадкової події, статистична ймовірність, випадкова величина, щільність та функція розподілу статистичних ймовірностей тощо.

При вивченні функції розподілу статистичних ймовірностей важливу роль відіграють задачі на дослідження та побудову графіків функцій розподілу статистичних ймовірностей. Зазвичай говорять, що за функцією розподілу можна визначити тип розподілу.

- Якщо функція розподілу кусково-стала, то маємо дискретний розподіл.
- Якщо функція розподілу неперервна, то неперервний розподіл.

Але виявляється таким чином тип розподілу можна визначати лише тоді, коли простір елементарних подій $\Omega = R^1$, простір подій S – борелівська σ-алгебра $\mathscr{B}(R^1)$ підмножин множини R^1.

На практиці часто Ω – скінченна множина виду $\Omega = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$ або нескінченна обмежена виду $\Omega = [a,b)$, $-\infty < a < b < +\infty$, як простір подій S розглядають сукупність підмножин множини Ω виду $S = \{A \mid A = \bigcup_{i \in I} H_i$, $I \subset \{1,2,...,k\}$, $H_i H_j = \varnothing$, коли $i \neq j$, $\bigcup_{i=1}^{k} H_i = \Omega\}$. Такий простір подій називають породженим поділом множини Ω на підмножини H_i, $I \in \{1,2,...,k\}$, такі, що $H_i H_j = \varnothing$, коли $i \neq j$, $\bigcup_{i=1}^{k} H_i = \Omega$. При цьому розподіл ймовірностей задають, вказавши ймовірнісну міру $P(H_i)$ для кожного $H_i \in S$, $i \in \overline{1,k}$. Тоді для довільного $A = \bigcup_{i \in I} H_i \in S$, $I \subset \{1,2,...,k\}$ буде $P(A) = P(\bigcup_{i \in I} H_i) = \sum_{i \in I} P(H_i)$, $I \subset \{1,2,...,k\}$.

Отже, таким чином задано ймовірнісний простір (Ω, S, P).

Зауважимо, що оскільки порожня множина $\varnothing$ є підмножиною будь якої непорожньої множини (див. [2], [3]), то не виключено, що може бути $I = \varnothing$.

Оскільки функція $F(x)$ розподілу ймовірностей на $R^1 = (-\infty, \infty)$ визначається як ймовірнісна міра множини $(-\infty, x)$, а в розглянутому способі побудови ймовірнісного простору (Ω, S, P) множина $(-\infty, x)$ не належить до сукупності S підмножин множини Ω, на якій задано ймовірнісну міру $P(A)$, $A \in S$, то при так заданому ймовірнісному просторі неможливо визначити ймовірнісну міру множини $(-\infty, x)$.

Тому розглянемо інший ймовірнісний простір $(\tilde{\Omega}, \tilde{S}, \tilde{P})$, де $\tilde{\Omega} = R^1 = (-\infty, \infty)$, $\tilde{S} = \mathscr{B}(R^1)$ – σ-алгебра борелівських підмножин множини R^1, зокрема $(-\infty, x) \in \tilde{S}$ для довільного $x \in (-\infty, \infty)$. Як ймовірнісну міру множини $\tilde{A} \in \tilde{S}$ покладемо $\tilde{P}(\tilde{A}) = \max\limits_{\bigcup A \subset \tilde{A},\, A \in S} P(\bigcup A)$, продовжуючи в такий спосіб міру $P(A)$, $A \in S$, із простору подій S на простір подій $\tilde{S}$. В такому разі говорять, що міра $\tilde{P}(\tilde{A})$, $\tilde{A} \in \tilde{S}$, є продовженням міри $P(A)$, $A \in S$, із S на $\tilde{S}$. Зауважимо, що $S \subset \tilde{S}$ і $\tilde{P}(A) = P(A)$, коли $A \in S$. Тоді можна визначити функцію $F(x)$ розподілу ймовірностей на множині $\tilde{\Omega} = (-\infty, \infty)$, поклавши (див. [2], [3])

$$F(x) = \tilde{P}((-\infty, x)) = \max_{\bigcup A \subset (-\infty, x),\, A \in S} P(\bigcup A),\ (-\infty, x) \in \tilde{S},\ A \in S,\ \bigcup A \in S.$$

Розглянемо приклади [2, 3].

Приклад 1. Нехай на множині $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ задано розподіл статистичних ймовірностей (див. [2], [3]) через ряд розподілу

x_i	1	2	3	4	5
$P_n^*(\{x_i\})$	0.05	0.20	0.50	0.20	0.05

Як події разом з порожньою множиною $\varnothing$ розглядатимемо всеможливі об'єднання $A = \bigcup_{i\in I}\{x_i\} \in S$, $I \subset \{1,2,3,4,5\}$, $x_i = i$, $i \in \overline{1,5}$, тобто всеможливі підмножини множини $\Omega = \{1,2,3,4,5\}$.

Тоді для даного розподілу статистичних ймовірностей буде:

1) $F_n^*(x) = 0$, коли $x \le 1$, оскільки жодна із непорожніх підмножин $\bigcup_{i\in I}\{x_i\}$, $I \subset \{1,2,3,4,5\}$, $I \ne \varnothing$, множини Ω не є підмножиною множини $(-\infty,1)$;

2) коли буде $1 < x \le 2$, тоді до множини $(-\infty, x)$ буде входити підмножина $\{1\}$ множини Ω, і тому $F_n^*(x) = P_n^*(\{1\}) = 0.05$, коли $1 < x \le 2$;

3) коли x буде змінюватись в межах від 2 до 3 включно, тобто буде $2 < x \le 3$, тоді до множини $(-\infty, x)$ будуть входити підмножини $\{1\}$, $\{2\}$, $\{1,2\}$, які є елементами сукупності *S*, тобто подіями, і об'єднання яких $\{1\}\cup\{2\}\cup\{1,2\}$ буде множиною, що входить до сукупності *S*, тобто подією, і крім того буде підмножиною множини $(-\infty, x)$, коли $x \in (2,3]$. Тому

$$F_n^*(x) = P_n^*\left(\bigcup_{A\subset(-\infty,x)} A\right) = P_n^*(\{1\}\cup\{2\}\cup\{1,2\}) = P_n^*(\{1,2\}) = P_n^*(\{1\}) + P_n^*(\{2\}) = 0.25,$$

коли $2 < x \le 3$, тобто $F_n^*(x) = 0.25$, коли $2 < x \le 3$.

Міркуючи аналогічно, знайдемо

4) $F_n^*(x) = 0.75$, коли $3 < x \le 4$;

5) $F_n^*(x) = 0.95$, коли $4 < x \le 5$;

6) $F_n^*(x) = 1.00$, коли $5 < x$.

Остаточно одержуємо

$$F_n^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{коли } x \le 1, \\ 0.05, & \text{коли } 1 < x \le 2, \\ 0.25, & \text{коли } 2 < x \le 3, \\ 0.75, & \text{коли } 3 < x \le 4, \\ 0.95, & \text{коли } 4 < x \le 5, \\ 1.00, & \text{коли } 5 < x. \end{cases}$$

Графік такої функції $F_n^*(x)$ для заданого дискретного (поточкового) розподілу статистичних ймовірностей на скінченній множині точок $\Omega = \{1,2,3,4,5\}$ подано на Рис. 1.

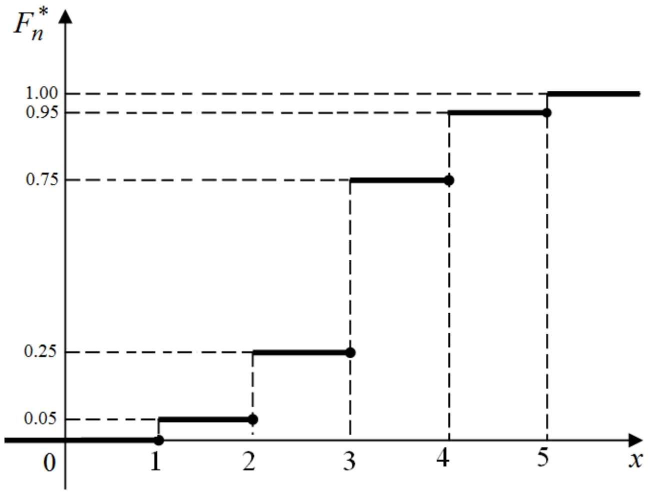

Рис. 1

В даному прикладі множини вигляду $(-\infty, x)$ не є подіями відносно ймовірнісного простору (Ω, S, P_n^*), бо таких множин немає в сукупності *S* підмножин розглядуваної множини Ω, тобто в просторі подій, до якого разом з порожньою множиною $\varnothing$ віднесено підмножини $\bigcup_{i\in I}\{x_i\}$,

$I \subset \{1,2,3,4,5\}$, множини Ω, а тому записи вигляду $F_n^*(x) = P_n^*((-\infty, x))$ в розглядуваному випадку некоректні.

Приклад 2. Нехай на множині $\Omega = [0,5)$ задано поінтервальний розподіл статистичних ймовірностей

$[a_{i-1}, a_i)$	$[0,1)$	$[1,2)$	$[2,3)$	$[3,4)$	$[4,5)$
$P_n^*([a_{i-1}, a_i))$	0.05	0.20	0.50	0.20	0.05

Графік усередненої (див. [2], [3]) щільності $f_n^*(x)$ цього розподілу статистичних ймовірностей за інтервалами $[i-1, i)$, $i \in \overline{1,5}$, на множині $\Omega = [0,5) = [0,1) \bigcup [1,2) \bigcup [2,3) \bigcup [3,4) \bigcup [4,5)$ подано на Рис. 2.

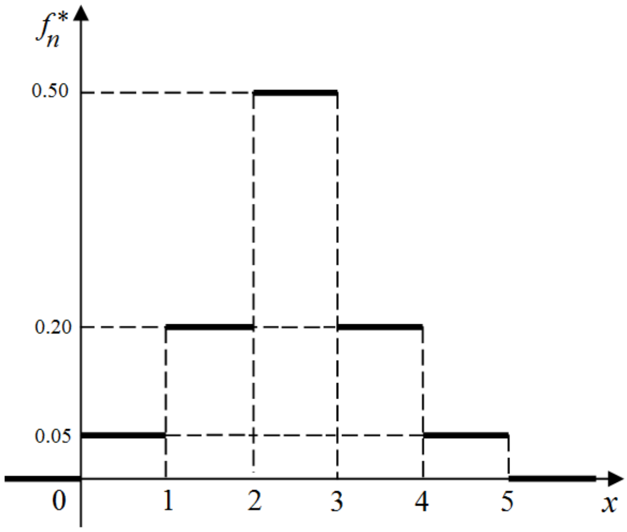

Рис. 2

Як події разом з порожньою множиною $\varnothing$ розглядатимемо всеможливі об'єднання інтервалів $[a_{i-1}, a_i)$, тобто $A = \bigcup_{i \in I} [a_{i-1}, a_i) \in S$, $I \subset \{1,2,3,4,5\}$.

Тоді для даного поінтервального розподілу статистичних ймовірностей будемо мати: $F_n^*(x) = 0$, коли $x \le 1$, оскільки жодна з підмножин $A = \bigcup_{i \in I} [a_{i-1}, a_i) \in S$, $I \subset \{1,2,3,4,5\}$, $I \ne \varnothing$, не є підмножиною множини $(-\infty, x)$ при $x \le 1$. Коли ж x буде в межах від 1 до 2 включно, тобто $x \in (1,2]$, тоді інтервал $[0,1)$ буде підмножиною множини $(-\infty, x)$, і тому для $x \in (1,2]$ буде $F_n^*(x) = P_n^*([0,1)) = \int_0^1 f_n^*(x)dx = 0.05$, коли $x \in (1,2]$.

Коли x буде в межах від 2 до 3 включно, тобто $x \in (2,3]$, тоді сума подій $[0,1) \in S$, $[1,2) \in S$, $[0,1) \bigcup [1,2) \in S$, тобто $[0,1) \bigcup [1,2) \bigcup ([0,1) \bigcup [1,2)) \in S$ буде підмножиною множини $(-\infty, x)$, $x \in (2,3]$, тому

$$F_n^*(x) = P_n^*([0,1) \bigcup [1,2) \bigcup ([0,1) \bigcup [1,2))) = P_n^*([0,1) \bigcup [1,2)) = P_n^*([0,1)) + P_n^*([1,2)) =$$

$$= \int_0^1 f_n^*(x)dx + \int_1^2 f_n^*(x)dx = 0.05 + 0.20 = 0.25, \text{ коли } x \in (2,3].$$

Міркуючи аналогічно, знайдемо $F_n^*(x) = 0.75$, коли $x \in (3;4]$; $F_n^*(x) = 0.95$, коли $x \in (4;5]$; $F_n^*(x) = 1.00$, коли $x \in (5; +\infty)$.

Таким чином

$$F_n^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{коли } x \le 1, \\ 0.05, & \text{коли } 1 < x \le 2, \\ 0.25, & \text{коли } 2 < x \le 3, \\ 0.75, & \text{коли } 3 < x \le 4, \\ 0.95, & \text{коли } 4 < x \le 5, \\ 1.00, & \text{коли } 5 < x. \end{cases}$$

Вигляд графіка так визначеної функції $F_n^*(x)$ поінтервального розподілу статистичних ймовірностей на множині $\Omega = [0,5)$, розглядуваного в прикладі 2, буде такий самий, як і вигляд графіка функції $F_n^*(x)$ дискретного (поточкового) розподілу статистичних ймовірностей на множині $\Omega = \{1,2,3,4,5\}$, розглянутого в прикладі 1 (Рис. 1). Однаковий вигляд мають і подання самих функцій $F_n^*(x)$ розподілу статистичних ймовірностей в обох розглядуваних в прикладах 1 і 2 випадках.

Тому у випадках розглянутого способу побудови простору подій *S*, коли як події разом з порожньою множиною $\varnothing$ розглядаються всеможливі об'єднання $A = \bigcup\limits_{i \in I} H_i \in S$, $I \subset \{1,2,...,k\}$, підмножин H_i, $i \in \overline{1,k}$, скінченної множини $\Omega = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$, $(k \le m)$, чи підмножин $H_i = [a_{i-1}, a_i)$, $i \in \overline{1,k}$, нескінченної множини $\Omega = [a,b)$, таких, що $H_i H_j = \varnothing$, коли $i \ne j$, $\bigcup\limits_{i=1}^{k} H_i = \Omega$, за виглядом опису функції $F_n^*(x)$ розподілу статистичних ймовірностей неможливо визначити, розглядається дискретний розподіл статистичних ймовірностей на скінченній множині $\Omega = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$, чи інтервальний розподіл статистичних ймовірностей на нескінченній множині $\Omega = [a,b) = \bigcup\limits_{i=1}^{k} [a_{i-1}, a_i)$, $[a_{i-1}, a_i) \cap [a_{j-1}, a_j) = \varnothing$, коли $i \ne j$.

Приклад 3. Нехай на множині $\Omega = [0,5)$ задано поінтервальний розподіл статистичних ймовірностей такий самий, як і в прикладі 2, а простір подій *S* породжений поділом множини Ω на 25 інтервалів довжиною 0.2, тобто як події разом з порожньою множиною $\varnothing$ розглядаються всеможливі об'єднання $\bigcup\limits_{i \in I} [a_{i-1}, a_i)$, $I \subset \{1,2,...,25\}$, інтервалів $[a_{i-1}, a_i)$, $i \in \overline{1,25}$, $a_0 = 0$, $a_i - a_{i-1} = 0.2$.

Це означає, що розглядається новий простір $\tilde{S}$, породжений сукупністю проміжків $[a_{i-1}, a_i)$, $i \in \overline{1,25}$, елементами якого є множини виду $A = \bigcup\limits_{i \in I} [a_{i-1}, a_i)$, $I \subset \{1,2,...,25\}$. Очевидно, всі події із простору *S*, розглядуваного в прикладі 2, є також і елементами простору $\tilde{S}$, тобто $S \subset \tilde{S}$. Нову ймовірнісну міру $\tilde{P}_n^*$ на просторі подій $\tilde{S}$ визначимо за формулою $\tilde{P}_n^*(A) = \int\limits_A f_n^*(x)dx = \sum\limits_{x \in [a_{i-1}, a_i) \subset A} f_n^*(x) \cdot (a_i - a_{i-1})$, $A \in \tilde{S}$, де $f_n^*(x)$ – щільність розподілу статистичних ймовірностей така сама, як і в прикладі 2 (див. Рис. 2, Рис. 3).

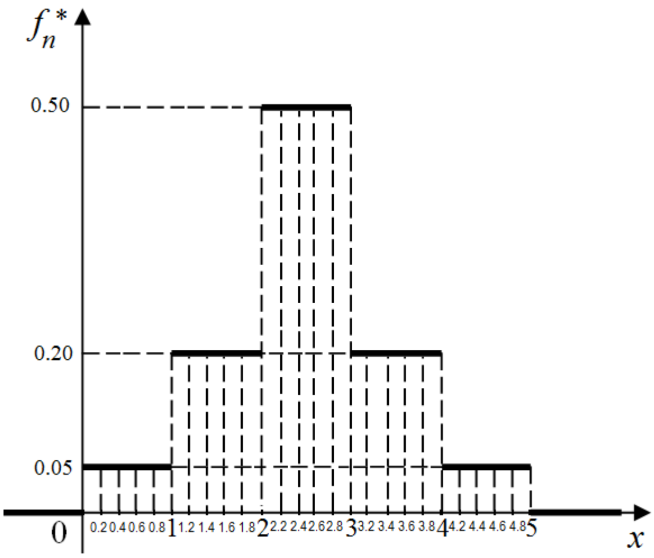

Рис. 3

Очевидно, при тій самій усередненій щільності $f_n^*(x)$ розподілу статистичних ймовірностей, що і в прикладі 2, статистичні ймовірності попадання в проміжки, отримані подрібненням проміжків із прикладу 2 на 5 проміжків однакової довжини, в 5 разів меншої, ніж довжина вихідних проміжків, будуть в 5 разів менші, ніж статистичні ймовірності попадання у вихідні проміжки, і будуть, як і раніше, обчислюватися за формулою $\tilde{P}_n^*([a_{i-1}, a_i)) = f_n^*(x)(a_i - a_{i-1})$, $i \in \overline{1,25}$.

При цьому говорять, що міра $\tilde{P}_n^*(A)$, $A \in \tilde{S}$, є продовженням міри $P_n^*(A)$, $A \in S$, із простору S на простір $\tilde{S}$.

Очевидно, $\tilde{P}_n^*(A) = P_n^*(A)$, коли $A \in S$. Якщо проміжки $[a_{i-1}, a_i)$, з яких складаються події $A = \bigcup_{i \in I} [a_{i-1}, a_i) \in \tilde{S}$, $I \subset \{1, 2, \ldots, 25\}$, поділити кожен на якесь число ще дрібніших проміжків однакової довжини, отримаємо новий простір подій $\tilde{\tilde{S}}$ і нову ймовірнісну міру $\tilde{\tilde{P}}_n^*$ цілком аналогічно до попереднього. Таке подрібнення проміжків $[a_{i-1}, a_i)$ можна продовжувати як завгодно довго до тих пір, поки різниця $h = a_i - a_{i-1}$ стане меншою, ніж будь яке як завгодно мале наперед задане число $\varepsilon > 0$. При цьому в результаті кожного зменшення довжини $h = a_i - a_{i-1}$ проміжків $[a_{i-1}, a_i)$, однакової для всіх i, будемо отримувати все нові і нові ймовірнісні простори $(\Omega, S^{(j)}, P_n^{*(j)})$, $j \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, (з одним і тим самим Ω).

Очевидно, функція $F_n^*(x)$ набуватиме сталих значень на проміжках $(a_{i-1}, a_i]$, $i \in \overline{1, 25}$, і при переході через точку a_i отримуватиме приріст $f_n^*(x) \cdot (a_i - a_{i-1})$, $x \in [a_{i-1}, a_i)$.

Міркуючи аналогічно до того, як це було зроблено в прикладі 2 при побудові функції $F_n^*(x)$ поінтервального розподілу статистичних ймовірностей на множині $\Omega = [0, 5)$ за інтервалами $[0,1)$, $[1, 2)$, $[2, 3)$, $[3, 4)$, $[4, 5)$, в розглядуваному прикладі, коли $a_i - a_{i-1} = 0.2$, $i \in \overline{1, 25}$, одержимо:

$F_n^*(x) = 0$, коли $x \le 0.2$, $F_n^*(x) = 0.01$, коли $0.2 < x \le 0.4$,

$F_n^*(x) = 0.02$, коли $0.4 < x \le 0.6$, $F_n^*(x) = 0.03$, коли $0.6 < x \le 0.8$,

$F_n^*(x) = 0.04$, коли $0.8 < x \le 1.0$, $F_n^*(x) = 0.05$, коли $1.0 < x \le 1.2$,

$F_n^*(x) = 0.09$, коли $1.2 < x \le 1.4$, $F_n^*(x) = 0.13$, коли $1.4 < x \le 1.6$,

$F_n^*(x) = 0.17$, коли $1.6 < x \le 1.8$, $F_n^*(x) = 0.21$, коли $1.8 < x \le 2.0$,

$F_n^*(x) = 0.25$, коли $2.0 < x \le 2.2$, $F_n^*(x) = 0.35$, коли $2.2 < x \le 2.4$,

$F_n^*(x) = 0.45$, коли $2.4 < x \le 2.6$, $F_n^*(x) = 0.55$, коли $2.6 < x \le 2.8$,

$F_n^*(x) = 0.65$, коли $2.8 < x \le 3.0$, $F_n^*(x) = 0.75$, коли $3.0 < x \le 3.2$,

$F_n^*(x) = 0.79$, коли $3.2 < x \le 3.4$, $F_n^*(x) = 0.83$, коли $3.4 < x \le 3.6$,

$F_n^*(x) = 0.87$, коли $3.6 < x \le 3.8$, $F_n^*(x) = 0.91$, коли $3.8 < x \le 4.0$,

$F_n^*(x) = 0.95$, коли $4.0 < x \le 4.2$, $F_n^*(x) = 0.96$, коли $4.2 < x \le 4.4$,

$F_n^*(x) = 0.97$, коли $4.4 < x \le 4.6$, $F_n^*(x) = 0.98$, коли $4.6 < x \le 4.8$,

$F_n^*(x) = 0.99$, коли $4.8 < x \le 5.0$, $F_n^*(x) = 1.00$, коли $5.0 < x$,

Графік так визначеної функції $F_n^*(x)$ поінтервального розподілу статистичних ймовірностей на множині $\Omega = \bigcup_{i=1}^{25} [a_{i-1}, a_i)$, $a_0 = 0$, $a_i - a_{i-1} = 0.2$, $i \in \overline{1, 25}$, за інтервалами $[a_{i-1}, a_i)$, $i \in \overline{1, 25}$, із щільністю (див. Рис. 3)

$$f_n^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{коли } x \overline{\in} [a_0, a_{25}), \\ 0.05, & \text{коли } x \in [0,1) \bigcup [4, 5), \\ 0.20, & \text{коли } x \in [1, 2) \bigcup [3, 4), \\ 0.50, & \text{коли } x \in [2, 3), \end{cases}$$

подано на Рис. 4.

Нехай $\max_{x \in \Omega} f_n^*(x) = c < \infty$.

Позначимо

$$\max_{\bigcup [a_{i-1}, a_i) \subset \Omega \bigcap (-\infty, x)} P_n^*(\bigcup [a_{i-1}, a_i)) \text{ через } m_*((-\infty, x)),$$

$$\min_{\Omega \bigcap (-\infty, x) \subset \bigcup [a_{i-1}, a_i)} P_n^*(\bigcup [a_{i-1}, a_i)) \text{ через } m^*((-\infty, x)),\ a_i - a_{i-1} \text{ через } h,\ i \in \{1, 2, \ldots, k\}.$$

Очевидно,

$$m_*((-\infty,x)) = \max_{\bigcup[a_{i-1},a_i)\subset\Omega\bigcap(-\infty,x)} P_n^*(\bigcup[a_{i-1},a_i)) \le F_n^*(x) \le$$

$$\le \min_{\Omega\bigcap(-\infty,x)\subset\bigcup[a_{i-1},a_i)} P_n^*(\bigcup[a_{i-1},a_i)) = m^*((-\infty,x)) \quad (1)$$

для довільного $x\in(-\infty,\infty)$,

$$m^*((-\infty,x)) - m_*((-\infty,x)) \le c\cdot h,$$

$$m^*((-\infty,x)) - m_*((-\infty,x)) \to 0, \text{ коли } h\to 0. \quad (2)$$

Звідси випливає, що коли $h\to 0$, тоді всі значення функції $F_n^*(x)$ на будь якому із проміжків $[a_{i-1},a_i)$, $i\in\overline{1,k}$ (коли $h\to 0$, тоді $k\to\infty$), будуть різнитися між собою не більше, ніж на $c\cdot h$, тому $F_n^*(a_i)-F_n^*(a_{i-1})\to 0$, коли $a_i - a_{i-1}\to 0$.

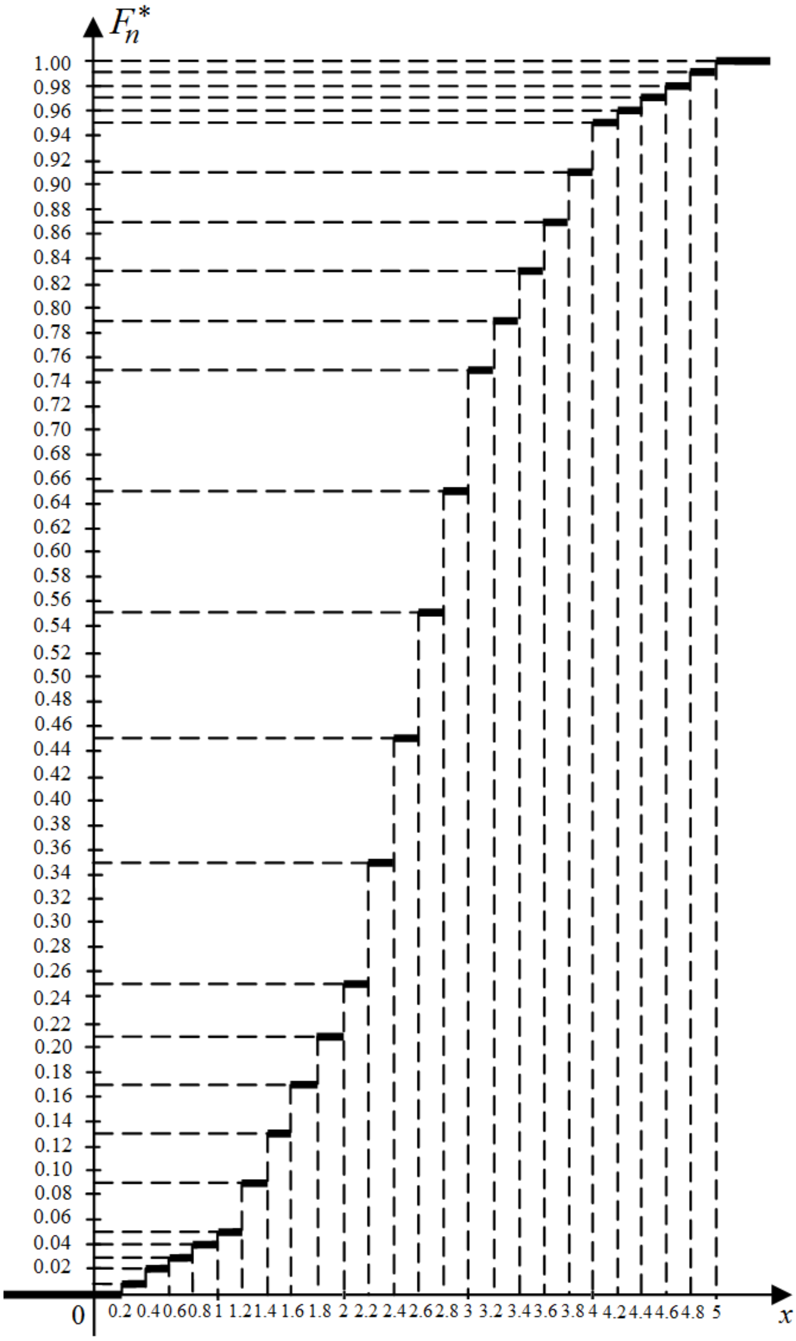

Рис. 4

Зауважимо, що коли при довільних $x\in(-\infty,\infty)$ множини $(-\infty,x)$ є подіями, тобто елементами простору подій S, $(-\infty,x)\in S$, що означає, що як простір елементарних подій розглядається множина $\Omega=(-\infty,\infty)$, а як простір подій розглядається σ-алгебра $\mathscr{B}(R^1)$ борелівських підмножин множини $\Omega=(-\infty,\infty)$, тоді формула $F(x)=\widetilde{P}((-\infty,x))$ набуває вигляду $F_n^*(x)=P_n^*((-\infty,x))$, $x\in(-\infty,\infty)$. В такому разі за виглядом функції $F_n^*(x)$ можна з'ясувати, така функція побудована за дискретним (поточковим) розподілом статистичних ймовірностей на скінченній множині точок $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \subset \Omega = (-\infty, \infty)$, чи за інтервальним (неперервним) розподілом статистичних ймовірностей на неперервній множині $[a, b) \subset \Omega = (-\infty, \infty)$. Крім того в такому випадку $P_n^*([u, v)) = F_n^*(v) - F_n^*(u)$ для довільних u і v таких, що $[u, v) \subset (-\infty, +\infty)$, $u \in (-\infty, +\infty)$, $v \in (-\infty, +\infty)$, $u \le v$.

Приклад 4. Надалі вважатимемо, що $\Omega = R^1 = (-\infty, \infty)$, $S = \mathscr{B}(R^1)$. Тоді для дискретного (поточкового) розподілу статистичних ймовірностей на скінченній множині $\{1, 2, 3, 4, 5\} \subset \Omega = (-\infty, \infty)$, розглянутого в прикладі 1, функція розподілу статистичних ймовірностей

$$F_n^*(x) = P_n^*((-\infty, x)),\ (-\infty, x) \in S,\ x \in (-\infty, \infty),$$

буде кусково сталою і матиме той самий вигляд, що і раніше, тобто

$$F_n^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{коли } x \le 1, \\ 0.05, & \text{коли } 1 < x \le 2, \\ 0.25, & \text{коли } 2 < x \le 3, \\ 0.75, & \text{коли } 3 < x \le 4, \\ 0.95, & \text{коли } 4 < x \le 5, \\ 1.00, & \text{коли } 5 < x. \end{cases}$$

Графік цієї функції має той самий вигляд, що і на Рис. 1.

Разом з тим, для поінтервального розподілу статистичних ймовірностей на множині $[0, 5) \subset \Omega = (-\infty, \infty)$, розглянутого в прикладі 2, функція розподілу статистичних ймовірностей

$$F_n^*(x) = P_n^*((-\infty, x)) = \int_{-\infty}^{x} f_n^*(t)dt,\ (-\infty, x) \in S,\ x \in (-\infty, \infty)$$

буде неперервною і матиме вигляд

$$F_n^*(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_n^*(x)dx = \begin{cases} 0, & \text{коли } x \le a_0, \\ f_n^*(x) \cdot (x - a_0), & \text{коли } x \in (a_0, a_1], \\ \sum_{i=1}^{j-1} P_n^*([a_{i-1}, a_i)) + f_n^*(x)(x - a_{j-1}), & \\ & \text{коли } x \in [a_{j-1}, a_j),\ 2 \le j \le k, \\ 1, & \text{коли } a_k < x, \end{cases}$$

тобто для наведених даних буде

$$F_n^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{коли } x \le 0, \\ 0.05x, & \text{коли } 0 < x \le 1, \\ 0.05 + 0.20(x-1), & \text{коли } 1 < x \le 2, \\ 0.25 + 0.50(x-2), & \text{коли } 2 < x \le 3, \\ 0.75 + 0.20(x-3), & \text{коли } 3 < x \le 4, \\ 0.95 + 0.05(x-4), & \text{коли } 4 < x \le 5, \\ 1, & \text{коли } 5 < x. \end{cases}$$

Графік останньої функції $F_n^*(x)$ подано на Рис. 5.

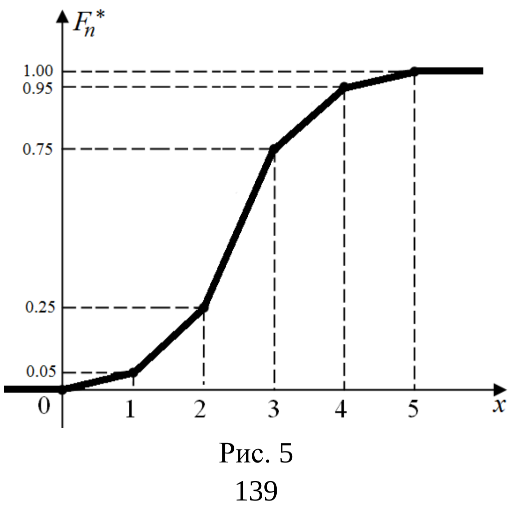

Рис. 5

Зауважимо, що коли усереднена щільність $f_n^*(x)$ інтервального розподілу статистичних ймовірностей задана на інтервалах $[a_{i-1}, a_i)$, $i \in \overline{1,k}$, фіксованої довжини *h*, таких, що $[a_{i-1}, a_i) \bigcap [a_{j-1}, a_j) = \varnothing$, коли $i \neq j$, $\bigcup_{i=1}^{k} [a_{i-1}, a_i) = \Omega$, $a_i - a_{i-1} = h$ (наприклад, на інтервалах довжини $h = 1$, як в прикладі 2, див. Рис. 2), і $f_n^*(x) \leq c < \infty$, $x \in (-\infty, \infty)$, а простір подій *S* породжується поділом множини Ω на все дрібніші і дрібніші інтервали такі, що довжина найдовшого з таких інтервалів стає все меншою і меншою (див. приклад 3), тоді функція $F_n^*(x)$ такого поінтервального розподілу статистичних ймовірностей, заданого вказаною щільністю $f_n^*(x)$, при все більшому і більшому подрібненні інтервалів, з яких складаються події $A \in S$, все менше і менше відрізнятиметься від неперервної функції $F_n^*(x)$ поінтервального розподілу узагальнених статистичних ймовірностей, побудованої за умови, що як події розглядаються всеможливі множини $(-\infty, x)$, $x \in (-\infty, \infty)$, тобто множини $(-\infty, x)$ є елементами простору подій *S* (див. приклади 3, 4).

Розподіл узагальнених статистичних ймовірностей такий, що функція $F_n^*(x)$ неперервна (це означає, що $(-\infty, x) \in S$ для довільного $x \in (-\infty, +\infty)$), називається неперервним.

Розглянемо програму Function, яка була створена спеціально для демонстрації змін графіка функції розподілу статистичних ймовірностей.

У головному вікні програми вказуємо множину $\Omega = [a, b)$ елементарних подій (параметри *a*, *b*) та кількість проміжків (*n*). В таблиці в правому нижньому кутку програми вказуємо значення статистичних ймовірностей попадання в інтервали з прикладу 2. Натискаємо кнопку «Побудувати». В результаті отримаємо графік функції даного розподілу статистичних ймовірностей (Рис. 6).

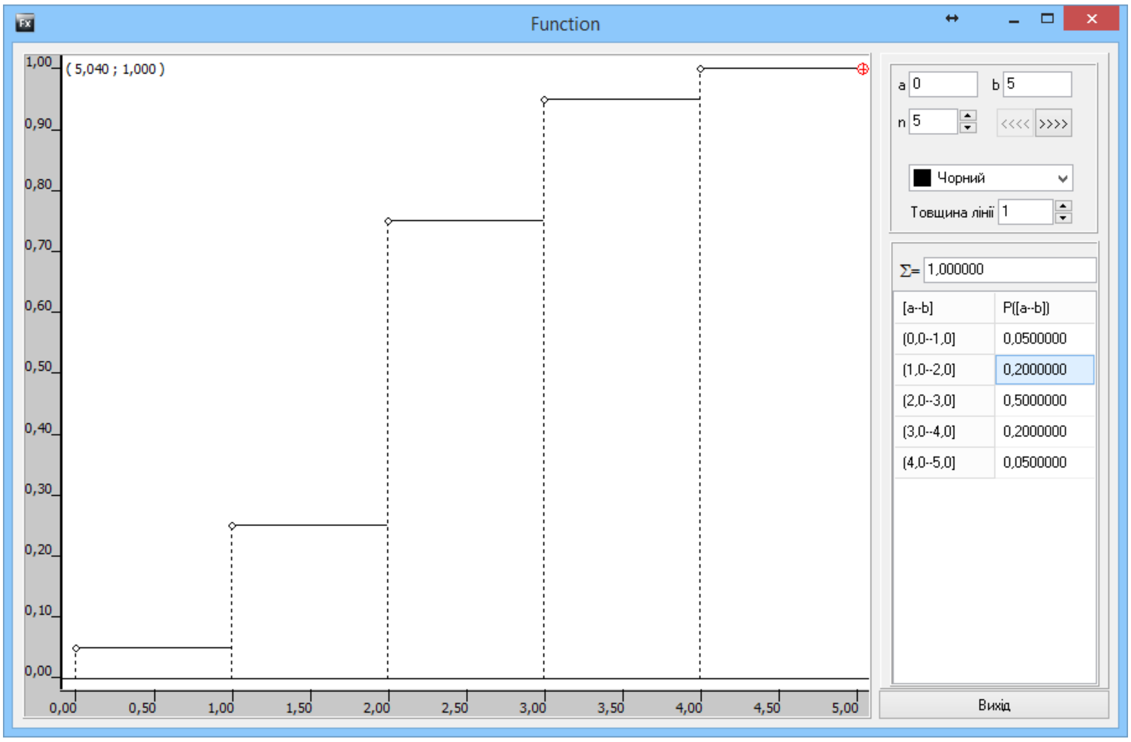

Рис. 6

Для того, щоб поділити множину $\Omega = [0, 5)$ на 25 інтервалів довжиною 0.2, як це показано в прикладі 3, змінюємо значення кількості інтервалів на 25 (параметр *n*) і натискаємо кнопку >>>>. Результат показано на Рис. 7.

Легко бачити, що при зменшенні довжини інтервалів графік функції інтервального розподілу наближатиметься до графіка функції неперервного розподілу ймовірностей, зокрема статистичних (Рис. 8).

Отже, не завжди за функцією розподілу статистичних ймовірностей можна визначити тип розподілу. Це залежить від структури подій $A \in S$ і простору подій *S*, на якому задана ймовірнісна міра *P*.

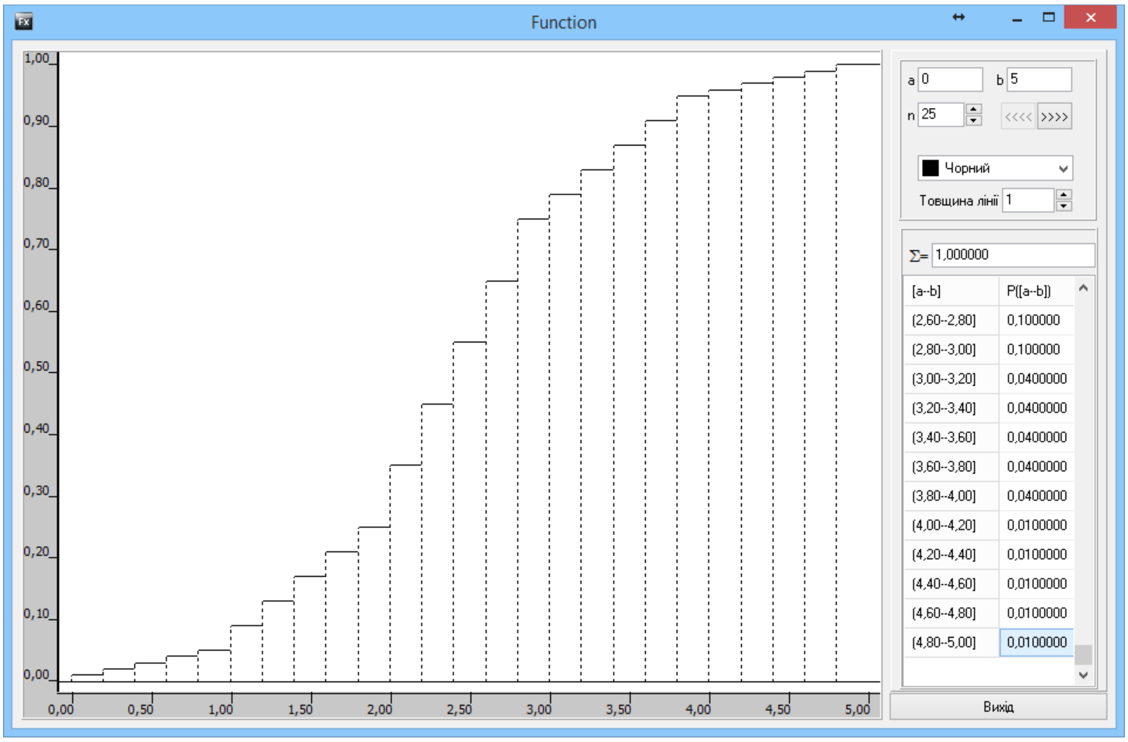

Рис. 7

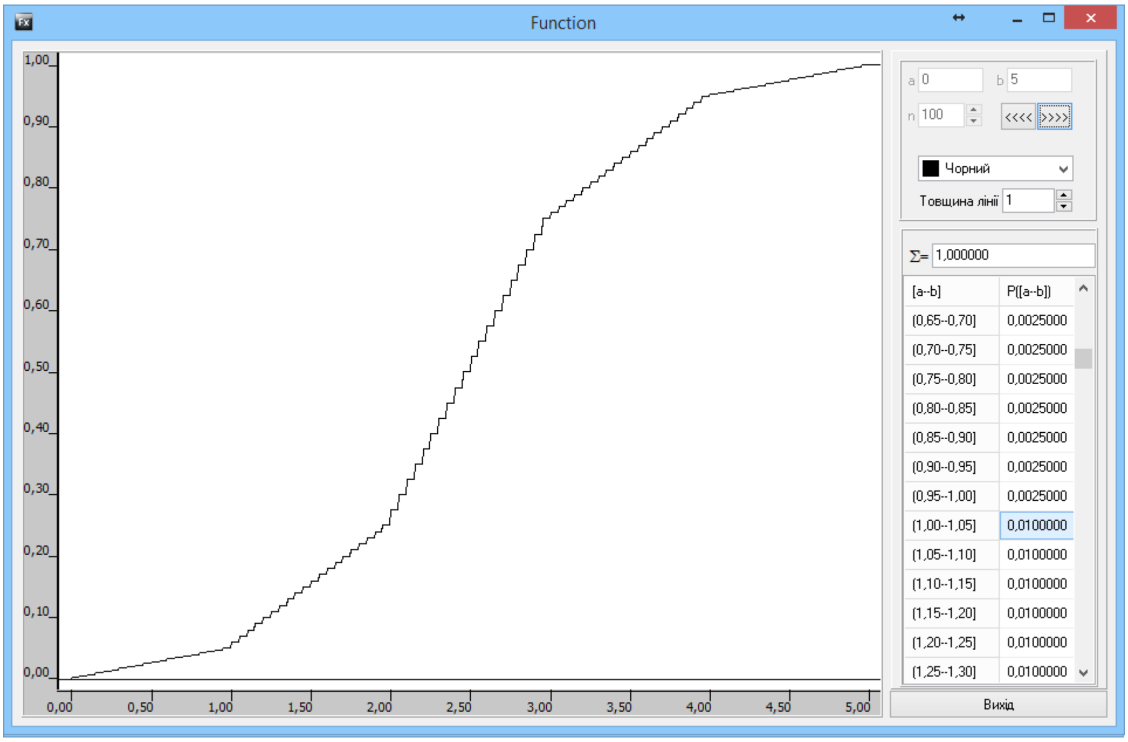

Рис. 8

Використання відповідного програмного забезпечення дозволяє полегшити сприйняття теоретичних положень шкільного курсу стохастики. До того ж, діяльність вчителя та учня, опосередкована комп'ютером, сприяє розв'язуванню проблеми формування у здібних учнів продуктивних та творчих математичних умінь, поглибленню професійної спрямованості навчання математичних дисциплін.

Практика свідчить, що пакети програм, подібні до GRAN, є досить зручним засобом унаочнення навчального матеріалу та виконання конкретних завдань під час вивчення курсу стохастики в школі.

Використання засобів сучасних ІКТ в процесі навчання стохастики дає змогу вчителеві приділити більше уваги постановці задач, дослідженню розв'язків, виявленню закономірностей та причинно-наслідкових зв'язків перебігу різноманітних процесів і проявів явищ, переклавши на комп'ютер технічні та нецікаві рутинні операції.

Література

1. Математика з комп'ютером: Посібник для вчителів / М.І. Жалдак, Ю.В. Горошко, Є.Ф. Вінниченко. – Київ: Видавництво НПУ імені М.П. Драгоманова, 2008. – 280 с.
2. Початки стохастики. Факультативний курс для учнів старшої школи / М.І. Жалдак, Г.О. Михалін, І.М. Біляй. – Київ: Видавництво НПУ імені М.П. Драгоманова, 2014. – 162 с.
3. Стохастика: Посібник для вчителів / М.І. Жалдак, І.М. Біляй. – Київ: Видавництво НПУ імені М.П. Драгоманова, 2013. – 302 с.

Коневщинська О.Е.
Інститут інформаційних технологій і засобів навчання НАПН України

Університетський веб-сайт як засіб інформаційно-комунікаційної взаємодії суб'єктів навчальної діяльності

З метою орієнтації студентів в освітньому просторі вищі навчальні заклади створюють веб-сайти, на яких розміщують відомості про заклад, його науково-дослідну діяльність, напрями підготовки, професорсько-викладацький склад, вступні вимоги до абітурієнтів, навчально-методичні матеріали для студентів, різні науково-практичні заходи тощо [11].

Дослідження засобів інформаційної та комунікаційної взаємодії суб'єктів освітньої діяльності, зокрема сайтів державних університетів, дає можливість проаналізувати контент цих ресурсів у професійному, нормативному та адміністративному напрямі, визначити рівень впливу використання розроблених ресурсів на цільову аудиторію у створеному інформаційно-освітньому середовищі.

У зв'язку з соціально-культурними змінами у суспільстві, організація взаємодії між установами та зв'язок суб'єктів освітньої діяльності є пріоритетним напрямом на шляху впровадження інформаційно-комунікаційних технологій (ІКТ) та створення мережі інформаційних інфраструктур за рахунок використання сучасних засобів і каналів зв'язку[4].

Серед відомих вітчизняних науковців, які досліджують зазначені проблеми виокремимо В. Ю. Бикова, О. А. Буйницьку, М. Г. Ятковську, О. О. Гриценчук, Н. П. Задорожну, О. Ю. Мар'їну, І. С. Малицьку, Т. К. Носенко, О.П. Пінчук, Є.Н. Питель, В. С. Парненко, Л. В. Савенкову, Ю. Я. Сікору, А. Б. Ясько та ін. У роботах зазначених дослідників визначено роль і місце сучасних ІКТ в процесі розроблення освітніх ресурсів, висвітлено інтеграцію дизайн-ергономічних складників та функціонального комфорту ергодизайнерсткихрішень, описано методи і технології управління контентом університетських сайтів, досліджено сучасні форми взаємодії суб'єктів освітньої діяльності.

Традиційно інформаційний взаємообмін відбувається між суб'єктами освітнього процесу (студентом і викладачем, а також студентів між собою), які мають можливість здійснювати зворотний зв'язок. Із появою комп'ютеризованих засобів навчання для підтримки інформаційної взаємодії використовуються засоби навчання, що функціонують на базі інформаційно-комунікаційних технологій. На даний період, коли є можливість використання розподіленого інформаційного ресурсу (наприклад, освітніх сайтів), інформаційна взаємодія (зі зворотним зв'язком) може здійснюватися з кількома партнерами, в різних режимах роботи в Інтернет, а в перспективі – в освітньому просторі.

Обмін повідомленнями між двома суб'єктами освітнього процесу було обмежено на локальному рівні. Інформаційна та комунікаційна взаємодія, обмін відомостями здійснювався в межах конкретного навчального матеріалу від викладача до студента, враховуючи зворотній зв'язок. Викладач пояснює, студент відповідає на питання лектора і так демонструє, про що він дізнався.

Створення інформаційно освітнього середовища навчання студентів залежить від навчальних потреб та рівня готовності до інформаційної взаємодії. На даний час, з появою можливостей використання потужних інформаційних освітніх ресурсів, локальних і глобальних мереж, зокрема університетських веб-сайтів, інформаційна та комунікаційна взаємодія є прерогативою вибору не тільки викладача, а й студента.

Як зазначає В. Б. Биков, поява ІКТ, швидкий розвиток інструментів і технологій, у тому числі цифрового й оптичного волокна, їх широке впровадження у всі сфери суспільного життя, надало нові, більш продуктивні можливості електронного опрацювання даних [3].

Отже, сайт сучасного вищого навчального закладу, будучи свого роду "візитною карткою" вузу в мережі ресурсів Інтернет, сьогодні використовується для виконання достатньо великої кількості завдань щодо розміщення різного роду повідомлень для відвідувачів. На ньому повиннні не тільки відображатися відомості, що стосуються основних сфер діяльності навчального закладу, подаватися офіційні, навчально-методичні, нормативні й інші відомості, призначені як для зовнішнього, так і для внутрішнього користувача, але він має відповідати вимогам, що пред'являються до сучасних веб-