На рисунку 5 наведено схему укладених у 2017 році договорів пілотного проекту впровадження дуальної системи навчання магістрів 1-го і 2-го року навчання інформатичних спеціальностей між Національним педагогічним університетом імені М.П. Драгоманова і середніми навчальними закладами міста Києва і Київської області.

Безперечно дуальна система навчання є одним з ефективних напрямів реформування вищої освіти в Україні, хоча на сьогодні система освіти в Україні ще недосить адаптована до реалізації дуальної системи навчання за класичними німецькими зразками у зв'язку з неготовністю роботодавців брати активну участь у підготовці і навчанні майбутніх фахівців. Незважаючи на це, взаємодія і діалог керівників, викладачів, студентів вищих навчальних закладів і потенційних роботодавців повинні бути налагоджені і постійно розширюватися в різних формах і напрямах, особливо в тих галузях, де є позитивні результати.

Список використаних джерел

1. Вища дуальна школа Гера-Айзенах [Електронний ресурс] – Режим доступу: www.dhge.de
2. Жалдак М.І. Педагогічно виважене управління навчальною діяльністю – основа досконалості результатів навчання // Науковий часопис НПУ імені М.П. Драгоманова. Серія № 2 Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання: Зб. наук. праць / Редрада. – К. НПУ імені М.П. Драгоманова, 2017. – №19(26). – С. 8-13.
3. Кородін М. Перспективний трикутник. Німецький досвід дуального навчання може знадобитися українським закладам// Освіта України, 2017. – № 38.
4. Осипчук Н. Дуальна освіта на українському ґрунті// Всеукраїнський громадсько-політичний тижневик «Освіта», 2017. – №38-39.
5. Проект концепції впровадження дуальної освіти [Електронний ресурс] – Режим доступу: mon.gov.ua/.../uprovadzhennya-dualnoyi-osviti-u-vnz-potre

О некоторых аспектах дуальной системы обучения студентов информатических специальностей педагогических университетов

Н. Н. Кузьмина, А.В. Кузьмин

Аннотация. В статье рассматриваются основные характеристики дуальной системы обучения. Дуальное образование – это совмещение студентом базового теоретического обучения в высшем учебном заведении с практической работой на предприятии в соответствии с выбранной специальностью. Приведен пример реализации классической дуальной системы обучения в Германии, в DHGE − Высшей дуальной школе Гера-Айзенах. Рассматриваются перспективы внедрения дуального образования в Украине, в частности для студентов информатических специальностей педагогических университетов.

Ключевые слова: дуальная система обучения, DHGE – Высшая дуальная школа Гера-Айзенах, пилотный проект.

About some aspects of dual system of education for syudents of informatics specialties of pedagogical universities

N. Kuzmina, A. Kuzmin

Resume. The article describes the main characteristics of the dual system of education. The dual education is the combination of basic theoretical disciplines taught at a higher education establishment with a practical work of a student at an enterprise according to his or her specialty. It gives the example of implementing a classical dual system of education in Germany, at DHGE − Gera-Eisenach Dual School of Higher Education. It studies the prospects of implementing dual education in Ukraine, in particular for students of Informatics specialties of pedagogical universities.

Keywords: dual system of education, DHGE – Gera-Eisenach Dual School of Higher Education, pilot project.

УДК 517.521:519.856

М.І. Жалдак[1], Г.О. Михалін[2]
[1]академік НАПН України,
доктор педагогічних наук, професор
Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова
[2]доктор педагогічних наук, професор
Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова

Деякі застосування тауберових теорем до закону великих чисел

Анотація. В статті розглядаються окремі питання стосовно закону великих чисел в теорії ймовірностей та коректності означення поняття ймовірності випадкової події.

Ключові слова: стохастика, ймовірність, тауберови теореми.

Через поняття границі послідовності x_n, $n \in N$, точок даного нормованого простору задається певне відображення сукупності збіжних послідовностей членів цього простору у цей самий простір.

У зв'язку з цим будь-яке відображення певної сукупності M послідовностей членів даного нормованого простору у цей простір називають *методом підсумовування послідовностей із сукупності* M. В такому разі, якщо послідовності $(x_n) \in M$ відповідає елемент a, кажуть, що ця *послідовність підсумовується за даним методом до* a.

Звичайну збіжність послідовності називають *одиничним методом підсумовування* і позначають $I - \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

У випадку, коли M співпадає із сукупністю послідовностей x_k, $k \in N$, для яких є збіжними послідовності $y_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} x_k$, $n \in N$, метод підсумовування називають *методом середніх арифметичних* або $(c, 1)$-методом, позначають $(c,1) - \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ і кажуть, що *послідовність* (x_k) *підсумовується за методом* $(c, 1)$ *до елемента* $a = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ даного нормованого простору.

Метод підсумовування називають *регулярним*, якщо за ним підсумовується кожна збіжна послідовність, причому до її границі.

Взагалі кажучи, з умови, що дана послідовність підсумовується за даним методом, не випливає її збіжність. Тому виникає питання: *за яких додаткових умов* (їх називають *тауберовими умовами*) *з умови підсумовування послідовності* (x_n) *за даним регулярним методом до елемента а випливає збіжність* (x_n) *до а*?

Теореми, в яких стверджується, що певні умови є тауберовими для даного методу підсумовування, називають *тауберовими теоремами*.

У даній статті буде розглянуто низку тауберових теорем для методу середніх арифметичних та проілюстровано деякі застосування цих теорем до закону великих чисел – одного з основних законів теорії ймовірностей (стохастики), яка є вагомою підвалиною сучасної інформатики [12].

1. Поняття *D*-точки послідовності. Для простоти у цій статті розглядатимемо лише дійснозначні послідовності x_k, $k \in N$.

Легко бачити, що *метод середніх арифметичних є регулярним методом підсумовування*. Разом з тим за цим методом підсумовується до 0 розбіжна послідовність $(-1)^n$, $n \in N$, а тому питання щодо існування тауберових умов для $(c,1)$ – методу є *змістовним*.

Оскільки умова $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} x_k \to a$, коли $n \to \infty$, є рівносильною тому, що $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}(x_k - a) \to 0$, коли $n \to \infty$, дослідимо, *за яких умов послідовність напевно не може підсумовуватися до нуля, якщо вона не є збіжною до нуля*.

Якщо послідовність x_n, $n \in N$, не є збіжною до 0, то можливі три випадки:

1) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n > 0$, зокрема $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$;

2) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n < 0$ зокрема $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$;

3) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n \le 0 \le \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$, $\underline{\lim} x_n < \overline{\lim} x_n$.

У випадках 1) і 2) існують $\varepsilon > 0$ та $n_0 \in N$ такі, що $x_n \ge \varepsilon$ за довільних $n \ge n_0$ у випадку 1) та $(-1)x_n \ge \varepsilon$ за довільних $n \ge n_0$ у випадку 2), а тому для всіх досить великих $n \ge n_1$ $y_n \ge \frac{\varepsilon}{2}$ у випадку 1) та $y_n \le -\frac{\varepsilon}{2}$ у випадку 2), внаслідок чого $y_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} x_k \not\to 0$, коли $n \to \infty$. Зокрема, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, можна вважати, що $\varepsilon = \varepsilon(i) \to +\infty$, $i \to \infty$, внаслідок чого послідовність (y_n) не є обмеженою, навіть є розбіжною до $+\infty$ або до $-\infty$.

Звідси виникає **гіпотеза**, що $y_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} x_k \not\to 0$ за $n \to \infty$, *коли існує* $\varepsilon > 0$ *та досить довга серія* *послідовних номерів, тобто цілочисельні відрізки* $\overline{m_i,n_i}$, $i\in N$, *такі, що* $x_k\ge\varepsilon$ *або* $(-x_k)\ge\varepsilon$, *коли* $m_i\le k\le n_i$, $i\in N$. А якщо ще $\varepsilon=\varepsilon(i)\to+\infty$ то послідовність (y_n) не є обмеженою.

Уточнюючи поняття “досить довгої серії послідовних номерів”, дістаємо наступне означення.

Означення *D*-точки. *Точку нуль назвемо D-точкою послідовності* $x_n\in(-\infty;+\infty)$, $n\in N$, *якщо існують числа* $\alpha_i\in\{-1;1\}$, $i\in N$, *та зростаючі послідовності номерів* $m_i\to+\infty$ *та* $n_i\to+\infty$ *такі, що*

$$\varliminf_{i\to\infty}\min_{m_i\le k\le n_i}\alpha_i x_k>0 \quad i \quad \varliminf_{i\to\infty}\frac{n_i}{m_i}>1.$$

Якщо крім того виявляється, що $\varlimsup\limits_{i\to\infty}\min\limits_{m_i\le k\le n_i}\alpha_i x_k=+\infty$, *то тоді ще й нескінченно віддалену точку (або просто нескінченність) називатимемо D-точкою послідовності* (x_n).

Зрозуміло, що коли нескінченність є *D*-точкою послідовності (x_n), то і нуль є *D*-точкою цієї послідовності, але не навпаки.

2. Приклади послідовностей, для яких існують *D*-точки. Розглянемо наступні класи послідовностей (x_n):

1) $\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n>0$ або $\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n<0$, зокрема $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$ або $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-\infty$;
2) $\lim\limits_{n\to\infty}n(x_n-x_{n-1})=0$;
3) $\varlimsup\limits_{n\to\infty}n\,|\,x_n-x_{n-1}\,|<+\infty$;
4) $\varliminf\limits_{n\to\infty}n(x_n-x_{n-1})>-\infty$;
5) $\lim\limits_{1<\frac{n}{m}\to1}(x_n-x_m)=0$;
6) $\varliminf\limits_{1<\frac{n}{m}\to1}(x_n-x_m)\ge0$.

Переконаємося, що, *коли задовольняється принаймні одна з умов 1)-6) і послідовність* (x_n) *не збігається до нуля (не є обмеженою), то нуль (нескінченність) є D-точкою цієї послідовності*.

За доведеним раніше точка нуль є *D*-точкою послідовності (x_n) за умови 1), а коли $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$ або $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-\infty$, то нескінченно віддалена точка є *D*-точкою (x_n).

Стосовно умов 2)-6) легко бачити, що з 2) слідує 3), з 3) слідує 4), з 4) слідує 5), а з 5) слідує 6). Тому достатньо довести сформульоване твердження за умови 6).

Отже, нехай умова 1) не виконується, а виконується умова 6). Тоді, враховуючи, що $x_n\not\to0$, коли $n\to\infty$, одержимо: $\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n<\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n$, причому $\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n<0$, або $\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n>0$.

Розглянемо випадок $\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n=b>0$. Тоді існують числа *α*, *β*, *γ* і зростаюча послідовність $m_k\to+\infty$ такі, що $\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n<\alpha<\beta<\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n$, $\alpha>0$, $\frac{m_{k+1}}{m_k}\ge\gamma>1$ за довільних *k*, причому $x_{m_k}>\beta$ за довільних *k*, а серед номерів $n\in(m_k;m_{k+1})$ за довільних *k* є такі, для яких $x_n<\alpha$ (див. рис. 1). Позначимо

$$n_k+1=\min\{n\,|\,n\in(m_k;m_{k+1}),x_n<\alpha\}.$$

Тоді $x_n\ge\alpha>0$ за довільних $n\in[m_k;n_k]$, $x_{n_k+1}<\alpha$ та

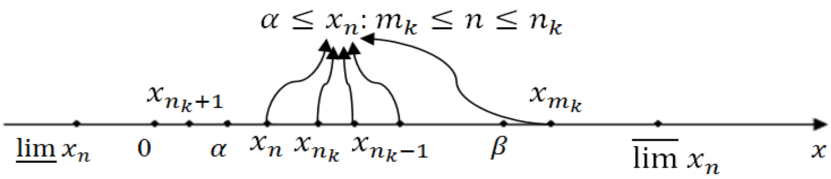

Рис. 1

за довільних *k*. Звідси випливає, що $\varliminf\limits_{k\to\infty}\frac{n_k}{m_k}>1$, оскільки в іншому разі існує зростаюча послідовність $k=k_i\to+\infty$, для якої $\frac{n_k+1}{m_k}\to1$, коли $k=k_i\to+\infty$, а тому за умовою 6)

$\varliminf\limits_{k=k_i\to\infty}(S_{n_k+1}-S_{m_k})\ge 0$, проте $S_{n_k+1}-S_{m_k}<\alpha-\beta<0$ за довільних k.

Таким чином, $\min\limits_{m_k\le n\le n_k} x_n\ge\alpha>0$ за довільних k і $\varliminf\limits_{k\to\infty}\frac{n_k}{m_k}>1$, тобто нуль є D-точкою послідовності (x_n).

Міркування для випадку $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n<0$ та для нескінченно віддаленої D-точки аналогічні.

3. *D*-властивість методу середніх арифметичних. Припустимо, що нуль є D-точкою послідовності (x_n). Тоді існують числа $\alpha_i\in\{-1;1\}$, $\beta>0$ і $\gamma>1$, а також зростаючі послідовності $m_i\to\infty$ і $n_i\to\infty$ такі, що

$$\min_{m_i\le k\le n_i}\alpha_i x_k\ge\beta>0 \text{ і } 2\ge\frac{n_i}{m_i}\ge\gamma>1 \text{ за довільних } i\in N.$$

Для всіх досить великих $i\in N$ існують номери k_i та l_i такі що $m_i<k_i<l_i<n_i$, причому $\frac{k_i}{m_i}\ge\gamma^*$, $\frac{l_i}{k_i}\ge\gamma^*$ і $\frac{n_i}{l_i}\ge\gamma^*$ для деякого числа $\gamma^*\in(1;\gamma)$. Тоді для послідовності $y_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}x_k$ можливі два випадки:

1) $\varliminf\limits_{i\to\infty}\alpha_i y_{k_i}\ge 0$ або 2) $\varliminf\limits_{i\to\infty}\alpha_i y_{k_i}<0$.

У випадку 1) для всіх $n\in\overline{l_i,n_i}$ та всіх досить великих i буде

$$\alpha_i y_n=\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{k_i}\alpha_i x_k+\sum_{k=k_i+1}^{n}\alpha_i x_k\right)=\frac{k_i}{n}y_{k_i}\alpha_i+\frac{1}{n}\sum_{k=k_i+1}^{n}\alpha_i x_k\ge\frac{k_i}{n}y_{k_i}\alpha_i+\beta\left(1-\frac{k_i}{n}\right)\ge$$

$$\ge\frac{k_i}{n}y_{k_i}\alpha_i+\beta\left(1-\frac{1}{\gamma^*}\right)\ge\frac{1}{2}\beta\left(1-\frac{1}{\gamma^*}\right).$$

Звідси випливає, що

$$\varliminf_{i\to\infty}\min_{l_i\le k\le n_i}\alpha_i y_n>0 \text{ і } \varliminf_{i\to\infty}\frac{n_i}{l_i}>1,$$

тобто нуль є D-точкою послідовності (y_n).

У випадку 2) можна вважати, що існує $\delta>0$ і підпослідовність $i=i(\nu)$, $\nu\in N$, для якої $y_{k_i}\alpha_i\le-\delta<0$, коли $i=i(\nu)$, $\nu\in N$.

Зрозуміло, що для таких $i=i(\nu)$, $\nu\in N$, та $n\in\overline{m_i,k_i}$ має місце

$$n\,y_n\alpha_i=\sum_{k=1}^{n}\alpha_i x_i\le\sum_{k=1}^{k_i}\alpha_i x_i,$$

тобто $y_n\alpha_i\le\frac{k_i}{n}y_{k_i}\alpha_i\le-\delta$.

Тому

$$\min_{m_i\le n\le k_i}(-\alpha_i)y_n\ge\delta>0 \text{ та } \frac{k_i}{m_i}\ge\gamma^*>1 \text{ за довільних } i=i(\nu),\ \nu\in N.$$

Це означає, що і у випадку 2) нуль є D-точкою послідовності (y_n).

Аналогічно можна довести, що коли нескінченність є D-точкою послідовності x_n, то вона є також і D-точкою послідовності $(y_n)=(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}x_k)$.

Таким чином, доведена наступна теорема.

Теорема (*D*-властивість методу середніх арифметичних). *Якщо нуль* (*нескінченність*) *є D-точкою послідовності* (x_n), *то нуль* (*нескінченність*) *є D-точкою і послідовності* $(y_n)=(\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}x_k)$.

Наслідок. *Якщо нуль* (*нескінченність*) *є D-точкою послідовності* (x_n), *то середні арифметичні цієї послідовності не можуть збігатися до нуля* (*не можуть бути обмеженими*).

4. Тауберови теореми для методу середніх арифметичних. Перевіримо, чи є тауберовими умовами для методу середніх арифметичних умови 2)-6) пункту 2.

Зрозуміло, що коли стосовно послідовності (x_n) задовільняється якась із заданих умов 2)-6), то для будь-якого числа a стосовно послідовності ($x_n - a$) також задовільняється ця умова.

Нехай послідовність (x_n) підсумовується за методом середніх арифметичних до числа a, тобто $y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \to a$, коли $n \to \infty$. Тоді $y_n - a = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - a) \to 0$, коли $n \to \infty$.

Якщо припустити, що стосовно (x_n) (а тому і стосовно ($x_n - a$)) задовільняється якась з умов 2)-6) і $x_n \not\to a$, коли $n \to \infty$, тобто $x_n - a \not\to 0$, коли $n \to \infty$, то внаслідок твердження пункту 2 нуль буде D-точкою послідовності ($x_n - a$).

Звідси за наслідком з D-властивості методу середніх арифметичних дістаємо неможливість збіжності до нуля послідовності ($y_n - a$). А за умовою $y_n - a \to 0$, коли $n \to \infty$.

Дістали суперечність, згідно з якою $x_n \to a$, коли $n \to \infty$.

Аналогічно переконуємося в обмеженості послідовності (x_n), коли обмежені її середні арифметичні та виконується якась з умов 2)-6).

Таким чином, правильне наступне твердження.

Теорема. *Нехай стосовно послідовності* (x_n) *задовільняється якась з умов 2)-6), а її середні арифметичні є збіжними до а* (*є обмеженими*). *Тоді послідовність* (x_n) *також є збіжною до а* (*є обмеженою*).

5. Застосування тауберових теорем до закону великих чисел. Розглянемо послідовність ймовірнісних просторів (Ω, S, P_i), $i \in N$, пов'язаних із схемою Пуассона повторних незалежних випробувань, і утворимо відповідний добуток цих просторів, тобто $(\tilde{\Omega}, \tilde{S}, \tilde{P})$.

Тоді для довільної фіксованої події $A \in S$ можна утворити події $A_i \in \tilde{S}$ – відбування події A в i-му випробуванні з ймовірністю $P_i(A) = p_i = \tilde{P}(A_i)$, $i \in N$.

Якщо $X_i(\omega)$, $\omega \in \tilde{\Omega}$, – індикатори подій A_i, то X_i є випадковими величинами (стосовно $(\tilde{\Omega}, \tilde{S}, \tilde{P})$), причому $M[X_i] = p_i$, а $D[X_i] = p_1(1 - p_i)$.

Випадкову величину $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ можна тлумачити як випадкову статистичну ймовірність події A і позначати $P_n^*(A, \omega)$, $n \in N$, $\omega \in \tilde{\Omega}$.

Тоді згідно з законом великих чисел $P_n^*(A, \omega) - \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i \xrightarrow{\tilde{P}} 0$, коли $n \to \infty$, тобто $\tilde{P}(\{| P_n^*(A, \omega) - \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i | \geq \varepsilon\}) \to 0$, коли $n \to \infty$ за довільних $\varepsilon > 0$.

Природно виникає питання: *за яких умов існує число р, залежне лише від А, для якого* $\tilde{P}(\{| P_n^*(A, \omega) - p | \geq \varepsilon\}) \to 0$, коли $n \to \infty$, за довільних $\varepsilon > 0$, *тобто* $P_n^*(A, \omega) \xrightarrow{\tilde{P}} p$, коли $n \to \infty$.

6. Необхідні умови існування чисел *p*=*P*(*A*). Припустимо, що потрібне число p=P(A) існує і позначимо

$$A\left(\tfrac{\varepsilon}{2}\right) = \{\omega \mid \omega \in \tilde{\Omega},\ | P_n^*(A, \omega) - p | \geq \tfrac{\varepsilon}{2}\},\ B\left(\tfrac{\varepsilon}{2}\right) = \{\omega \mid \omega \in \tilde{\Omega},\ | P_n^*(A, \omega) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i | \geq \frac{\varepsilon}{2}\},$$

де $\varepsilon \in (0;1)$ – довільне і фіксоване. Тоді для досить великих n буде

$$\tilde{P}(\tilde{\Omega} \setminus (A\left(\tfrac{\varepsilon}{2}\right) \cup B\left(\tfrac{\varepsilon}{2}\right)) > 1 - \varepsilon > 0,$$

а тому множина $\tilde{\Omega} \setminus (\mathrm{A}\left(\tfrac{\varepsilon}{2}\right) \cup \mathrm{B}\left(\tfrac{\varepsilon}{2}\right)) \neq \varnothing$. На цій множині для всіх досить великих n задовільняються нерівності

$$P_n^*(A,\ \omega) - p | < \frac{\varepsilon}{2} \text{ і } | P_n^*(A,\ \omega) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i | < \frac{\varepsilon}{2},$$

а тому задовільняються і нерівності

$$| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i - p | \leq | \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i - P_n^*(A,\ \omega) | + | P_n^*(A,\ \omega) - p | < \varepsilon,$$

для всіх досить великих n.

Отже, *якщо потрібне число p=P(A) існує, то обов'язково* $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i \to p$, коли $n \to \infty$.

7. Достатні та необхідні і достатні умови існування числа *p=P(A)*. Припустимо тепер, що існує $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i = p$. Тоді за довільного $\varepsilon \in (0;1)$ існує $n_0 = n_0(\varepsilon)$ таке, що $|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i - p| < \frac{\varepsilon}{2}$ за довільних $n \ge n_0$. Для побудованої вище множини $\mathrm{B}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ розглянемо $\omega \in \tilde{\Omega} \setminus \mathrm{B}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$. Для таких ω дістаємо

$$|P_n^*(A,\omega) - p| \le |P_n^*(A,\omega) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i| + |\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i - p| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \text{ коли } n \ge n_0.$$

Отже, нерівність $|P_n^*(A), (\omega) - p| \ge \varepsilon$ виконується хіба що на множині $\mathrm{B}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$, а тому

$$\tilde{P}(\{|P_n^*(A,\omega) - p| \ge \varepsilon\}) \le \tilde{P}\left(\mathrm{B}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right) = \tilde{P}\left(\left\{|P_n^*(A,\omega) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i| \ge \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right) \to 0, \text{ коли } n \to \infty.$$

Таким чином, *умова існування* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i = p$ *є достатньою для того, щоб мала місце* збіжність $P_n^*(A,\omega) \xrightarrow{\tilde{P}} p$, коли $n \to \infty$.

Враховуючи доведену вище необхідність, дістаємо правильність наступного твердження.

Теорема. *Нехай задано ймовірний простій* $(\tilde{\Omega}, \tilde{S}, \tilde{P})$, *що відповідає схемі Пуассона повторних незалежних випробувань, в кожному i-му з яких подія* $A \in S$ *відбувається з ймовірністю* $P_i(A) = p_i$, $i \in N$.

Нехай також $P_n^*(A, \omega)$, $\omega \in \tilde{\Omega}$, *–статистична ймовірність події A, що відповідає першим n випробуванням.*

Тоді для того, щоб існувало число p=P(A), для якого $P_n^*(A,\omega) \xrightarrow{\tilde{P}} p$, коли $n \to \infty$, *необхідно і досить, щоб існувала границя* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i = p$.

Наслідок. *Нехай виконано умови останньої теореми і* (p_i) *задовольняє якусь тауберову умову 2)-6) пункту 2. Тоді для того, щоб існувало число p=P(A), для якого* $P_n^*(A,\omega) \xrightarrow{\tilde{P}} p$, коли $n \to \infty$, *необхідно і досить, щоб існувала границя* $\lim_{i\to\infty} p_i = p$.

Зрозуміло, що цей наслідок випливає з теорем пунктів 7 та 4.

8. Означення ймовірності за Мізесом. Припустимо, що $p_i = P_i(A)$ – відносні частоти відбування події A у перших i послідовних незалежних випробуваннях. Тоді $p_i = \frac{\mu_i}{n}$, де μ_i – кількість відбувань події A у перших i випробуваннях, а тому $0 \le \mu_{i+1} - \mu_i \le 1 \;\; \forall i \in N$. Внаслідок цього

$$|p_{i+1} - p_i| = |\frac{\mu_{i+1}}{i+1} - \frac{\mu_i}{i}| = |\frac{i(\mu_{i+1} - \mu_i) - \mu_i}{i(i+1)}| \le \frac{2}{i+1} \text{ за довільних } i \in N,$$

тобто стосовно послідовності (p_i) задовільняється тауберова умова типу 3) пункту 2.

Таким чином, *за вказаних припущень, для того, щоб існувало число p=P(A), для якого* $P_n^*(A,\omega) \xrightarrow{\tilde{P}} p$, коли $n \to \infty$, *необхідно й досить, щоб існувала границя відносних частот* $P_i(A)$ *події A, причому* $\lim_{i\to\infty} P_i(A) = p$.

Останнє твердження є теоретичним підґрунтям для того, щоб вважати одним з можливих способів задання ймовірнісної міри відоме **означення Р. Мізеса**: $P(A) = \lim_{i\to\infty} \frac{\mu_i}{i}$, *якщо ця границя існує, де* μ_i *– кількість відбувань події A у перших i проведеннях даного випробування з нескінченної серії послідовних незалежних проведень цього випробування.*

9. Межі застосувань ймовірності за Мізесом. Припустимо, що випробування задано, простір Ω визначено і простір подій S породжується за двома взаємно протилежними подіями $A \subset \Omega$ і $\overline{A} \subset \Omega$. Тоді ймовірність P на цьому просторі теоретично можна задати за рівністю $P(A) = \lim_{n\to\infty} P_n^*(A)$, де $P_n^*(A)$, $n \in N$ – відносна частота події A, визначена за результатами перших n послідовних проведень даного випробування.

Так задану ймовірність P назвемо *ймовірністю Мізеса*. Цю ймовірність теоретично можна поширити на випадок, коли простір подій S породжується за скінченною кількістю попарно несумісних подій $A_1, A_2, \ldots, A_n$, $n \geq 2$, для яких $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \Omega$.

Отже, теоретично ймовірність Мізеса можна застосовувати для побудови ймовірнісних моделей (Ω, S, P), коли простір Ω елементарних подій є скінченною множиною.

Виникає питання: «*Чи можна застосовувати ймовірність Мізеса, коли простір* Ω *елементарних подій є нескінченною множиною, причому* $\{x\}$ *є подією* за довільного $x \in \Omega$?»

Щоб відповісти на це питання, вважатимемо, що простір $\Omega = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ – зчисленний, до простору подій S входять події $E_i = \{x_i\}$, $i \in N$, а в зчисленній серії послідовних випробувань отримано такі результати:

- x_1 є результатом випробувань з номерами $n_i^{(1)}$, де $n_i^{(1)}$ – перший номер з i-ої послідовної четвірки номерів, тобто $n_i^{(1)} \in \{1, 5, 9, 13, \ldots, 1 + 4(i-1), \ldots\}$;
- x_2 є результатом перших 16 випробувань, якщо номери цих випробувань відмінні від номерів 1, 5, 9 і 13 (за яких результат був x_1); у кожних наступних 16 випробуваннях x_2 є результатом лише один раз і номер відповідного випробування є, наприклад, першим номером з відповідної шістнадцятки номерів, відмінним від номерів випробування, в яких результатом було x_1 (з таких перших номерів утворюється множина $\{18, 34, 50, \ldots, 16i + 2, \ldots\}$);
- x_3 є результатом перших 64 випробувань, якщо їх номери відмінні від номерів випробувань, у яких результатами були x_1 або x_2; у кожних наступних 64 випробуваннях x_3 є результатом лише один раз і номер відповідного випробування є першим з цих 64 номерів, відмінним від номерів випробувань, в яких відбулися x_1 або x_2 (з таких перших номерів утворюється множина $\{67, 131, \ldots, 64i + 3, \ldots\}$);
- взагалі x_k за довільного $k \in N$ є результатом перших 4^k випробувань, якщо їх номери відмінні від номерів випробувань, у яких результатами були x_i, $i \in \overline{1, (k-1)}$; у кожних наступних 4^k випробуваннях x_k є результатом лише один раз і номер відповідного випробування є першим з цих $4k$ номерів, відмінним від номерів випробувань, в яких результатами були x_i, $i \in \overline{1, (k-1)}$.

Таким чином, встановлено відповідність між результатами випробувань x_k і номерами випробувань $n_i^{(k)}$, $i \in N$, у яких ці результати мали місце. З цієї відповідності випливає, що для кожного фіксованого $i \in N$ і будь-якого номера випробування $n > 2 \cdot 4^i$ існує єдиний номер $m \geq 2$ такий, що $4^i \cdot m < n \leq (m+1) \cdot 4^i$.

У відповідних n випробуваннях результат x_i з'явиться у перших 4^i випробуваннях $n_1 < 4^i$ разів, а в наступних $n - 4^i$ випробуваннях або (m-1) разів, або m разів (у кожній серії з 4^i випробувань x_i з'явиться лише один раз). Отже, абсолютна частота результату x_i (події $\{x_i\}$) дорівнює $k_n(i)$, причому $n_1 + m - 1 \leq k_n(i) \leq n_1 + m$. Тому стосовно відносної частоти $P_n^*(x_i) = \dfrac{k_n(i)}{n}$ задовільняється нерівність $\dfrac{n_1 + m - 1}{(m+1)4^i} \leq P_n^*(x_i) \leq \dfrac{n_1 + m}{m \cdot 4^i}$.

Звідси і з нерівності $m \cdot 4^i < n \leq (m+1)4^i$ випливає, що коли $n \to \infty$, то і $m \to \infty$, а тому $P_n^*(x_i) \to \dfrac{1}{4^i}$, коли $n \to \infty$, для кожного $i \in N$.

Таким чином, для зчисленного простору $\Omega = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ і найширшого простору подій S побудовано зчисленну серію послідовних випробувань таку, що для будь-яких перших n таких випробувань визначено відносну частоту $P_n^*(x_i)$ за довільних $i \in N$, а тому визначено ймовірнісний простір (Ω, S, P_n^*), $n \in N$, причому $P_n^*(\{x_i\}) \to \dfrac{1}{4^i}$, коли $n \to \infty$, за довільних $i \in N$.

Оскільки $P_n^*(x_i) \to \dfrac{1}{4^i}$, коли $n \to \infty$, за довільних $i \in N$, то ймовірність Мізеса $P(A) = \lim\limits_{n \to \infty} P_n^*(A)$

визначена для будь-якої скінченної множини (події) $A \subset \Omega = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$ та протилежної до неї події $\overline{A}$:

$$P(A) = \sum_{x_i \in A} \lim_{n \to \infty} P_n^*(x_i)\text{, а } P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

Отже, ймовірність Мізеса визначена на сукупності S, що складається з всеможливих скінченних подій $A \subset \Omega$, та протилежних до них подій $\overline{A}$.

Зрозуміло, що сукупність S не є простором подій, оскільки $\bigcup_{k=1}^{\infty} \{x_{2k}\} \notin S$, а $\{x_{2k}\} \in S_0$ за довільних $k \in N$.

Переконаємося, що S є простором простих подій, породженим за найпростішими подіями вигляду $\{x_n\}$ та $\{x_n, x_{n+1}, ..., x_{n+i}, ...\}$, $n \in N$. Перші дві умови такого простору очевидні: $\Omega \in S$ і $\overline{A} \in S$ за довільних $A \in S$.

Щоб перевірити третю умову, візьмемо довільні множини $A \in S$ і $B \in S$. Тоді можливі два випадки:

1) обидві множини A і B скінченні;
2) принаймні одна з множин A або B є протилежною до деякої скінченної події.

У випадку 1) множина $A \bigcup B$ скінченна і тому $A \bigcup B \in S$.

У випадку 2) існує номер m, для якого $A \bigcup B \supset \{x_m, x_{m+1}, ..., x_n, ...\}$ і тому $A \bigcup B$ є доповненням до деякої скінченної множини, внаслідок чого $A \bigcup B \in S$.

Таким чином, ймовірність Мізеса визначена на просторі простих подій S_0, що не є простором подій, і ця ймовірність не є зчисленно адитивною на S, оскільки $P(\Omega) = 1 \neq \sum_{i=1}^{\infty} P(x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{4^i} = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$.

Зауважимо також, що для множини $\{x_2, x_4, ..., x_{2k}, ...\}$ ймовірність Мізеса не існує, тобто послідовність $P_n^*(\{x_2, x_4, ..., x_{2n}, ...\})$ є розбіжною. Це випливає з того, що в результаті $n = 4^{2k}$ та $m = 4^{2k+1}$ випробувань дістанемо абсолютні частоти $k_n(\{x_2, x_4, ..., x_{2n}, ...\}) = \; = k_n(\{x_2, x_4, ..., x_{2k}\}) = m_k$ та $k_m(\{x_2, x_4, ..., x_{2n}, ...\}) = k_m(\{x_2, x_4, ..., x_{2k}\}) = m_k + 1$. Тому підпослідовності

$$P_n(\{x_2, x_4, ..., x_{2n}, ...\}) = \frac{m_k}{4^{2k}} \text{ та } P_m(\{x_2, x_4, ..., x_{2n}, ...\}) = \frac{m_k + 1}{4^{2k+1}} = \frac{1}{4}\frac{m_k}{4^{2k}} + \frac{1}{4^{2k+1}}$$

не можуть збігатися до однієї і тієї самої границі, оскільки за побудовою $\frac{m_k}{4^{2k}} \geq P_n(x_2) > \frac{1}{4^2}$ за довільних $k \in N$.

Отже, навіть теоретичні застосування ймовірності Мізеса обмежуються лише просторами простих подій, причому, взагалі кажучи, існування ймовірності Мізеса для кожної події $\{x_k\}$, $k \in N$, не гарантує існування такої ймовірності для кожної зчисленної події $A \subset \{x_1, x_2, ..., x_k, ...\}$. Саме тому означення ймовірності за Мізесом не може бути логічною основою для побудови стрункої і потужної теорії, якою є сучасна теорія ймовірностей, що ґрунтується на аксіомах А.М. Колмогорова. Разом з тим для багатьох практичних застосувань, коли простір подій є скінченним, означення Р. Мізеса може бути одним із способів задання ймовірнісних мір.

Деякі висновки. Зрозуміло, що означення Р. Мізеса, як і переважна більшість інших означень ймовірності, є суто теоретичним, оскільки на практиці неможливо напевно стверджувати, що спостережені відносні частоти $P_n(A)$ даної події A дійсно збігаються (чи не збігаються) до певного числа p. Відповідні висновки відображають лише спостережену тенденцію і завжди гіпотетичні. Саме тому за допомогою усіх ймовірнісних моделей, що використовуються на практиці, можна робити лише наближені висновки щодо можливої частоти відбування реальних випадкових подій. Лише на практиці з'ясовується, наскільки ефективною є застосована модель і ця ефективність перевіряється саме за допомогою статистичних ймовірностей (відносних частот) досліджуваних реальних подій. Враховуючи це, у процесі навчання теорії ймовірностей і учнів середніх шкіл, і майбутніх вчителів, і студентів усіх інших спеціальностей треба систематично звертати увагу на статистичну ймовірність, без якої на практиці неможливо побудувати ефективну ймовірнісну модель для будь-якого реального стохастичного випробування.

Історичні відомості

Назви «тауберова теорема» і «тауберові умови» пішли від імені австрійського математика Альфреда Таубера (1866-1942), який в 1897 році довів першу таку теорему для методу підсумовування Абеля-Пуассона, сильнішого за метод середніх арифметичних. Його результат узагальнювався в різних напрямках багатьма математиками.

Так у 1910 році англійський математик Г. Харді (1877-1947) довів, що умова $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, n\,|\,x_n - x_{n-1}\,| < +\infty$ є тауберовою для методів Чезаро (методів $(c,\ \alpha)$), частинним випадком яких (коли $\alpha = 1$) є метод середніх арифметичних (тобто метод (c, 1)).

Німецький математик Едмунд Ландау (1877-1938) у 1910 році довів, що умову Г. Харді можна замінити слабкішою: $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, n(x_n - x_{n-1}) > -\infty$.

У 1924 році німецький математик Ерхард Шмідт (1876-1959) запропонував ще слабкішу тауберову умову $\underline{\lim\limits_{1<\frac{n}{m}\to 1}}\ (S_n - S_m) \geq 0$.

Тауберові умови досліджував відомий математик і педагог Микола Олексійович Давидов (1917-1998), та його учні.

Так, у 1956 році М.О. Давидов запропонував новий метод доведення туберових теорем – метод (*C*)-точок. Пізніше в роботах учнів М.О. Давидова поняття (*C*)-точки послідовності було суттєво узагальнено і це узагальнення поняття на честь М.О. Давидова було названо *D*-точкою. Таке узагальнення дозволило значно спростити доведення всіх відомих тауберових теорем для методів Чезаро та узагальнити всі ці теореми.

Список використаних джерел

1. Боровков А.А. Теория вероятностей. – М.: Изд-во «Эдиториал УРСС», 1999. – 472 с.
2. Гихман И.И., Скороход А.В., Ядренко .И. Теория вероятностей и математическая статистика. – К.: Вища школа, 1979. – 408 с.
3. Гнеденко Б.В. Развитие теории вероятностей / Очерки по истории математики. – М., Изд-во МГУ, 1997. – с. 247-338.
4. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Общая теория. – М.: Изд-во Иностранной литературы, 1962. – 896 с.
5. Жалдак М.І., Кузьміна Н.М., Михалін Г.О. Теорія ймовірностей і математична статистика. – К.: НПУ ім. М.П. Драгоманова, 2017. – 707 с.
6. Жалдак М.І., Михалін Г.О., Деканов С.Я. Математичний аналіз. Функції багатьох змінних. – К.: НПУ ім. М.П. Драгоманова, 2007. – 430 с.
7. Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. – М.: Наука. 1974. – 120 с.
8. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функціонального анали за. – М.: наука, 1972. – 496 с.
9. Михалін Г.О. Елементи теорії інтеграла та міри. – К.: НПУ ім. М.П. Драгоманова, 2000. – 266 с.
10. Невё Ж. Математические основы теории вероятностей. – М.: Мир, 1962. – 310 с.
11. Феллер В. Введение в теорію вероятностей и ее приложения. Том 1 и 2. – М.: «Мир», 1984. – т.1, 528 с. – т.2., 752 с.
12. Грэхем Р, Кнут Д, Паташник О. Конкретная математика. Основание информатики. – Москва. «Мир». Бином. Лаборатория знаний. 2006. – 704 с.

Некоторые приложения тауберових теорем к закону больших чисел

М.И. Жалдак, Г.О. Михалин

Аннотация. В статье рассматриваются отдельные вопросы относительно закона больших чисел в теории вероятностей, корректности определения понятия вероятности случайного события.

Ключевые слова: стохастика, вероятность, тауберовы теоремы.

Some applications of Tauberian theorems to the law of large numbers

M.I. Zhaldak, G.O. Michalin

Resume. The article deals with separate questions concerning the law of large numbers in the theory of probabilities, the correctness of the definition of the concept of the probability of a random event.

Keywords: stochastics, probability, tauber theorem.