РАЗВИТИЕ МЫШЛЕНИЯ УЧАЩИХСЯ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЧИСЛОВЫХ ЗНАЧЕНИЙ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ

Маврова Р. П.,
доцент, доктор,
Пловдивский университет им. Паисия Хилендарского,
Бойкина Д. В.,
гл. ассистент, доктор,
Пловдивский университет им. Паисия Хилендарского

У даній роботі ми акцентуємо увагу на групах задач на нерівності, розв'язання яких суттєво допомагає розвитку мислення учнів.

В настоящей разработке акцент поставлен на группах задач о неравенствах, решение которых существенно помогает развитию мышления учащихся.

In the paper the accent is placed on three groups of problems with inequalities, the solving of which contributes essentially to the development of students' thinking.

Успешное усвоение математики в школе является важной предпосылкой для изучения других учебных предметов и для поступления в ВУЗ с изучением математики. Поэтому развитие математического мышления учащихся весьма актульно. Чтобы достичь эту важной цели обучения, нужно использовать разнообразные методы мышления – сравнение, анализирование, синтезирование, абстрагирование, обобщение. Для их реализации эффективным методическим приемом является систематическое рассмотрение нестандартных задач, при решении которых нужно проявлять находчивость.

Известно, что одним из средств, дающих наибольший эффект в обучении математике, являются задачи. По словам Л.М. Фридмана, „общее умение, общий подход к решению любых задач должен сохраниться у каждого выпускника школы надолго, на всю жизнь. Ибо общий подход к решению произвольных математических задач есть, по своей сути, модель разумного подхода к решению любых бытовых, практических, научных, технических и иных задач, которые будут повседневно встречаться человеку в его деятельности на протежении всей его жизни. Ведь жить – это значит решать задачи!“ [3, с. 85].

Особое значение для развития мышления имеют нестандартные задачи. Для их решения необходимо, чтобы учащийся проявлял ряд качеств мышления, как находчивость, гибкость, высокую логическую культуру и т.д.

Имея в виду все это, в настоящей статье мы рассматриваем как задачи на доказательство, так и задачи на решение неравенств, при которых используются конкретные числовые значения трансцендентных функций. Для реализации этой цели мы сгруппировали задачи следующим образом.

I группа. Задачи на доказательство неравенств.

Задача 1. Доказать неравенство $a(a+2b) > \log_3 \frac{1}{2} - \sin 2 - b^2$.

Решение. Запишем данное неравенство в виде $a^2 + 2ab + b^2 > \log_3 \frac{1}{2} - \sin 2 \quad \Leftrightarrow$

$$(a+b)^2 > \log_3 \frac{1}{2} - \sin 2 \ . \qquad (1)$$

Левая сторона неравенства (1) неотрицательна. Исследуем числовые значения трансцендентных функций „логарифм" и „синус". Так как $\log_3 \frac{1}{2} < 0$, а $\sin 2 > 0$, то правая сторона неравенства (1) отрицательна. Следовательно, можно сделать вывод, что неравенство (1), а значит, и данное неравенство выполнено для всех действительных a и b.

Аналогичным способом рассуждаем и при доказательстве неравенств в следующей задаче.

Задача 2. Доказать неравенство:

а) $\log^2_{\frac{1}{5}} 6 - \sin 5 > \log_5 36.\cos 7 - \cos^2 7$; б) $a^2 + \log_{0,5}{}^4 3 > 2a.\log_2{}^2 3 - \cos 1{,}5$;

в) $\log_3 2 + \sin 2 + \cos 6 > 2\sqrt{3} - 4$.

Решение. При доказательстве неравенства а) используем, что $\log_{\frac{1}{5}} 6 = -\log_5 6$, из чего следует равенство $\log^2_{\frac{1}{5}} 6 = \log^2_5 6$. Кроме того, $\log_5 36 = 2\log_5 6$. Тогда данное неравенство принимает следующий вид $\log^2_5 6 - 2.\log_5 6.\cos 7 + \cos^2 7 > \sin 5$. Оно эквивалентно неравенству

$$\left(\log_5 6 - \cos 7\right)^2 > \sin 5 \qquad (2)$$

Так как $\pi < 5 < 2\pi$, то $\sin 5 < 0$. Следовательно, неравенство (2) выполено.

Аналогичным способом рассуждаем и при доказательстве других неравенств в задаче 2. При б) используем, что $\log_{0,5}{}^4 3 = \frac{(\log_2 3)^4}{(\log_2 0{,}5)^4} = \frac{(\log_2 3)^4}{(-1)^4} = \log_2{}^4 3$ и $\cos 1{,}5 > 0$, так как $\cos 1{,}5 > \cos \frac{3\pi}{2} = 0$, а при в) – что $\cos 6 > 0$ и $\sin 2 > 0$.

II группа. Неравенства, содержащие трансцендентные функции с одним неизвестным.

Задача 3. Решить неравенство $\sin(x-1) + \frac{1}{\sin(x-1)} + \sqrt{5x - x^2 - 4} > 2$.

Решение. Так как множество допустимых значений (ДЗ) определяется неравенствами $\sin(x-1) \neq 0$ и $5x - x^2 - 4 \geq 0$, то рассматриваем систему $\begin{cases} \sin(x-1) \neq 0, \\ 5x - x^2 - 4 \geq 0. \end{cases}$.

Решениями второго неравенства являются все числа $x \in [1;4]$. Необходимо установить, какие значения x удовлетворяют неравенство $\sin(x-1) \neq 0$. Для этого сначала сделаем проверку при x = 1 и x = 4. Видно, что при x = 1 выполнено $\sin(x-1)=0$, из чего следует, что число 1 – недопустимое значение данного неравенства. При x=4 имеем $\sin 3 \neq 0$ и значит x=4 является допустимым значением неизвестного в данном неравенстве.

Остается проверить при $x \in (1;4)$. Так как $1 < x < 4$, то $0 < x-1 < 3$, из чего следует, что $\sin(x-1) > 0$. Следовательно, при $x \in (1;4)$ выполнены неравенства $5x - x^2 - 4 > 0$ и $\sin(x-1) + \dfrac{1}{\sin(x-1)} \geq 2$, а этого достаточно для того, чтобы данное неравенство выполнено при $x \in (1;4)$. Итак, решения неравенства в рассматриваемой задаче – все числа $x \in (1;4]$.

Задача 4. Решить неравенство $\sqrt[6]{x} + 2x^3 + \log_3(x+2) - \sqrt{1-x} < 4$.

Решение. Множество допустимых значений x данного неравенства определяется системой $\begin{cases} x \geq 0, \\ x+2 > 0, \\ 1-x \geq 0, \end{cases}$, из чего получается $0 \leq x \leq 1$. Используя непосредственную проверку, устанавливаем, что число 1 не является решением данного неравенства, потому что числовое выражение $\sqrt[6]{1} + 21^3 + \log_3\left(1+2\right) - \sqrt{1-1}$ очевидно не меньше 4. При $x \in [0;1)$ слагаемые в левой части данного неравенства меньше 1, а слагаемое $2x^3$ меньше 2. Следовательно, каждое число $x \in [0;1)$ является решением неравенства в задаче 4.

Отметим, что при поиске решения неравенств в этих двух задачах важно сообразить, что нахождение множества допустимых значений неизвестного и применение непосредственной проверки при определении знака соответствующей трансцендентной функции имеет существенное значение для открытия решения данных неравенств.

Задача 5. Решить неравенство $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{x^2 - 2x} > \sin\dfrac{11\pi}{6}$.

Решение. При решении этой задачи необходимо сообразить, что $\sin\dfrac{11\pi}{6} = -\dfrac{1}{2}$. Тогда неравенство принимает следующий вид $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{x^2 - 2x} > \log_{\frac{1}{3}} 3^{\frac{1}{2}}$. Последнее неравенство эквивалентно следующей системе

$$\begin{cases} x^2 - 2x > 0, \\ \sqrt{x^2 - 2x} < \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-2) > 0, \\ x^2 - 2x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty;0) \cup (2;+\infty), \\ x \in (-1;3). \end{cases}.$$

Следовательно, решения данного неравенства $x \in (-1;0) \cup (2;3)$.

Задача 6. Решить неравенство $\log_{\sqrt{2}} \dfrac{x^2 - 4x + \pi 3}{4} < 2\operatorname{ctg}\dfrac{3}{4}$.

Решение. Здесь тоже нужно сообразить, что численное значение правой части неравенства известно, потому что $\operatorname{ctg}\dfrac{3\pi}{4} = -1$. Следовательно, правая сторона данного неравенства равняется -2, которое можно представить следующим образом $\log_{\sqrt{2}}\frac{1}{2}$. Тогда неравенство принимает следующий вид $\log_{\sqrt{2}}\frac{x^2-4x+3}{4}<\log_{\sqrt{2}}\frac{1}{2}$.

В результате решения последнего получается, что все числа множества $x\in(2-\sqrt{3};1)\cup(3;2+\sqrt{3})$ являются решениями данного неравенства.

К этой группе включаем и следующую задачу.

Задача 7. Найти все целые решения системы неравенств

$$\begin{cases}|x|<2,\\ \sqrt{x-0,5}+\sin 2>0\end{cases}$$

Решение. Так как $\sin 2>0$ и $\sqrt{x-0,5}\geq 0$, то второе неравенство рассматриваемой системы выполнено для каждого $x\geq 0,5$. Тогда данная система эквивалентна следующей

$\left|\begin{array}{l}-2<x<2\\ x\geq 0,5\end{array}\right.$, решения которой – $x\in[0,5;2)$.

Так как ищем только целые решения, то ответ следующий x=1.

Задача 8. Решить неравенство $\log_2(2^x-1).\log_{0,5}(2^{x+1}-2)>-2$. (3)

Решение. Множество допустимых значений неизвестного x в неравенстве (3) определяется решением неравенства $2^x-1>0$, а именно $x\in(0;+\infty)$. Тогда данное неравенство (3) можно последовательно заменить эквивалентными ему неравенствами

$$\log_2(2^x-1).\log_{\frac{1}{2}}(2^x-1).2>-2\Leftrightarrow\log_2(2^x-1).\log_2(2^x-1)^{-1}.2^{-1}>-2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\log_2(2^x-1).[-\log_2(2^x-1)-\log_2 2]>-2\Leftrightarrow\ \log_2(2^x-1).[\log_2(2^x-1)+1]<2\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\log_2^2(2^x-1)+\log_2(2^x-1)-2<0.$$

Последнее неравенство квадратно по отношению к $\log_2(2^x-1)$. Делаем замену $\log_2(2^x-1)=y$ и получаем неравенство $y^2+y-2<0$, решения которого $-2<y<1$. Заменяем y и решаем двойное логарифмическое неравенство $-2<\log_2(2^x-1)<1$, т.е.

$$\log_2\frac{1}{4}<\log_2(2^x-1)<\log_2 2\Leftrightarrow\frac{1}{4}<2^x-1<2\Leftrightarrow\frac{5}{4}<2^x<3\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ 2^{\log_2 1,25}<2^x<2^{\log_2 3}\Leftrightarrow\log_2 1,25<x<\log_2 3.$$

Следовательно, решения неравенства (3) – числа $x\in(\log_2 1,25;\log_2 3)$.

III группа. Неравенства, содержащие трансцендентные функции с двумя или тремя неизвестными.

Задача 9. Решить неравенство:

а) $2^y-2\cos x+\sqrt{y-x^2-1}\leq 0$; б) $\cos x\geq y^2+\sqrt{y-x^2-1}$.

Рассмотрим только а). *Решение*. Множество допустимых значений неизвестных определяется неравенством $y - x^2 - 1 \geq 0$. Из чего следует, что $y \geq x^2 + 1 \geq 1$, т.е. $y \geq 1$. Тогда $2^y \geq 2$, а так как $-1 \leq \cos x \leq 1$, то $2^y - 2\cos x \geq 0$ для каждого x и $y \geq 1$. Следовательно, нестрогое неравенство а) выполнено только тогда, когда

$2^y - 2\cos x + \sqrt{y - x^2 - 1} = 0$, т.е. если удовлетворяется система уравнений

$\begin{cases} y - x^2 - 1 = 0, \\ 2^y - 2\cos x = 0 \end{cases}$, а это возможно только при $x = 0$ и $y = 1$.

Аналогичным способом решается и б).

Задача 10. Решить неравенство $\cos x - \sqrt{z^3} \geq y^2 + \dfrac{\pi}{3}$.

Решение. Так как $|\cos x| \leq 1$ и $\sqrt{z^3} \geq 0$, то $\cos x - \sqrt{z^3} \leq 1$. С другой стороны, очевидно, что $y^2 + \dfrac{\pi}{3} \geq \dfrac{\pi}{3} > 1$. Итак, левая часть неравенства меньше или равна 1, а правая – больше 1. Следовательно, можно сделать вывод, что неравенство не имеет решений.

Наш опыт и учебная практика показывают, что, когда используются задачи указанного типа, повышается интерес учащихся к математике. Кроме того, становится ясным, до какой степени приобретенные знания о трансцендентных функциях и их функциональных значениях усвоены с пониманием.

Список использованной литературы

1. Мерзляк, А. Г., В. Б. Полонски, М. С. Якир. Неочаквана стъпка или сто и тринадесет красиви задачи. София: Акад. изд. „Марин Дринов", 1994.– 70 с.
2. Математика в школе, 1990 – 2010 г.
3. Фридман, Л. М. Теоретические основы методики обучения математике. /Пособие для учителей, методистов и педагогических высших учебных заведений/, Московский психосоциальный институт, М.: Изд. "Флинта", 1998.– 220с.