СИСТЕМНИЙ ПІДХІД ДО НАВЧАННЯ ОСНОВАМ ГЕОМЕТРІЇ МАЙБУТНІХ ВЧИТЕЛІВ МАТЕМАТИКИ

Шаповалова Н.В.,
кандидат фіз.-мат. наук, доцент
Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова
Панченко Л.Л.,
кандидат пед. наук, доцент
Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова

У статті розглянуті мета, зміст, основні завдання та форми організації навчання основам геометрії майбутніх вчителів математики в умовах особистісно орієнтованого навчання з урахуванням навчальних можливостей студентів. Запропонована система навчання основам геометрії з використанням модульної технології та рейтингового оцінювання якості засвоєння навчального матеріалу.

В статье рассмотрены цель, содержание, основные задачи и формы организации обучения основам геометрии будущих учителей математики в условиях личностно ориентированного обучения с учётом учебных возможностей студентов. Предложена система обучения основам геометрии с использованием модульной технологии и рейтингового оценивания качества усвоения учебного материала.

The article examines the aim, substance, key tasks and ways of organization of studying the foundations of geometry by future mathematics teachers under conditions of individually oriented education with due account of students' studying capacities. The authors propose a system of studying foundations of geometry with application of module-based technology and rating method of assessing the quality of knowledge mastering by students.

В курсі основ геометрії основним завданням є виклад загальних ідей і принципів, що лежать в основі побудови всієї геометричної системи.

Принципові питання про походження аксіом, основних понять та тверджень геометрії, про їх відношення до реального простору, про роль логіки, про наукову структуру та виклад геометрії давно хвилювали математиків та філософів. Після відкриття неевклідових геометрій наукова думка зробила великий крок в питаннях наукових обґрунтувань геометрії.

Кожен педагог повинен знати історичний розвиток геометрії, її становлення як науки, логічну будову геометрії, повинен бути знайомим з її науковим обґрунтуванням, яке пов'язане з іменами Евкліда, Д. Гільберта, Г. Вейля, М.І. Лобачевського, Рімана та інших вчених. Майбутній вчитель математики повинен знати і розуміти відмінність змістовного аксіоматичного методу, який панував у науці з часів Аристотеля до другої половини XIX століття, від напівформального та формального.

Отже, зміст цього курсу полягає у вивченні аксіоматичного (дедуктивного) методу обґрунтування наукової геометричної системи, а також у можливості цього обґрунтування на основі різних аксіоматичних теорій, у вивченні нових неевклідових геометрій та їх обґрунтуванні, дослідженні їх впливу на структуру шкільного курсу геометрії.

Вивчення навчальної дисципліни «Основи геометрії» організовується на принципах кредитно-модульної системи, яка сприяє систематичній і динамічній роботі студентів над засвоєнням досить складної дисципліни, з використанням модульної технології навчання та рейтингового оцінювання якості засвоєння навчального матеріалу.

За навчальним планом спеціальності 6.040201 «Математика» вивчення курсу «Основи геометрії» передбачено протягом 5 семестру. Навчальний матеріал розділений на три модулі. Загальний обсяг дисципліни складає 3,5 залікові кредити (126 годин), що об'єднує всі види навчальної діяльності студента: аудиторні заняття (лекційні, семінарські, практичні), самостійну роботу студентів, контрольні заходи (самостійні роботи, контрольні роботи, тестові завдання, розрахункову роботу, реферат, модульний контроль, екзамен).

Самостійна робота студентів має дві складові: самостійна підготовка до аудиторних занять і підготовка до модульного контролю та екзамену.

Кожен з модулів має свою форму контролю у вигляді індивідуальних завдань, виконання яких передбачається в усному та письмовому вигляді з наступним захистом.

Модульно-рейтингова система оцінювання дозволяє врахувати, як поточну підготовку студентів до аудиторних занять, так і визначати рівень засвоєння навчального матеріалу окремого модуля. Підсумкова (екзаменаційна) оцінка виставляється за рейтинговими показниками.

Тематика індивідуальних завдань, зразки контрольних карток, перелік питань, обговорюваних під час контрольних заходів, представлені в навчальній робочій програмі. Подані матеріали дозволяють студенту самостійно планувати терміни та обсяги змістової складової навчальної діяльності, прогнозувати її результативність.

Внаслідок вивчення курсу студент повинен **знати**:

Основні поняття. Математична структура, аксіоматичний метод, інтерпретація або модель системи аксіом, абсолютна геометрія, дефект трикутника, чотирикутник Саккері, рівновеликість і рівноскладеність многокутників, рівновеликість і рівноскладеність многогранників, неевклідова геометрія Лобачевського, паралельні прямі на гіперболічній площині, розбіжні прямі, кут паралельності, стрілка кута паралельності, функція Лобачевського, еквідистанта і орицикл, сферична геометрія, еліптична геометрія Рімана.

Основні формули і теореми. П'ятий постулат Евкліда та його еквіваленти, теорема Гьоделя про неповноту формальних систем, теореми Саккері-Лежандра, теореми про рівноскладені многокутники, теореми про суму внутрішніх кутів трикутників та чотирикутників на площині Лобачевського, класифікацію прямих на площині Лобачевського, теореми про властивості кута паралельності прямих на гіперболічній площині, теорема про відстань між паралельними прямими на площині Лобачевського, теорема про функцію Лобачевського, теореми про властивості розбіжних прямих на гіперболічній площині, теореми про властивості паралельних прямих на гіперболічній площині, ознаки рівності трикутників на площині Лобачевського, теорема про серединні перпендикуляри до сторін трикутника на гіперболічній площині, теореми про властивості кривих на площині Лобачевського.

Основні вміння. Перевіряти несуперечливість, незалежність, повноту або категоричність системи аксіом. Будувати моделі системи аксіом. Доводити теореми евклідової геометрії на основі системи аксіом Д. Гільберта та на основі системи аксіом Г. Вейля, доводити теореми неевклідової геометрії М.І. Лобачевського. Будувати моделі геометрії Лобачевського.

Основи геометрії – це розділ геометрії, в якому досліджуються основні поняття геометрії, співвідношення між ними і пов'язані з ними відношення.

Основні задачі вивчення курсу основ геометрії:

1. Ознайомити з еволюцією основних геометричних ідей.
2. Осмислити елементи геометрії в її сучасному розумінні, вивчити логічну базу та її логічну структуру.
3. Вивчити елементи неевклідових геометрій.

Строга наукова побудова будь-якої математичної дисципліни повинна задовольняти таким вимогам:

1) Будь-яке твердження повинно бути серед списку аксіом або строго доведене на основі аксіом та раніше сформульованих і доведених теорем.
2) Будь-яке поняття повинно бути або в числі основних або визначене за допомогою основних та раніш визначених понять.

Метод викладання науки на основі цих вимог називається *дедуктивним* або *аксіоматичним*.

Отже, аксіоматична побудова наукової теорії – це метод побудови теорії, при якому в основі теорії покладають деякі початкові (вихідні) неозначувані поняття, формулюють певні закони, в яких висловлюються властивості цих основних понять, а всі інші поняття і закони отримують як логічні наслідки. Твердження, які приймаються без доведень, називаються *аксіомами*. Твердження, які ми отримали з аксіом та раніше доведених тверджень шляхом логічного висновку, називаються *теоремами*. Визначення, що встановлюють зміст нового терміну, виходячи з відомих понять, називаються *означеннями*. Ті поняття, які при побудові геометрії або будь-якого іншого розділу математики не визначаються, називаються *основними*. Крім основних неозначуваних понять, є ще відношення між ними, що називаються *основними* відношеннями.

Аксіоматичний метод полягає в тому, що:

1. Перераховуються і називаються основні поняття.
2. Формулюються певні закони, в яких висловлюються властивості цих основних понять (аксіоми).
3. Формулюється ряд понять, які в список основних понять не ввійшли, які ми означуємо, користуючись основними поняттями і аксіомами (означення).
4. Формулюється ряд тверджень, які ми доводимо, користуючись правилами логіки і раніше доведеними твердженнями (теореми).

Інтерпретацією основних понять є надання їм певного змісту, побудова моделей певної теорії. Для того, щоб система аксіом служила науковим обґрунтуванням певної теорії, необхідно, щоб виконувались три вимоги:

1) несуперечливість (сумісність) системи аксіом;
2) незалежність (мінімальність) системи аксіом;
3) повнота або категоричність системи аксіом.

Якщо засобами математичної теорії можна виявити чи вивести взаємно суперечливі твердження, то теорія або аксіоматика є *внутрішньо суперечливою*, якщо ж взаємно суперечливих тверджень не можна вивести, то теорія – *несуперечлива*. Доводиться вимога несуперечливості теорії шляхом побудови її моделі на базі тієї наукової теорії, несуперечливість якої була встановлена раніше.

Вимога незалежності полягає в тому, щоб у список аксіом не ввійшло таке твердження, яке є наслідком інших.

Вимога повноти полягає в тому, що маючи певну систему аксіом, ми повинні довести істинність чи хибність будь-якого твердження. Іншими словами, аксіоматична теорія є повною, якщо будь-яке твердження, яке сформульоване в термінах цієї теорії можна або довести, або спростувати. Доводиться вимога повноти шляхом встановлення ізоморфізму між двома різними моделями відповідної системи аксіом. Тобто, для доведення дедуктивної повноти аксіоматичної теорії достатньо довести ізоморфізм будь-яких її двох моделей.

Система аксіом називається *категоричною*, якщо будь-які її моделі ізоморфні. Якщо система аксіом категорична, то вона є дедуктивно повною. Але з повноти системи аксіом її категоричність не випливає.

Теорія, яка відповідає цим вимогам називається *змістовною* аксіоматичною теорією. На відміну від змістовних аксіоматичних теорій існують формальні аксіоматичні теорії. В них додаються правила логічного виведення.

Отже, основи геометрії – це наука, предметом вивчення якої є обґрунтування геометрії. Питання про обґрунтування геометрії тісно пов’язане з історією її розвитку. Тому в курсі основ геометрії студенти вивчають основні етапи розвитку геометрії.

Зазначимо, що у розвитку аксіоматичного методу можна відмітити три періоди:
1) змістовний аксіоматичний метод в «Початках» Евкліда (ІІІ ст. до н.е.);
2) напівформальний аксіоматичний метод в «Основах геометрії» Д. Гільберта (кінець ХІХ ст.);
3) формальний аксіоматичний метод (Д. Гільберт початок ХХ ст.).

В курсі основ геометрії студенти вивчають різні системи аксіом для обґрунтування евклідової геометрії, а саме: систему аксіом Д. Гільберта, М. Пієрі, В.Ф. Кагана, Г. Вейля, Ф. Шура, Віллерса, О.В. Погорєлова, А.М. Колмогорова, О.Д. Александрова, Л.С. Атанасяна, Ф. Бахмана, О. Веблена та ін. Також вивчаються і порівнюються різні аксіоматики шкільного курсу геометрії.

При вивченні основ геометрії вивчаються теорія вимірювання відрізків, яка є наслідком п’ятої групи системи аксіом Гільберта і п’ятої групи системи аксіом Вейля, теорія вимірювання площ многокутників, теорія вимірювання об’ємів многогранників.

Розглядаються поняття та вивчаються властивості рівновеликих і рівноскладених многокутників, рівновеликих і рівноскладених многогранників.

На практичних заняттях розглядається V постулат Евкліда та доводяться його еквіваленти. Розглядаються теореми абсолютної геометрії. *Абсолютною геометрією* називають систему наслідків, що випливають лише з аксіом I-IV груп системи аксіом Д. Гільберта. Абсолютна геометрія є спільною частиною евклідової і неевклідових геометрій. Оскільки твердження, які можуть бути доведені за допомогою аксіом I-IV груп, справедливі як в геометрії Евкліда, так і в геометрії М.І. Лобачевського.

Потім студенти переходять до вивчення гіперболічної геометрії, тобто до вивчення неевклідової геометрії М.І. Лобачевського, яка базується на абсолютній геометрії та аксіомі паралельності Лобачевського. Фігури на гіперболічній площині мають специфічні властивості. Наприклад, на площині Лобачевського існують три види прямих, а саме: прямі, що перетинаються, або збіжні прямі – це пучок прямих з власною вершиною – еліптичний пучок; паралельні прямі – це пучок прямих з невласною вершиною – параболічний пучок та розбіжні прямі – це пучок з ідеальною вершиною – гіперболічний пучок.

Якщо розглянути суму внутрішніх кутів трикутників на площині Евкліда, то вона є сталою величиною і дорівнює 180° або 2π радіан. На відміну від евклідової геометрії, в геометрії Лобачевського сума внутрішніх кутів трикутників є змінною величиною, що залежить від форми і розмірів трикутника, але завжди меншою 180° або 2π радіан.

На істотну відмінність геометрії Лобачевського від евклідової геометрії вказує і наявність функції Лобачевського, яка пов'язує відрізки з кутами. Такої функції немає на евклідовій площині. Цим пояснюється необхідність збереження в евклідовій геометрії еталону довжини, не дивлячись на те, що існує природна одиниця міри кутів. В геометрії Лобачевського в цьому немає ніякої потреби, оскільки тут за одиницю довжини можна взяти відрізок, який відповідає певному куту паралельності.

Для паралельних прямих на площині Лобачевського важливий напрямок паралельності і вони мають багато властивостей, відмінних від властивостей паралельних прямих на евклідовій площині. Так наприклад, відстань між паралельними прямими на евклідовій площині є сталою величиною, а на гіперболічній площині відстань між паралельними прямими необмежено зменшується в напрямку кута паралельності і може стати меншою за наперед заданий, як завгодно малий, відрізок, тобто в напрямку кута паралельності паралельні прямі асимптотично наближаються; в протилежному напрямку відстань необмежено зростає і може стати більшою за наперед заданий, як завгодно великий, відрізок, тобто в напрямку, протилежному до кута паралельності паралельні прямі асимптотично розходяться.

Ще однією цікавою особливістю гіперболічної геометрії є відсутність подібних трикутників, подібних фігур і взагалі перетворень подібності.

Перші застосування геометрія Лобачевського отримала в роботах самого М.І. Лобачевського, який за її допомогою зміг обчислити деякі інтеграли. В кінці XIX століття в роботах А. Пуанкаре і Ф. Клейна були знайдені прямі зв'язки геометрії Лобачевського з теорією функцій комплексної змінної та з теорією чисел, зокрема з арифметикою невизначених квадратичних форм. Геометрія Лобачевського знаходить тепер важливе застосування в теорії функцій комплексної змінної, яка є математичною основою сучасної гідродинаміки, аеродинаміки і теорії пружності.

В наш час значення геометрії Лобачевського ще більше зросло завдяки роботам американського математика Тьорстона, який встановив її зв'язок з топологією тривимірних многовидів. Сучасні дослідження астрономів, математиків, фізиків, філософів, космологів все більше вимагають професійного володіння фактами як неевклідової геометрії Лобачевського, так і інших неевклідових геометрій.

Таким чином, оволодіння аксіоматичним методом побудови геометрії, ознайомлення із змістом як евклідової, так і різних неевклідових геометрій є необхідним і важливим елементом педагогічної освіти майбутнього вчителя на лише математики, а й фізики.

Список використаної літератури

1. Атанасян Л.С., Базылев В.Т. Геометрия. Ч.2. – М.: Просвещение, 1987. – 352 с.
2. Боровик В.Н., Яковець В.П. Основи геометрії: Навчальний посібник. – Ніжин: НДПУ, 2003. – 186 с.
3. Боровик В.Н., Яковець В.П. Курс вищої геометрії: Навчальний посібник. – Суми: ВТД «Університетська книга», 2004. – 464 с.
4. Егоров И.П. Основания геометрии. – М.: Просвещение, 1984. – 114 с.
5. Ефимов Н.В. Высшая геометрия. – М.: Наука, 1971. – 576 с.
6. Костин В.И. Основания геометрии. – М.: Учпедгиз, 1948. – 304 с.
7. Ломаєва Т.В., Семенович О.Ф. Перетворення і аксіоматичний метод в геометрії. – Ч.2. – Черкаси, 1999. – 174 с.
8. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: Підруч. для студ. мат. спеціальностей пед. навч. закладів. – К.: Зодіак - ЕКО, 2000. – 512 с.
9. Трайнин Я.Л. Основания геометрии. – М.: Учпедгиз, 1961. – 326 с.
10. Шаповалова Н.В., Панченко Л.Л. Криві на площині Лобачевського. Навч.-метод. посібник для студ. матем. спец. ВНЗ. – К.: НПУ імені М.П.Драгоманова, 2011. – 32 с.