

## РОЗВИТОК ВМІНЬ СТАРШОКЛАСНИКІВ ВИКОНУВАТИ ПРОСТОРОВІ ЗОБРАЖЕННЯ НА ПЕРШИХ УРОКАХ СТЕРЕОМЕТРІЇ

*Швець Л.В.,*

*аспірант,*

*Національний педагогічний університет*

*імені імені М.П.Драгоманова*

У статті запропонована технологія вироблення та розвитку вмінь старшокласників виконувати просторові зображення на перших уроках стереометрії, з урахуванням принципу поетапного формування часткових вмінь.

В статье предложена технология формирования и развития умений старшеклассников строить пространственные изображения на первых уроках стереометрии, учитывая принципы поэтапного формирования частичных умений.

In this article there is the technology of formation and development of students' skills to draw spatial representations (pictures) at the first stereometry lessons taking into account the principle of step-by-step development of partial skills.

З початком вивчення учнями курсу стереометрії перед вчителем постає завдання навчити їх виконувати зображення просторових фігур та їх елементів. Застосування чіткої і логічно вибудованої технології формування та розвитку вмінь старшокласників виконувати стереометричні побудови дозволить сформувати у них цілісну картину про зображення як такі. Враховуючи запропоновані Л.М.Фрідманом [5] та Я.Й.Груденовим [4] закономірності формування вмінь і навичок, розроблену М.Ф.Четверухініним [6] теорію зображень в умовах педагогічного процесу та згідно діючої програми з математики, пропонуємо технологію формування та розвитку вмінь, якими учні повинні оволодіти, вивчивши аксіоми стереометрії та наслідки з них. Також виокремимо часткові вміння, які надалі складатимуть загальне вміння будувати зображення точки, прямої, площини, та перерізів многогранників.

З основними поняттями стереометрії, аксіомами та наслідками з них учні, які навчаються на академічному, профільному та поглибленому рівнях знайомляться вивчаючи тему «Вступ до стереометрії», а учні, які вчаться на рівні стандарту – «Паралельність прямих і площин». Спочатку слід сформувати у школярів уявлення про простір та розміщення основних фігур у ньому. Для цього доцільно використати класне приміщення, як модель простору, аркуш паперу, поверхню стола та ін. (модель площини), спицю, олівець та ін. (модель прямої) та маленькі пластилінові кульки в якості моделей точок. Потім на моделі будь-якого з многогранників за допомогою вибраних моделей основних понять доцільно продемонструвати поняття точки, прямої, площини, як частин фігури. Після того, як уявлення про основні поняття сформовано слід переходити до вироблення вмінь їх зображати.

У зв'язку з введенням нового поняття – площини, побудова зображень значно ускладнюється. Значною мірою пригадати ці поняття та їх зображення допомагає повторення курсу планіметрії, яке передує вивченню стереометрії. Якщо зображення точки та прямої

такі ж як і в планіметричних побудовах, то зображення площини потребує окремої уваги, Слід зазначити учням, що побудувати площину за допомогою креслярських інструментів неможливо, її можна лише вказати. Доцільно продемонструвати різні способи зображення площини (рис. 1, а-г).

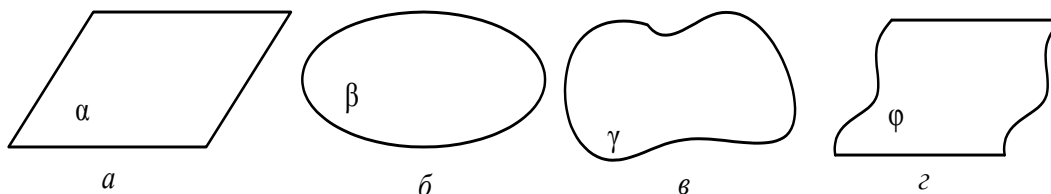


Рис.1

Але, щоб в учнів не сформувалося хибне поняття щодо зображення площини, на прикладі зображення куба, прибравши частини рисунка слід продемонструвати можливі розміщення площини в просторі (рис. 2).

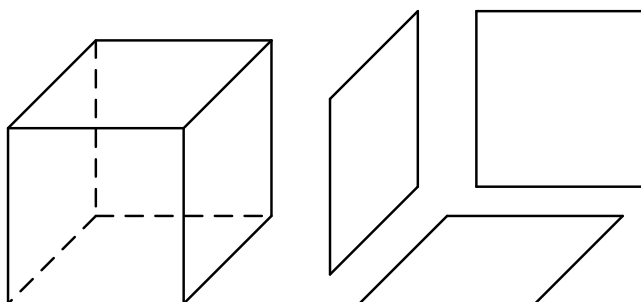


Рис. 2

Завдяки такому прийому в учнів сформується уявлення про розміщення площини в просторі не тільки горизонтальне, а й вертикальне та довільне, що дозволить удосконалити уявлення учнів про площину, яка до цього сприймалася ними лише як аркуш зошита чи дошка.

Для формування та вироблення вмінь будувати стереометричні зображення доцільно скористатися відомими учням ще з 6-го класу зображеннями прямокутного паралелепіпеда чи куба. Використання зображень вказаних фігур дає змогу пов'язати на рисунку поняття точки, прямої, площини, належності точки та прямої площині в просторі.

Використовуючи зображення куба (рис. 3, а), доцільно, наприклад, продемонструвати зображення точки, прямої та їх належність площині, прямої перетину площин (рис. 3. б-г), які дають уявлення учням про взаємне розташування точок, прямих та площин у просторі та приклади зображення таких розташувань.

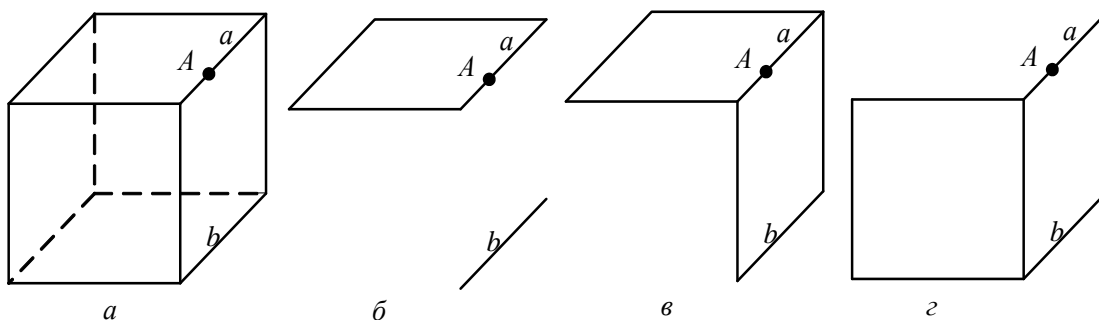


Рис. 3

Під час вивчення аксіом стереометрії та наслідків з них використовувати зображення куба необов'язково. На цьому етапі слід перейти до використання ілюстративних рисунків так званих «рисунків-засобів» [6]. Наприклад, побудову зображень до аксіом стереометрії та наслідків з них можна виконати так, як показано на рисунку 4, *a-e*. Пояснюючи аксіому про перетин двох площин, варто акцентувати увагу учнів на зображенні площин у вигляді паралелограмів, як простішому та більш наочному.

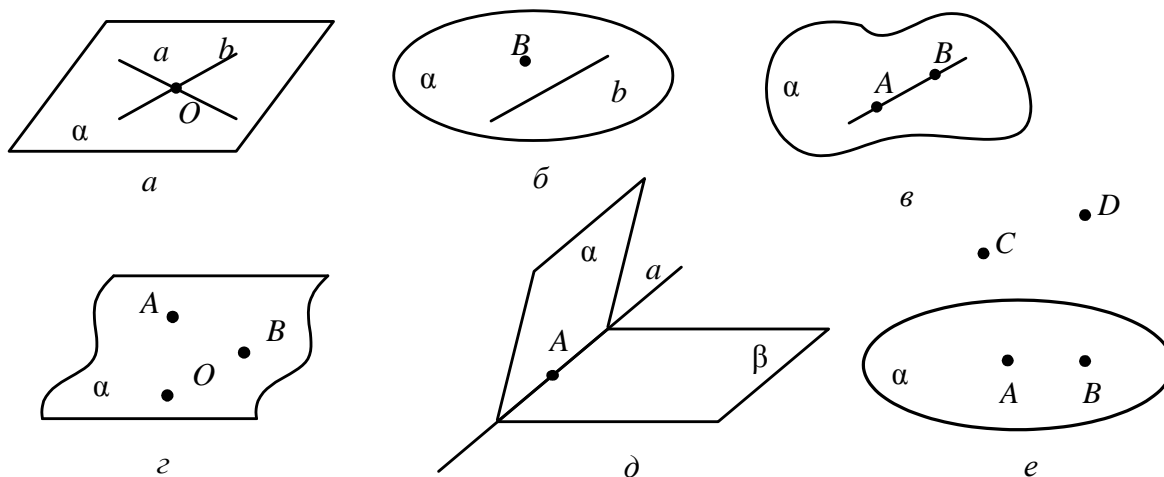


Рис. 4

Подальше застосування вивчених аксіом стереометрії та наслідків з них відбувається під час побудови перерізів многогранників. При цьому виникає певна неузгодженість, оскільки паралельне проєціювання та його властивості ще не вивчалися, а учні повинні вміти виконувати зображення многогранників. Оскільки побудова самих многогранників не є метою зображень, то виконання побудови їх зображення має інтуїтивний та суто шаблонний характер. Тому, щоб уникнути можливих помилок вчителю необхідно, будуючи піраміду чи призму на дошці дати рекомендації учням щодо відповідних побудов у зошитах. Наприклад, під час побудови піраміди, слід зазначити учням, що виконувати зображення варто починати з побудови точок, жодні три з яких не лежать на одній прямій, наголошуючи при цьому на розмірах самої побудови, задля уникнення замалих чи зavelиких зображень. Не менш важливим є вибір вершини. Доцільно продемонструвати можливі випадки «невдалих» рисунків через той чи інший вибір точок, зокрема, під час побудови зображення чотирикутних та п'ятикутних пірамід (рис. 5).

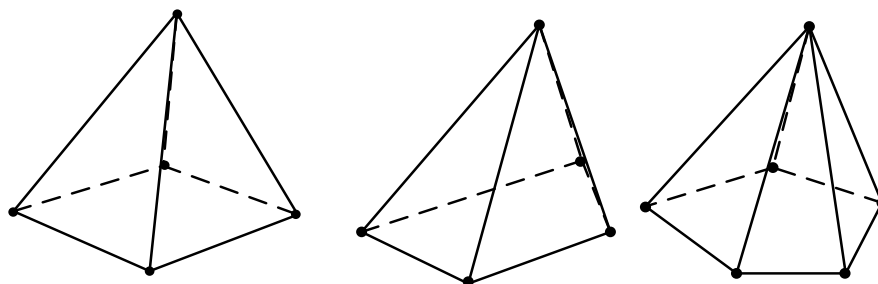


Рис. 5

Пояснюючи особливості побудови прямокутного паралелепіпеда чи куба, варто звернути увагу учнів на «схожість» зображень цих многогранників, але задля унаочнення побудови слід запропонувати куб зображати у кабінетній проєкції, а призми розглядати лише

прямі. Також доцільно вказати на можливі помилки під час побудови зображення цих многогранників (рис. 6).

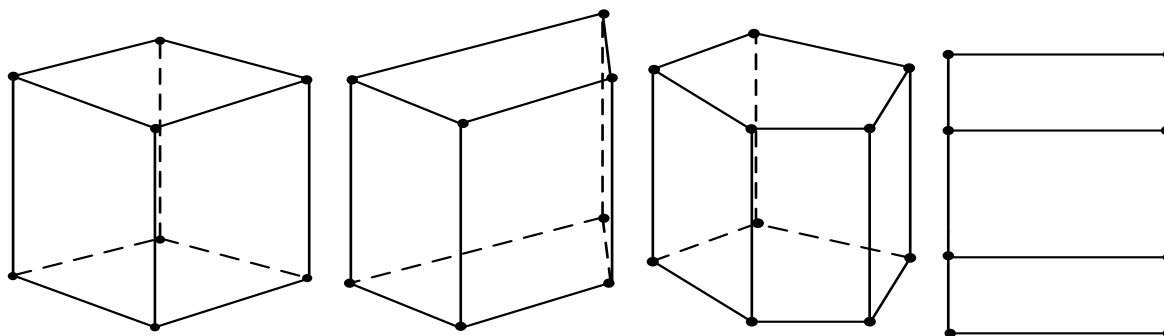


Рис. 6

Оскільки рисунки в підручнику та на дошці зображені на площині, що не має сітки (клітинок), то вчителю слід дати коментар стосовно побудови піраміди, куба та прямокутного паралелепіпеда, як найбільш вживаних в умовах задач, саме в учнівських зошитах. У зв'язку з тим, що креслення як навчальний предмет не входить до програм для вивчення в загальноосвітніх школах, необхідно обов'язково зупинитися на видах ліній, які використовуються під час побудов в стереометрії. Домовляємося використовувати *суцільну* та *штрихову лінії* для зображення відповідно видимих та невидимих ліній. Хоча в деякій літературі зустрічається *штрихпунктирна лінія*, якою користуються для зображення осі симетрії. Пропонуємо в шкільному курсі стереометрії обмежитися використанням лише двох вище вказаних ліній.

Таким чином, вивченню перерізів многогранників передую вироблення в учнів вмінь зображати многогранники встановленого виду й вказувати точки, прямі та площини на їх зображеннях. Оскільки уміння учнями виокремлювати точки, прямі та площини на зображеннях многогранників є необхідним для подальшого вивчення перерізів многогранників. Крім того, починаючи вивчати перерізи многогранників слід зауважити учням, що перерізом прямої та площини є слід їх перетину, тобто точка, а перерізом двох площин – пряма. Тому доцільно вивчення задач на побудову перерізів многогранників почати із такої, наприклад, задачі.

**Задача.** Побудуйте точку перетину прямої  $MN$  з площиною  $(ABC)$ ; укажіть точки перетину прямої  $MN$  з площинами  $(ASB)$  та  $(BSC)$ . Як розміщені пряма  $MN$  та площина  $(ASC)$  (рис. 7, а)?

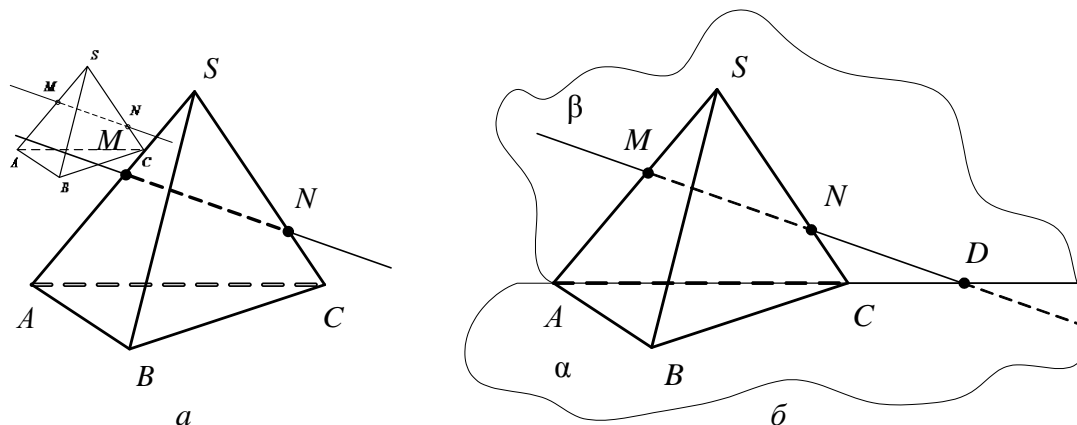


Рис. 7

Під час виконання першого завдання задачі, використовуючи аксіоми стереометрії та наслідки з них, слід побудувати площини  $\alpha$  та  $\beta$  (рис. 7, б), що унаочнити поняття площини, зокрема, площин  $(ABC)$  та  $(ASC)$ . Далі необхідно зауважити, що пряма  $AC$  є прямою перетину цих площин, а точка  $D$  – спільною для них, що й визначає її розміщення – належність цій прямій. Аналогічно, визначаючи точки перетину прямої  $MN$  з площинами  $(ASB)$  та  $(BSC)$ , слід виконати побудову площин відповідних граней піраміди. Задля унаочнення виконаної побудови розв'язання цієї задачі слід продемонструвати на моделі тетраедра, що є доцільно на перших уроках стереометрії.

Для вироблення в учнів вмінь будувати перерізи многогранників методом слідів доцільно розглянути ряд базових задач, дібраних за рівнем складності, розв'язання яких необхідно продемонструвати на дошці, детально коментуючи саму побудову. Мета розв'язування цих задач – сформуванню в учнів розуміння самого принципу побудови перерізів многогранників методом слідів, площини перерізів яких задано трьома точками або прямою та точкою, що їй не належить та виробити вміння виконувати відповідні побудови. Враховуючи загальні та часткові вміння зображати стереометричні фігури, процес вироблення в учнів відповідних вмінь виконувати побудови перерізів многогранників методом слідів повинен містити ряд вмінь, формування яких відбувається в певній послідовності. Таким чином, розв'язання базових, а надалі й інших задач на побудову перерізів многогранників пропонуємо виконувати за схемою, яка власне відображає принцип розв'язування таких задач :

1. Аналіз умови задачі: визначення якого виду многогранник і створення графічного образу.
2. Побудова зображення просторового образу.
3. Позначення на рисунку даних в умові задачі елементів.
4. Побудова слідів перерізу площини перерізу з гранями многогранника за даними задачі.
5. Знаходження точок перетину сліду з площинами (гранями многогранника).
6. Побудова шуканого перерізу.

Виконання завдання кожного з пунктів цієї схеми дозволяє виробити в учнів відповідні часткові вміння, які складають загальне вміння учнів виконувати побудови перерізів многогранників методом слідів.

Розглянемо, наприклад, добірку з п'яти задач, які доцільно використати як базові. Розв'язання до кожної задачі подано у вигляді поетапного зображення побудови самого перерізу та доповнено схемою розв'язування задачі.

#### *Базові задачі*

1. Побудуйте переріз піраміди  $SABC$  площиною, що проходить через три точки  $M, N, K$ , які лежать відповідно на ребрах  $AS, SC, BC$ .

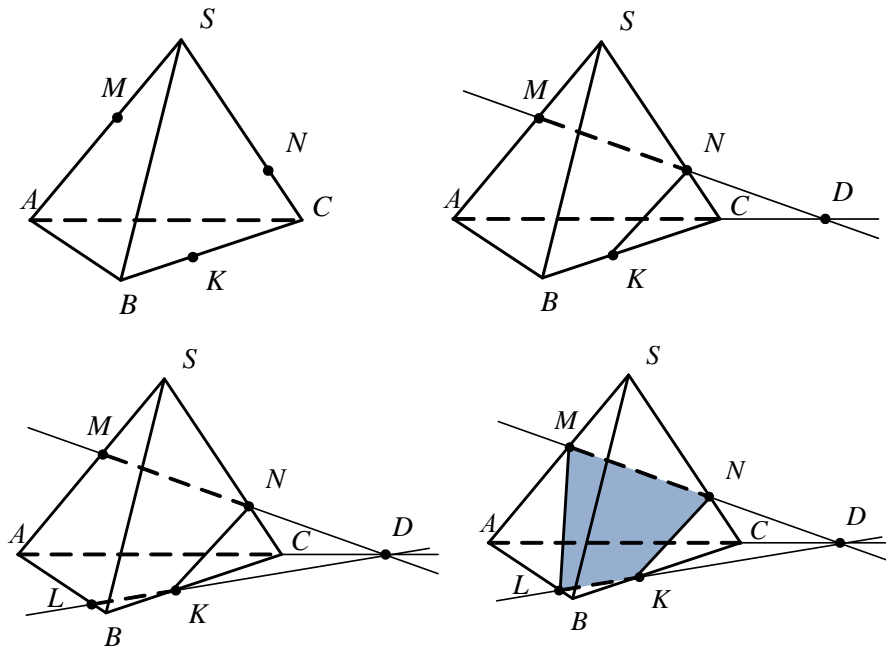


Схема розв'язування задачі

1. Трикутна піраміда.
  2. Побудова піраміди.
  3. Побудова точок  $M$ ,  $N$ ,  $K$ .
  4. Побудова прямих  $MN$  та  $NK$ .
  5. Побудова точки  $D$ , як точки перетину прямої  $MN$  з площиною  $(ABC)$ ; точки  $L$ , як точки перетину прямої  $KD$  з площиною  $(ASB)$ .
  6. Побудова  $ML$ .
2. Побудуйте переріз куба  $ABCA_1B_1C_1D_1$  площиною, що проходить через точки  $M$ ,  $N$ ,  $K$ , які належать відповідно ребрам  $AB$ ,  $AD$ ,  $CC_1$ .

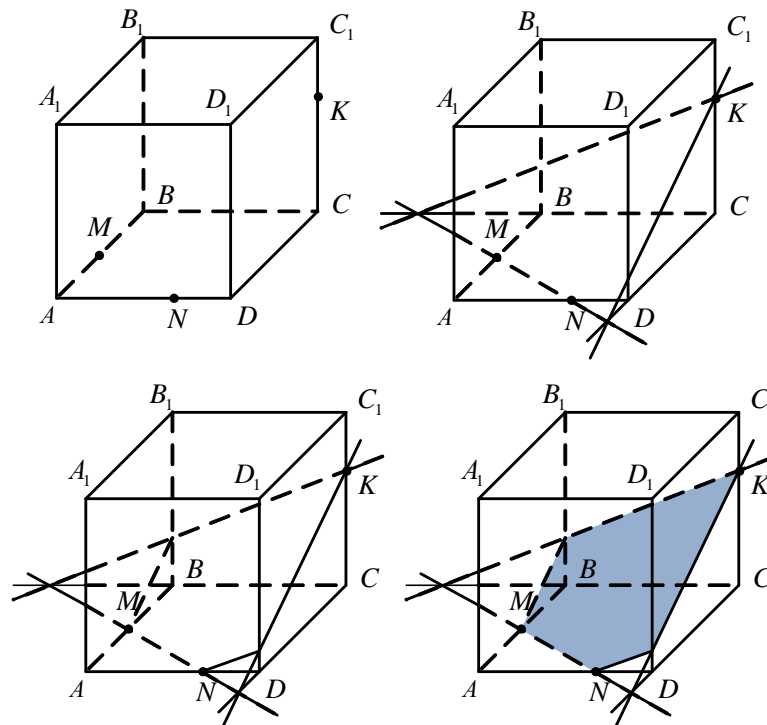


Схема розв'язування задачі

1. Куб.
2. Побудова куба.
3. Побудова точок  $M, N, K$ .
4. Побудова прямої  $MN$ .
5. Побудова точок перетину прямої  $MN$  з площинами  $(DC_1D_1)$  та  $(BB_1C_1)$ .
6. Побудова слідів перерізу.

3. Побудуйте переріз прямокутного паралелепіпеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  площиною, що проходить через точки  $M, N, K$ , які належать відповідно ребрам  $B_1 C_1, DD_1, D_1 C_1$ .

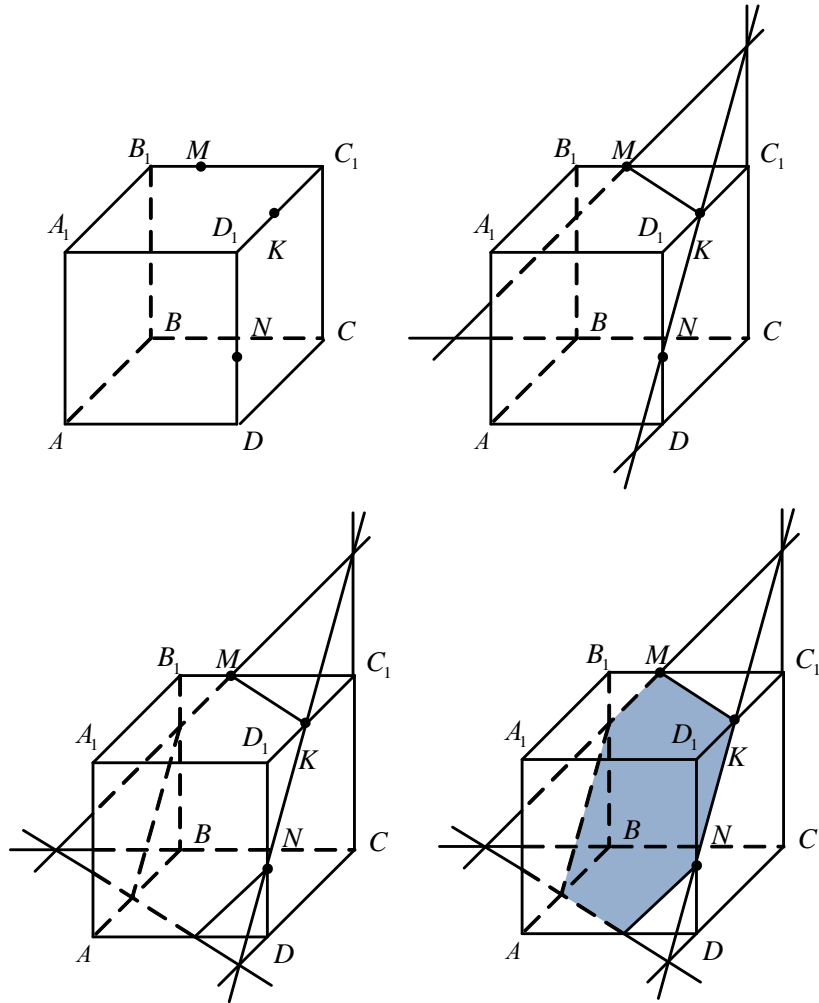


Схема розв'язування задачі

1. Прямокутний паралелепіпед.
2. Побудова прямокутного паралелепіпеда.
3. Побудова точок  $M, N, K$ .
4. Побудова прямих  $MN$  та  $NK$ .
5. Побудова точок перетину прямої  $NK$  з площинами  $(BB_1C_1)$  та  $(ABC)$ .; прямої  $ML$  з площиною  $(ABC)$ .
6. Побудова слідів перерізу.

У наступних двох задачах рисунок доцільно доповнити зображенням площини основи, оскільки вона містить один з даних елементів (слід  $g$ ). Побудова площини основи можлива й у попередніх трьох задачах, але робити це, на нашу думку, не варто, оскільки це

вимагає врахування видимих і невидимих ліній, що ускладнює саму побудову. Оскільки площина основи є допоміжним елементом рисунка, то задля наочності пропонуємо зображати лише видиму її частину.

4. Побудуйте переріз прямокутного паралелепіпеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  площиною, заданою слідом  $g$  в площині  $(ABC)$  та точкою  $M$ , що належить площині  $(DD_1 C_1)$ .

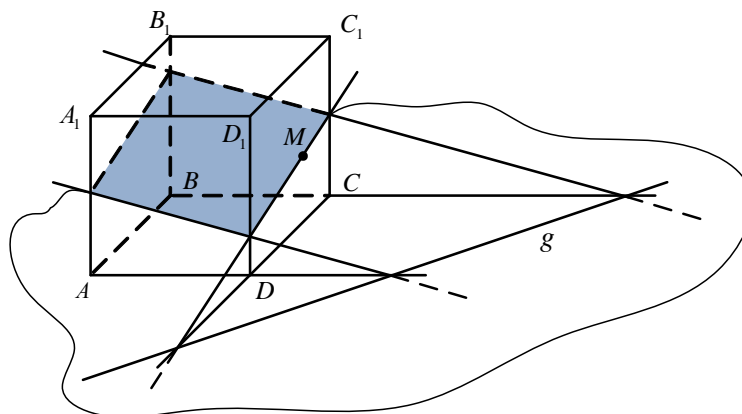


Схема розв'язування задачі

1. Прямокутний паралелепіпед.
2. Побудова прямокутного паралелепіпеда.
3. Побудова точки  $M$ .
4. Побудова площини основи та сліду  $g$ .
5. Побудова точок перетину прямої  $g$  з площинами  $(CB_1 C_1)$ ,  $(DC_1 D_1)$  та  $(AA_1 D_1)$ .
6. Побудова перерізу.

5. Побудуйте переріз піраміди  $SABCD$  площиною, що проходить через три точки  $M$ ,  $N$ ,  $K$ , якщо точки  $M$  і  $N$  лежать відповідно на площинах  $(SAB)$  і  $(SBC)$ , а точка  $K$  на ребрі  $SD$ .

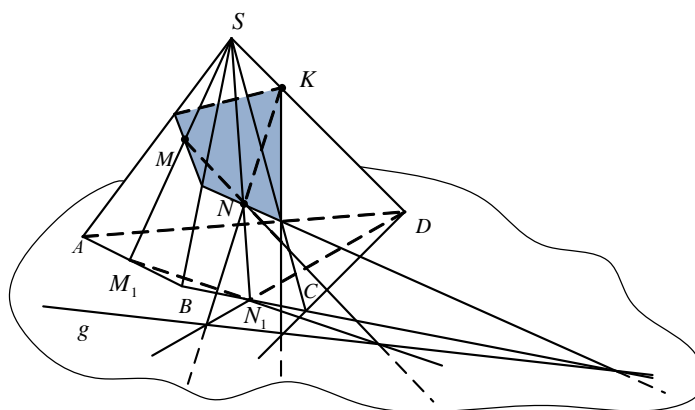


Схема розв'язування задачі

1. Чотирикутна піраміда.
2. Побудова чотирикутної піраміди.
3. Побудова точок  $M$ ,  $N$ ,  $K$  і площини основи.
4. Побудова сліду  $g$ , як прямої, що проходить через точки перетину прямих  $MN$  та  $NK$  відповідно з прямими  $M_1 N_1$  та  $DN_1$ .
5. Побудова точок перетину прямої  $g$  з площинами  $(SCD)$  та  $(SBC)$ .
6. Побудова перерізу.



Враховуючи рівні навчання запропоновані базові задачі доцільно розподілити так: в класах, які вивчають математику на рівні стандарту достатньо розглянути лише першу задачу; в класах, де геометрія вивчається на академічному рівні – перші чотири; під час вивчення геометрії на профільному та поглибленому рівнях – всі п'ять задач.

Описана технологія формування й вироблення в учнів знань, вмінь і навичок з теми «Вступ до стереометрії» відповідає державним вимогам щодо рівня загальноосвітньої підготовки учнів. За рахунок виокремлення часткових вмінь відбувається поетапне формування та вироблення в учнів вмінь виконувати стереометричні зображення. Таким чином, вивчивши тему «Вступ до стереометрії» згідно даної технології навчання, учні вмітимуть формулювати аксіоми стереометрії та наслідки з них, застосовувати їх до розв'язування нескладних геометричних і практичних задач; розв'язувати найпростіші задачі на побудову перерізів куба, прямокутного паралелепіпеда та піраміди; виконувати елементарні побудови: площини; точок, що належать і не належать площині; прямих, що належать і не належать площині; прямокутного паралелепіпеда, куба, тетраедра та їх перерізів.

### Список використаної літератури

1. Білянніна О.Я. Геометрія: академ. рівень: підруч. для загальноосвіт. навч. закл./ О.Я. Білянніна, Г.І. Біляннін, В.О. Швець. — К.: Генеза, 2010. — 256 с.: іл.
2. Бурда М.І. Математика: підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закл.: рівень стандарту/М.І. Бурда, Т.В. Колесник, Ю.І. Мальований, Н.А. Тарасенкова. — К.: Зодіак-ЕКО, 2010. — 288 с.: іл.
3. Геометрія: підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закл.: профіл. рівень/ Г.П. Бевз, В.Г. Бевз, Н.Г. Владімірова, В.М. Владіміров. — К.: Генеза, 2010. — 232 с.: іл. — Бібліогр.: с. 221.
4. Груденов Я.И. Психолого-педагогические основы методики обучения математике. — М.: Педагогика, 1987. — 160 с.: ил.
5. Фридман Л.М. Психолого-педагогические основы обучения математике в школе: Учителю математики о пед. Психологии. — М.: Просвещение, 1983. — 160 с., ил.
6. Четверухин М.Ф. Изображение фигур в курсе геометрии: Пособие для учителей. — М.: Учпедгиз, 1958. — 216 с.