ВИВЧЕННЯ АЛГЕБРАЇЧНИХ ЛІНІЙ У КУРСІ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ СТУДЕНТАМИ ВНЗ

Махомета Т.М.,
викладач,
Уманський державний педагогічний університет ім. П. Тичини

У статті автором визначено підхід до означень конічних перерізів, наведено аналіз означення поняття «лінія» у підручниках з аналітичної геометрії, розкрито методичні особливості ознайомлення студентів з алгебраїчними лініями (кривими) у курсі аналітичної геометрії.

В статье автором указан подход к определению конических сечений, приведен анализ определения понятия «линия» в учебниках по аналитической геометрии, раскрыты методические особенности ознакомления студентов с алгебраическими линиями (кривыми) в курсе аналитической геометрии.

In this article the author defined approach to definitions of conic sections, the analysis of the definition of «line»» in textbooks on analytic geometry, reveals methodological features to familiarize students with algebraic lines (curves) in the course of analytic geometry.

Лінія – добре знайоме ще з початкових класів, інтуїтивно зрозуміле геометричне поняття. Початок його вивчення покладений шкільним курсом математики, де учні вивчають в геометрії пряму і коло, а також плоскі лінії, що є графіками функцій (квадратичної, степеневої, показникової, логарифмічної, тригонометричних, складених функцій тощо). Тому можна вважати, що арсеналом найпростіших плоских ліній випускник школи має володіти, хоча учні використовуючи термін «лінія», не володіють поняттям лінії. Серйозне вивчення лінії як однієї з досконалих геометричних форм можливе лише у курсах вищої математики. Таким є курс «Аналітична геометрія», головним завданням якого є озброєння студентів методом координат та його широкоплановими застосуваннями до вивчення різних геометричних об’єктів: геометричних фігур (геометричних місць точок), відношень, зокрема просторових, геометричних перетворень (колінеацій, інверсій тощо).

Питання вивчення ліній привертало увагу багатьох вчених-математиків, методистів, науковців минулого (Р. Декарта, К. Жордана, Дж. Пеано, Г. Кантора, П.С. Урисона) та сьогодення (Працьовитий М.В., Торбін Г.М., Семеніхіна О.В., Талюш М.К., Задкова О.В., Коломієць О.М. та ін.).

Традиційно одне з основних завдань курсу аналітичної геометрії полягає в тому, щоб сформувати у студентів напрямку підготовки МАТЕМАТИКА цілісне достатньо наукове уявлення про лінію евклідового простору (двовимірного та тривимірного) – геометричний образ, що фігурує і широко використовується в різних розділах неперервної математики (математичному аналізі, теорії функцій, теорії ймовірностей тощо) та озброїти їх методологією дослідження ліній.

Мета статті – розкрити методичні особливості ознайомлення студентів з алгебраїчними лініями у курсі аналітичної геометрії.

На превеликий жаль, засобами програмного матеріалу курсу аналітичної геометрії неможливо дати строго наукове внутрішньо геометричне означення лінії, яке вимагає володіння топологічними поняттями. Але для внутрішніх потреб курсу прийнятним є означення лінії в розумінні Рене Декарта (як геометричного місця точок площини, координати яких в деякій афінній системі координат задовольняють рівняння $F(x, y) = 0$, де під $F(x, y)$ ми розуміємо математичний вираз, який містить змінні x і y). При цьому слід не забувати про його недоліки, зокрема неоднозначне трактування слова «вираз», що легко приводить до контрприкладів. Таким чином, логічні та методологічні прогалини в цьому підході очевидні. Але слід сміливо про це говорити студентам і самим наводити ці контрприклади. Більше того, не слід обмежуватись єдиним евклідовим означенням лінії, доповнити даний підхід можна, розглядаючи задання лінії у параметричній формі та як годограф векторної функції.

Зазначимо, що програма курсу аналітичної геометрії передбачає детальне вивчення лише плоских алгебраїчних ліній другого порядку, яких існує всього лише дев’ять видів серед яких шість дійсних та три уявних (уявний еліпс, пара уявних прямих, що перетинаються у дійсній точці та пара паралельних прямих). Серед дійсних три вироджені (пара паралельних прямих, пара прямих, що перетинаються, пара співпадаючих прямих). Тому, особливої уваги детального вивчення заслуговують лише еліпс, гіпербола та парабола, які традиційно називають конічними перерізами. Дві з них відомі студентам із шкільного курсу: гіпербола як графік функції «обернена пропорційність», парабола як графік квадратичної функції. Не дивлячись на це всі три криві слід вивчати за єдиною методикою (схемою). І на наш погляд доцільно розпочинати вивчення цих ліній з параболи, а далі вивчати еліпс і гіперболу.

Програмою передбачено окреме вивчення кожного з конічних перерізів за його канонічним рівнянням. Наведемо деталізацію цього фрагменту програми.

Парабола. Означення та канонічне рівняння параболи, властивості параболи, дотична до параболи, оптичні властивості параболи, механічний спосіб побудови параболи та побудова точок параболи за допомогою циркуля та лінійки, парабола в застосуваннях.

Еліпс. Означення та канонічне рівняння еліпса, механічний спосіб побудови еліпса, дослідження властивостей еліпса за його канонічним рівнянням, ексцентриситет еліпса, вираз фокальних радіусів точки еліпса, директриса еліпса, теорема про фокальні властивості еліпса, параметричні властивості еліпса, побудова точок еліпса за допомогою циркуля та лінійки, дотична до еліпса, оптичні властивості еліпса.

Гіпербола. Означення та канонічне рівняння гіперболи, дослідження властивостей гіперболи за її канонічним рівнянням, взаємне розміщення гіперболи і прямої, яка проходить через її центр, асимптоти гіперболи, ексцентриситет гіперболи, вираз фокальних радіусів точки гіперболи, директриса гіперболи, теорема про фокальні властивості гіперболи, побудова точок гіперболи за допомогою циркуля та лінійки, дотична до гіперболи, оптичні властивості гіперболи.

Не зважаючи на те, що саме алгебраїчні лінії є повноцінним об’єктом вивченням в аналітичній геометрії, не можна обмежуватись лише означенням та тривіальними прикладами ліній трансцендентних (синусоїдою, тангенсоїдою тощо), а варто принаймні одну з трансцендентних ліній вивчити наявними засобами аналітичної геометрії з використанням алгебраїчних інструментів прийомів та методів. Однією з таки ліній могла би бути ланцюгова лінія з багатою та цікавою історією. Варто констатувати, що дуже детально вивчити її не має можливості в наявному ресурсі часу і засобів.

Принциповим і надзвичайно важливим є наступний підхід до означень конічних перерізів: означення має бути суто геометричним (через ГМТ), бути повним, щоб визначати дійсну невироджену криву. В багатьох посібниках це не витримується. Наведемо приклади означення лінії у підручниках з аналітичної геометрії. У «Короткому курсі аналітичної геометрії» Н.В. Єфімова [7] рівнянням лінії в вибраній системі координат називається таке рівняння $F(x, y) = 0$ з двома змінними, яке задовольняють координати *x* та *y* кожної точки, що лежить на цій лінії та не задовольняють координати ніякої іншої точки, яка не лежить на ній. Тобто лінія є геометричне місце усіх точок площини, координати яких задовольняють рівняння $F(x, y) = 0$. Схожим методом вводиться поняття лінії в «Аналітичній геометрії» А.В. Погорєлова [10]. Автор спочатку узагальнює поняття ліні називаючи її кривою, а потім стверджує, що рівняння $\varphi(x, y) = 0$ називається рівнянням кривої в неявній формі, якщо його задовольняють координати *x* та *y* будь-якої точки цієї кривої, а будь-яка пар чисел *x* та *y*, що задовольняє рівнянню $\varphi(x, y) = 0$, являє собою координати точки кривої.

Основним поняттям аналітичної геометрії, на думку В.П. Білоусової, І.Г. Ільїна, О.П. Сергунова та В.М. Котлової [2] є рівняння лінії. Загальне означення поняття лінії, на їх думку, становить значні труднощі і здійснюється в різних галузях геометрії по-різному. В аналітичній геометрії означення лінії базується на її рівнянні. На думку цих авторів, лінією, заданою рівнянням $F(x, y) = 0$ відносно певної системи координат у площині, називається геометричне місце точок, координати яких задовольняють задане рівняння. Аналогічним чином вводиться поняття поверхні: поверхнею, заданою рівнянням $F(x, y, z) = 0$ відносно певної декартової системи координат у просторі, називається геометричне місце точок, координати яких задовольняють дане рівняння.

М.М. Глухов [5] стверджує, що будь-яка пряма лінія на площині може бути задана рівнянням виду $Ax + By + C = 0$, де *A, B, C* деякі дійсні числа, причому хоча б одне з чисел *A, B* відмінне від нуля. Лініями другого порядку на площині М.М. Глухов називає геометричне місце точок на площині, яке може бути задане алгебраїчним рівнянням другого порядку і надалі він обмежується розглядом конкретних ліній другого порядку: кола, еліпса, параболи та гіперболи. Таким чином М.М. Глухов лінію задає звичайним алгебраїчним рівнянням.

Я.С. Бугров та С.М. Нікольський [3] лінію вводять як множину точок, що задовольняють певне рівняння.

В.А. Ільїн та Г.Д. Кім [8] дають наступне строге та чітке означення лінії та поверхні. Воно є достатньо логічним та обґрунтованим і тому варто його тут навести. Рівняння $F(x, y) = 0$ називається рівняння лінії L на площині в заданій системі координат, якщо цьому рівнянню задовольняють координати усіх точок лінії L.

П.С. Геворкян [4] пряму на площині він визначає наступним чином: алгебраїчною лінією (кривою) *n*-го порядку називається множина точок, координати яких *(x,y)* в деякій прямокутній системі координат задовольняють співвідношенню виду $F(x,y)=0$.

А.Д. Доценко [6] лінію на площині визначає рівнянням $F(x,y)=0$. Якщо це рівняння першого порядку, то ми маємо пряму лінію. Якщо ж вказане рівняння другого порядку, то воно описує криві другого порядку: еліпс, коло, гіперболу, тощо.

Особливо слід відзначити курс аналітичної геометрії І.І. Привалова, який витримав багато перевидань і за яким навчалося не одне покоління студентів [12]. Автор дає наступне означення рівняння лінії: рівняння між змінними *x* та *y*, якому задовольняють координати будь-якої точки, що лежить на цій лінії, і не задовольняють координати жодної точки, що не лежить на цій лінії, називається рівнянням даної лінії.

У фундаментальному курсі аналітичної геометрії та лінійної алгебри П.С. Александрова для студентів фізико-математичних спеціальностей вишів [1] визначення лінії на площині та поверхні в тривимірному просторі потрібно визначати як множину розв'язків наступних алгебраїчних рівнянь: $\mathrm{F}(\mathrm{x},\mathrm{y})=0$ для ліній, та $\mathrm{F}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})=0$ для поверхонь. Порядок лінії або площини у цьому випадку визначається порядком рівняння.

У курсі аналітичної геометрії та лінійної алгебри Д.В.Беклемішева, виданому досить недавно (2008 р.) означення алгебраїчної поверхні та алгебраїчної лінії дається через поняття множини Алгебраїчною лінією на площині називається множина точок площини, яка в будь-якій декартовій системі координат може бути записана рівнянням виду

$$A_1x^{k_1}y^{l_1}+\ldots+A_sx^{k_s}y^{l_s}=0,$$

де всі показники степені – цілі невід'ємні числа. Найбільша з сум $k_1+l_1+\ldots+k_s+l_s$ називається степенем рівняння, а також порядком алгебраїчної лінії.

Проведений аналіз підручників з аналітичної геометрії щодо означення лінії показує, що їх можна умовно поділити на 3 групи. До першої групи можна віднести ті підручники, де означення лінії дається теоретико-множинним методом. До речі такий метод визначення основних понять геометрії зараз не є найбільш уживаним, але набуває все більшого розповсюдження. До другої групи відносяться ті підручники, де для означення понять «лінія» використовується поняття геометричного місця точок. Це так би мовити «геометричне» означення. І нарешті, до третьої групи (до неї відноситься найбільша кількість підручників) відносяться посібники, я яких використовується традиційне, відоме ще з часів Р. Декарта, так зване координатне означення.

Формулюючи означення, для якісного його засвоєння варто проводити порівняння з відомими поняттями. Наприклад, параболи і кола (коло визначається двома параметрами: центром і радіусом, тобто точкою і додатним числом, парабола визначається фокусом і директрисою, тобто точкою і прямою). При вивченні еліпса доцільним є порівняння його з колом (еліпс визначається двома точками і числом – фокусами і довжиною великої осі). Більше того, варто акцентувати увагу на те, що коло є частковим випадком еліпса при умові , що його фокуси співпадають. Глибока аналогія означення гіперболи і еліпса має бути акцентовано відображена і в дослідженні і у властивостях. І це справді так.

Традиційна схему, за якою вивчаються конічні перерізи:

1) обмеженості (обмеженість або відсутність точок фігури в окремих областях площини);
2) симетрії (елементи групи симетрій фігури, які легко проглядаються у канонічних рівняннях);
3) вершини та осі;
4) неперервність та замкненість

варто доповнювати аналізом взаємного розміщення кола з центром у фокусі і радіусом, рівним відстані від фокуса до ближчої вершини. Останній пункт відображає одну з граней гладкості лінії та її опуклості і допомагає правильніше схематично її зображати. Нажаль, цей пункт практично відсутній у всіх навчальних посібниках з аналітичної геометрії.

Важливим моментом при вивченні конічних перерізів є мотивація інтересу до таких кривих з природної та технічної точок зору, а саме застосовністю властивостей кривих у техніці і виявлення в природі траєкторій, що мають форму еліпса, гіперболи та параболи. Наприклад, відомо, що планети та комети рухаються еліптичними траєкторіями, в одному із фокусів яких знаходиться Сонце. Ексцентриситет (числовий параметр, який характеризує форму еліпса) планетарних орбіт близький до нуля, тому планети рухаються майже по колу. Ексцентриситет орбіт комет близький до одиниці, тому вони періодично наближаються та віддаляються від Сонця. Другий приклад пов'язаний з конструкцією прожектора. Його дзеркало має форму параболи, у фокусі якої знаходиться джерело світла. Завдяки цьому всі промені прожектора йдуть паралельно осі параболи [9]. Окремої уваги заслуговують оптичні властивості кривих, які можна вивчати по-різному, автономно для кожної кривої, або ж у загальній теорії кривих другого порядку стартуючи з загальних властивостей дотичної. Ми віддаємо перевагу першому підходу усвідомлюючи, що при цьому приходиться витрачати «зайвий» час.

Немаловажними у теорії є питання: механічний спосіб побудови кривої та побудова точок кривої за допомогою циркуля та лінійки, які гармонізують конструктивний і аналітичний підходи у вивченні лінії та посилюють алгоритмічність частини досліджень. При цьому слід пам'ятати та зауважувати, що тут існує простір для творчості створення нових алгоритмів та спрощення існуючих.

Завершальним розділом аналітичної геометрії у програмі курсу є розділ «Загальна теорія алгебраїчних ліній 2-го порядку», зміст якого вичерпується розглядом наступних питань: загальне рівняння алгебраїчної лінії другого порядку, взаємне розміщення лінії 2-го порядку з прямою, визначення лінії 2-го порядку 5 точками, асимптотичний напрям відносно алгебраїчної лінії 2-го порядку, асимптотичні напрями еліпса, гіперболи, параболи, центр алгебраїчної кривої 2-го порядку, його знаходження, класифікація кривих за кількістю центрів, спрощення кривої 2-го порядку відносно центра, його інваріанти, дотичні до кривих, діаметри та головні напрями ліній, зведення рівняння алгебраїчних ліній 2-го порядку до канонічного вигляду та їх класифікація.

Необхідними передумовами для успішного засвоєння теоретичного і практичного матеріалу цього розділу є ґрунтовне знання матеріалу попередніх розділів і, в першу чергу, теорії прямих і конічних перерізів за їх канонічними рівняннями.

Даний розділ є традиційним для курсу «Аналітична геометрія» для студентів математичних спеціальностей педагогічних вузів. Його відмінністю від попереднього є дещо вищий рівень абстрактності і загальності, більша віддаленість від шкільного курсу математики. Він передбачає деяке знання комплексних чисел. Тому при вивченні теоретичного матеріалу хід думок бажано супроводжувати розглядом принципово різних, і бажано навіть всіх можливих випадків. При роботі над матеріалом цього розділу слід добре засвоїти систему позначень і скорочень.

Список використаної літератури

1. Александров П.С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. Учебник для студентов физико-математических специальностей вузов. – М.: Наука, 1979. – 511с.
2. Білоусова В.П., Ільїн І.Г., Сергунова О.П., Котлова В.М. Аналітична геометрія. Підручник для педагогічних інститутів. – Київ, «Радянська школа», 1962. – 364 с.
3. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Элементы линейной агебры и аналитической геометрии: учебник для вузов. – 4-у изд.,перераб. и доп. – Ростов-на-Дону, «Феникс», 1997. – 288 с.
4. Геворкян П.С. Высшая математика. Линейгая алгебра и аналитическая геометрия. – М.: Физматлит, 2007. – 208 с.
5. Глухов М.М. Алгебра и аналитическая геометрия. Учебное пособие. – М.: “Гелиос АРВ”, 2005. – 392.
6. Доценко А.Д. Елементи лінійної алгебри і аналітичної геометрії. Навч.посібник. – Луганськ: Вид-во СНУ ім. В. Даля, 2006. – 328 с.
7. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. Учебник для студентов высших учебных заведений. – [7-е изд] – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1963. – 227 с.
8. Ильин В.А., Ким Г.Д. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: Учебник для студентов вузов по специальности «прикладная математика» – 2-е изд. – М.: Изд-во МГУ, 2002. – 320 с.
9. Кривель І.А., Моргун О.М. Курс лекцій з вищої математики. Частина 2. [Електронний ресурс] – Режим доступу: http://a-morgun.narod.ru/a04-01/Lekcija06-04.pdf.
10. Погорелов А. В. Аналитическая геометрия / А. В. Погорелов. –Учебник для студентов вузов. – [3-е изд.]. – М.: Наука, 1968. – 176 с.
11. Працьовитий М.В., Гончаренко Я.В. Лінії на евклідовій площині. — К,: НПУ імені М.П.Драгоманова, 2005. — 44 с.
12. Привалов И.И. Аналитическая геометрия. Издание 13, стереотипное. Учебник для высших технических учебных заведений. – М.: Наука, 1966. – 272 с.