ПРОПЕДЕВТИКА МОДУЛЯ «СТРУКТУРИ ДАНИХ» У ПРОЦЕСІ ВИКЛАДАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ ДИСЦИПЛІН

Тихонова В.В.,
старший викладач,
Промислово-економічний коледж Національного авіаційного університету

Лещинський О.Л.,
кандидат фіз.-мат. наук, доцент,
Промислово-економічний коледж Національного авіаційного університету

Томащук О.П.,
кандидат педагогічних наук, доцент,
Національний авіаційний університет

Бохонова Т.Ю.,
старший викладач,
Національний авіаційний університет, кафедри прикладної математики

Гроза В.А.,
кандидат фіз.-мат. наук, доцент,
Національний авіаційний університет

У статті розглядається один із шляхів пропедевтики модуля «Структури даних» у процесі викладання математичних дисциплін – розв'язування системи нестандартних математичних задач.

В статье рассматривается один из путей пропедевтики модуля «Структуры данных» в процессе преподавания математических дисциплин – решение системы нестандартных математических задач.

A way of propaedeutics of the module «Data structures» during teaching mathematical discoplines, namely solving a system of nonstandard mathematical problems, are considered in tha article.

«Математика – зовсім не формули,
як музика – не ноти».
Я. Хургін

На першому курсі вищих навчальних закладів І-ІІ рівнів акредитації, які здійснюють підготовку молодших спеціалістів на основі базової загальної середньої освіти, студенти вивчають дисципліну «Математика». Навчальна програма цієї дисципліни для всіх спеціальностей однакова і має рівень стандарту. Але, враховуючи необхідність реалізації в процесі навчання принципу професійної спрямованості, доцільно у зміст окремих тем дисципліни «Математика» включати матеріал, ознайомлення з яким допоможе студентам краще засвоїти певні поняття чи навіть окремі теми спеціальних дисциплін, які вивчатимуться в подальшому. Для молодших спеціалістів-програмістів однією із важливих спеціальних дисциплін є дисципліна «Структури даних та алгоритми», яка вивчається на старших курсах. Реалізуючи принцип професійної спрямованості в процесі викладання дисципліни «Математика», доцільно в рамках теми «Дійсні числа та обчислення» при повторенні матеріалу про числові множини відвести певну кількість годин для пропедевтики модуля «Структури даних» дисципліни «Структури даних та алгоритми». Це чи не єдина можливість підготувати студентів до оволодіння дуже важливим поняття «дані», яке широко використовується в процесі написання алгоритмів програм та самих програм.

Вибір представлення даних для подальшого написання програмного продукту дуже часто є достатньо складною проблемою, оскільки він не визначається однозначно. Структура організації даних залежить від того, які алгоритми будуть до цих даних застосовуватися, і навпаки, часто вибір алгоритму залежить від будови даних, до яких він застосовується. Тобто алгоритм і структура даних нерозривно пов’язані між собою.

Таким чином, інтуїтивно стає зрозумілим, що наявність даних передує створенню алгоритму. Адже для того, щоб виконувати певні операції, необхідно мати об’єкти, до яких вони застосовуються. Відповідно до теорії і термінології, яка розвинута в роботі Хоара [3], дані – це абстракції реальних об’єктів і їх конструктивно зображають як деякі абстрактні утворення зі структурами. В процесі створення програми, по мірі уточнення самого алгоритму, представлення даних все більш прояснюється і все більш узгоджується з обмеженнями, які накладаються конкретною системою програмування. Тому виділяється певна кількість основних конструкцій – структур даних, які називають фундаментальними структурами. Такими структурами є запис, масив (фіксованого розміру) і множина.

У теорії структур виділяють фундаментальні та ускладнені структури. Фундаментальну структуру можна ототожнювати з молекулами (які, в свою чергу, утворюються з атомів), з яких будуються складні структури. Змінні фундаментальних структур можуть змінювати лише своє значення, а їх структура і множина допустимих значень залишаються незмінними. В результаті обсяг пам’яті, яка заповнюється такими змінними, залишається постійним. Змінні ускладненої структури в процесі виконання програми можуть змінювати і значення, і структуру. Тому для їх реалізації необхідні більш складні методи. У зазначеній класифікації структур даних, наприклад, послідовності займають проміжне місце. Зрозуміло, що їх довжина змінюється, але ця зміна структури носить тривіальний характер.

У процесі викладання математичних дисциплін можна звертати увагу як на «внутрішню» структуру даних (конкретного елемента), так і на «зовнішню» структуру, тобто на характерні властивості множин даних. Мислення майбутнього програміста треба поступово готувати для сприйняття даних з динамічною структурою, тобто даних, структура яких змінюється в процесі виконання програми. Програмування в певній мірі схоже на конструювання. Як можна навчити конструкторській, винахідницькій діяльності? Один із відомих прийомів полягає у виділенні на певних прикладах елементарних принципів композиції і демонстрації цих принципів деяким систематичним чином.

Знайомство з внутрішньою структурою даних можна розпочати з розгляду певних підмножин множини натуральних чисел. Розглянемо певне натуральне число n в десятковій системі числення. Нехай

$$n = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + \ldots + a_k \cdot 10^k = \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot 10^i, \quad a_i \in \{0,1,\ldots 9\}.$$

Однією із характеристик цього числа може бути сума його цифр:

$$\sigma(n) = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_k = \sum_{i=0}^{k} a_i .$$

Цю характеристику можна використовувати, наприклад, при дослідженні подільності числа n. Відомо, що ознака подільності числа на 9 є такою: якщо сума цифр числа ділиться на 9, то саме число ділиться на 9.

Доведення цієї ознаки може бути таким. Розглянемо різницю $n - \sigma(n)$:

$$n - \sigma(n) = (a_0 - a_0) + a_1 \cdot (10-1) + a_2 \cdot (10^2 - 1) + \ldots + a_k \cdot (10^k - 1) = 0 + 9a_1 + 99a_2 + \ldots + 99\ldots 9a_k ,$$

звідки $n = 9a_1 + 99a_2 + \ldots + 99\ldots 9a_k + \sigma(n)$. Отже, якщо $\sigma(n) \vdots 9$, то $n \vdots 9$.

Аналогічно можна використати $\sigma(n)$ при доведенні ознаки подільності числа на 3.

Іншою характеристикою натурального числа n може бути сума вигляду:

$$\tilde{\sigma}(n) = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots + (-1)^k a_k .$$

Цю характеристику можна використати, наприклад, для з'ясування питання подільності числа n на 11. Розглянемо різницю $n - \tilde{\sigma}(n)$:

$$n - \tilde{\sigma}(n) = \left(a_0 - a_0\right) + a_1 \cdot \left(10+1\right) + a_2 \cdot \left(10^2 - 1\right) + \ldots + a_k \cdot \left(10^k + \left(-1\right)^k\right) = 11a_1 + 99a_2 + 1001a_3 + \cdots .$$

Очевидно, що остання сума ділиться на 11. Тому маємо таку ознаку подільності числа на 11: якщо $\tilde{\sigma}(n) = \left(a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots + (-1)^k a_k\right) \vdots 11$, то число $n = \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot 10^i \vdots 11$.

Наприклад, для числа $n = 40249$ маємо $\tilde{\sigma}(n) = 9 - 4 + 2 - 0 + 4 = 11$. Оскільки $\tilde{\sigma}(n) = 11 \vdots 11$, то число $n = 40249 \vdots 11$.

Далі можна ознайомити студентів з більш загальним твердженням:

Нехай $m \in \mathrm{N}$ і $p_1, p_2, \ldots, p_k$ – остачі від ділення чисел $10, 10^2, \ldots, 10^k$ на число m відповідно. Тоді число $n - \left(a_0 + a_1 p_1 + a_2 p_2 + \ldots + a_k p_k\right)$ ділиться на m.

Наприклад, для $m = 7$: $p_i = 3; 2; 6; 4; 5; 1; 3; 2; \ldots$.

Якщо $n = 2013$, то $a_0 + a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 = 3 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + 2 \cdot 6 = 18$. Тому число $2013 - 18 \vdots 7$, тобто $1995 \vdots 7$. Крім того, оскільки число 18 при ділені на 7 дає остачу 4 і різниця $2013 - 18$ ділиться на 7, то число 2013 при діленні на 7 також дає остачу 4.

Для закріплення розуміння вказаних характеристик доцільно запропонувати таку задачу.

Нехай число *n* задано в десятковій системі числення і $\sigma(n) = \sum_{i=0}^{k} a_i$ – сума цифр цього числа, $\sigma\left(\sigma\left(n\right)\right)$ – сума цифр числа $\sigma\left(n\right)$. Чи існує таке натуральне число *n*, для якого $n + \sigma\left(n\right) + \sigma\left(\sigma\left(n\right)\right) = 2012$?

Студенти повинні дійти висновку, що такого числа *n* не існує. Дійсно, при діленні на 3 всі три доданки лівої частини рівності дають в остачі одне і те ж число, тобто $n = 3l + a$, $\sigma\left(n\right) = 3p + a$, $\sigma\left(\sigma\left(n\right)\right) = 3m + a$. Тому $n + \sigma\left(n\right) + \sigma\left(\sigma\left(n\right)\right) = 3 \cdot \left(l + p + m + a\right) \vdots 3$, а число 2012 не ділиться на 3.

Використовуючи вказаний підхід до пропедевтики вивчення структур даних, студентам можна проілюструвати одну зі схем подальшого узагальнення отриманих результатів:

Перейдемо до іншої системи числення – двійкової, змінивши відповідні позначення:

$$n = b_0 + b_1 \cdot 2 + b_2 \cdot 2^2 + \ldots + b_m \cdot 2^m = \sum_{i=0}^{m} b_i \cdot 2^i, \qquad b_i \in \{0; 1\},$$

$$\sigma_2(n) = b_0 + b_1 + b_2 \ldots + b_m = \sum_{i=0}^{m} b_i .$$

Деякі із співвідношень між n, n_2, $\sigma_2(n)$ помістимо в таблицю:

n	n_2	$\sigma_2(n)$	$\varepsilon(n) = n - \sigma_2(n)$
0	0	0	0
1	1	1	0
2	10	1	1
3	11	2	1
4	100	1	3
5	101	2	3
6	110	2	4
7	111	3	4
8	1000	1	7
9	1001	2	7
10	1010	2	8
11	1011	3	8
12	1100	2	10

Очевидно, що для кожного непарного числа n число $\varepsilon(n)$ не змінюється у порівнянні з попереднім, а для кожного парного числа n число $\varepsilon(n)$ збільшується у порівнянні з попереднім на величину Δ, яка дорівнює кількості нулів в кінці двійкового запису числа n. Виявляється, що величина Δ є максимальним показником степеня з основою два*, на який ділиться число n. Наприклад, у кінці двійкового запису числа 8 є три нулі, тому число $n = 8$ ділиться на 2^3; у кінці двійкового запису числа 12 є два нулі, тому $n = 12$ ділиться на 2^2. Отже, число $\varepsilon(n)$ – це лічильник степенів двійки в числах 1, 2, …, n, або в числі $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!$. Справедлива така теорема.

Теорема 1. Число $\varepsilon(n) = n - \sigma_2(n)$ є максимальним степенем двійки, на який

* У подальшому для уникнення громіздких формулювань замість терміну «максимальний показник степеня з основою a» будемо використовувати «максимальний степінь a»

ділиться число $n!$.

Доведення. Доведення проведемо методом математичної індукції.

1. Для $n=1$ теорема є правильною (див. таблицю).

2. Припустимо, що твердження є правильним для $n-1$, тобто число $(n-1)-\sigma_2(n-1)$ є максимальним степенем двійки, на який ділиться число $(n-1)!$.

3. Доведемо справедливість твердження для числа n.

$n! = n\cdot(n-1)!$. Тоді в числі $n!$ з'явиться рівно стільки нових степенів двійки, скільки їх є в числі n, тобто стільки, скільки є нулів в кінці двійкового запису числа n:

$$\varepsilon(n) = n-\sigma_2(n),\ \varepsilon(n-1) = (n-1)-\sigma_2(n-1).$$

Отже, n збільшилося в порівнянні з $(n-1)$ на 1. Як змінюється $\sigma_2(n)$ у порівнянні з $\sigma_2(n-1)$? Нехай в кінці двійкового запису числа n стоїть k нулів: $\ldots1000\ldots0$. Тоді двійковий запис числа $(n-1)$ має вигляд $\ldots0111\ldots1$ з k одиницями в кінці (нуль може бути відсутнім). Таким чином, в $\sigma_2(n)$ одиниць стає на $(k-1)$ менше, а загальна зміна кількості одиниць дорівнює $1-(-(k-1))=k$, що і треба було довести.

Наприклад, $12! = 1\cdot2\cdot3\cdot2^2\cdot5\cdot2\cdot3\cdot7\cdot2^3\cdot9\cdot2\cdot5\cdot11\cdot2^2\cdot3 = 1\cdot3\cdot5\cdot3\cdot7\cdot9\cdot5\cdot11\cdot3\cdot2^{10}$, $\varepsilon(12)=10$ (див таблицю).

Далі можна розглянути загальний випадок: p-кову систему числення, $p\in\mathrm{N}$.

$$n = a_0 + a_1p + a_2p^2 + \ldots + a_kp^k = \sum_{i=0}^{k} a_ip^i, \quad a_i < p, \quad i = 0,1,\ldots,k.$$

Позначимо $\sigma_p(n) = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_k = \sum_{i=0}^{k} a_i$. Справедлива така теорема:

Теорема 2. Число $n-\sigma_p(n)$ ділиться на $p-1$.

Доведення. $n-\sigma_p(n) = (a_0-a_0) + a_1(p-1) + a_2(p^2-1) + \ldots + a_k(p^k-1) = \sum_{i=0}^{k} a_i(p^i-1) \,\vdots\, (p-1)$.

Наприклад, якщо $n=49$, то число $49-\sigma_6(49)$ ділиться на 5. Дійсно, записавши число 49 у шістковій системі числення, одержимо: $49 = 1+2\cdot6+1\cdot6^2 = 121_6$. Тоді $\sigma_6(49)=1+2+1=4$ і $49-\sigma_6(49) = 49-4 = 45 \,\vdots\, 5$.

Продовжуючи міркування, можна розглянути $\delta_p(n) = \dfrac{n-\sigma_p(n)}{p-1}$. Зрозуміло, що $\delta_p(n)=\varepsilon(n)$ для $p=2$. Для дослідження питання, чи є число $\delta_p(n)$ максимальним степенем p, на яке ділиться число $n!$, можна запропонувати студентам розглянути випадки $p=3$ і $p=4$. Зокрема, доречно буде звернути увагу, що при $p=4$:

$$\delta_4(6) = \frac{6-3}{3} = 1, \text{ але } 6! = 6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 \,\vdots\, 4^2$$

Потім необхідно підказати студентам *гіпотезу* про необхідність в даному питанні «звуження» твердження «лише для простого p». Далі можна розглянути біном Ньютона:

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1a^{n-1}b + C_n^2a^{n-2}b^2 + \ldots + C_n^{n-1}ab^{n-1} + b^n.$$

Для зручності міркувань про біноміальні коефіцієнти можна симетризувати їх так:

$C_{n+m}^{n} = \dfrac{(n+m)!}{n!\,m!}$. Виходячи з попередніх міркувань можна відповісти на запитання, на який максимальний степінь простого числа p ділиться даний біноміальний коефіцієнт. Цей степінь дорівнює

$$\frac{(m+n)-\sigma_p(n+m)-(n-\sigma_p(n))-(m-\sigma_p(m))}{p-1}=\frac{\sigma_p(n)+\sigma_p(m)-\sigma_p(n+m)}{p-1}.$$

З отриманого результату випливає, що коли $\sigma_p(n+m)=\sigma_p(n)+\sigma_p(m)$, то C_{n+m}^{n} не ділиться на число p. Постає запитання: коли виконується рівність $\sigma_p(n+m)=\sigma_p(n)+\sigma_p(m)$? Вона виконується завжди, коли при додаванні чисел n і m в p-ковій системі числення не відбувається перенесень із розряду в розряд. Наприклад, якщо додати два числа n і m, записані у сімковій системі числення як 23 і 31, то одержимо 54 без перенесень. Тоді $23_7 = 3+2\cdot 7 = 17 = n$, $31_7 = 1+3\cdot 7 = 22 = m$, $\sigma_7(n)=2+3=5$, $\sigma_7(m)=1+3=4$, $n+m=17+22=39=4+5\cdot 7=54_7$, $\sigma_7(n+m)=4+5=9$. Оскільки $\sigma_7(n+m)=\sigma_7(n)+\sigma_7(m)$, то $C_{n+m}^{n}=C_{39}^{17}$ не ділиться на 7.

Постає запитання: а якщо при додаванні чисел n і m в p-ковій системі числення відбувається перенесення із розряду в розряд? Припустимо, що таке перенесення відбувається в деякому розряді i. Нехай у цьому розряді число n має цифру $s<p$, а число m – цифру $r<p$ і $s+r>p$. Тоді в наступний розряд перейде 1, а в i-му замість $s+r$ буде записано $s+r-p$. Тоді число $\sigma_p(n+m)$ за рахунок i-го розряду буде на $p-1$ меншим, ніж $\sigma_p(n)+\sigma_p(m)$. Отже, справедлива наступна теорема.

Теорема 3. Якщо p – просте число, то максимальний степінь p, на який ділиться число C_{n+m}^{n}, дорівнює кількості перенесень при додаванні чисел n і m в p-ковій системі числення.

Перед формулюванням наступної теореми доцільно розглянути такий приклад:

Розглянемо C_{2n}^{n} – найбільший біноміальний коефіцієнт серед усіх, що входять в розклад бінома $(a+b)^{2n}$. Максимальний степінь p, на який ділиться число C_{2n}^{n}, дорівнює кількості перенесень, що отримують при додаванні $n+n$ в p-ковій системі числення. Припустимо, що $n<p<2n$. Тоді n в p-ковій системі записується однією p-ковою «цифрою» (n), а $2n$ – двома: $2n=r+1\cdot p$. Це означає, що відбувається рівно одне перенесення і тому p входить в C_{2n}^{n} рівно один раз. Таким чином, добуток усіх простих чисел, що знаходяться між n і $2n$, не перевищує C_{2n}^{n}. Крім того, відомо, що $\sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^{k} = 2^{2n} = 4^n$, звідки випливає, що $C_{2n}^{n} < 4^n$. Тоді, наприклад, якщо $n=2k$, то добуток простих чисел, що містяться між $\dfrac{n}{2}$ і n, є меншим за $4^{\frac{n}{2}}$; якщо $n=4k$, то добуток простих чисел, що містяться між $\dfrac{n}{4}$ і $\dfrac{n}{2}$, є меншим за $4^{\frac{n}{4}}$ і т.д. Тоді добуток всіх простих чисел, що містяться між 1 і n, є меншим за $4^{\frac{n}{2}} \cdot 4^{\frac{n}{4}} \cdot 4^{\frac{n}{8}} \cdot \ldots = 4^{\frac{n}{2}+\frac{n}{4}+\frac{n}{8}+\ldots} = 4^n$.

Після наведеного прикладу студентів можна ознайомити із самою теоремою:

Теорема 4. Добуток усіх простих чисел, менших за n, є меншим за 4^n.

Строге доведення цієї теореми доцільно запропонувати провести студентам самостійно, лише підказавши метод доведення (метод математичної індукції).

Нехай $p \le n$. Тоді в розкладі n є принаймні дві p-кові цифри. Якщо в розкладі $2n$ їх рівно дві, то $2n < p^2$ і, зрозуміло, що відбувається не більше одного перенесення. $2n = a_0 + a_1 p < b_0 + b_1 p + 1 \cdot p^2$ – тризначне число. Після цих міркувань стає зрозумілою така лема.

Лема 1. Якщо $p > \sqrt{2n}$, то максимальний степінь p, на який ділиться число C_{2n}^n, не перевищує 1.

Крім того, з того, що $2n < p^2$, випливає, що $n = a_0 + a_1 p$, при цьому $a_0 < p,\ \ a_1 < \dfrac{p}{2}$. Щоб не було перенесень, повинно бути $a_0 < \dfrac{p}{2}$. Якщо, наприклад, $a_0 = n - p < \dfrac{p}{2}$, тобто $n < p + \dfrac{p}{2} = \dfrac{3}{2} p$, то p не є дільником C_{2n}^n. З цих міркувань випливає така лема.

Лема 2. Якщо $\dfrac{2n}{3} < p \le n$, то C_{2n}^n не ділиться на p при будь-яких $n > 2$.

Нехай $p \le \sqrt{2n}$. В цьому випадку може з'явитись декілька перенесень, але якщо $2n = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \ldots + a_k p^k$, то кількість перенесень не може перевищувати k. Тоді з того, що $2n \ge p^k$, випливає, що $\log_p(2n) \ge k$. А це означає, що найбільший степінь p, на який ділиться число C_{2n}^n, не перевищує $\log_p(2n)$. Отже, має місце така лема.

Лема 3. Нехай $T = p^m$ є дільником числа C_{2n}^n, де p – довільне натуральне число, яке не дорівнює одиниці. Тоді $T \le 2n$.

Доведення. $T = p^m \le p^{\log_p(2n)} = 2n$. Після проведених міркувань можна описати структуру числа C_{2n}^n з точки зору розкладу на степені простих чисел.

Розклад числа C_{2n}^n на степені простих чисел складається з трьох типів співмножників

Прості числа r_i, $n < r_i < 2n$, кожне по одному разу	Прості числа s_i, $\sqrt{2n} < s_i < \dfrac{2n}{3}$, кожне не більше одного разу	Прості числа q_i, $q_i < \sqrt{2n}$. Тут можлива подільність на q_i^k, $k > 1$, але $q_i^k \le 2n$

Цікавим виявляється питання про «ваги» кожної множини в загальній структурі.

1. Добуток усіх чисел другої групи не перевищує $4^{\frac{2n}{3}}$ (згідно з теоремою 4).

2. Простих чисел в третій групі менше, ніж $\sqrt{2n}-1$. Тому за лемою 3 їх загальна вага не перевищує $(2n)^{\sqrt{2n}-1}$.

3. Дуже цікавим виявляється питання про першу групу. Чи зустрічаються випадки, при яких ця група порожня? Виявляється, цим питанням цікавився Бертран (відомий постулат Бертрана) та П.Л. Чебишов.

Теорема Чебишова (постулат Бертрана). Між числами n і $2n$ $\left(n>1\right)$ завжди знайдеться хоча б одне просте число.

Доведення. Безпосередньою перевіркою переконуємося, що для $1<n\le 9$ твердження є правильним.

Розглянемо випадок, коли $n>9$. Використаємо метод доведення від супротивного. Нехай між числами n і $2n$ немає простих чисел. Тоді повинна справджуватись нерівність

$$C_{2n}^{n}<4^{\frac{2n}{3}}\cdot\left(2n\right)^{\sqrt{2n}-1}. \tag{1}$$

Але C_{2n}^{n} – найбільший біноміальний коефіцієнт, що входить у біном $(1+1)^{2n}$. Всього біноміальних коефіцієнтів $2n+1<4n$. Тоді $C_{2n}^{n}>\frac{4^n}{4n}$. Таким чином,

$$\frac{4^n}{4n}<C_{2n}^{n}<4^{\frac{2n}{3}}\cdot(2n)^{\sqrt{2n}-1},\qquad \frac{4^n}{4n}<\frac{4^{\frac{2n}{3}}\cdot(2n)^{\sqrt{2n}}}{2n},\qquad 4^{\frac{n}{3}}<2\cdot(2n)^{\sqrt{2n}},$$

$$\log_4 4^{\frac{n}{3}}<\log_4\left(2\cdot(2n)^{\sqrt{2n}}\right),\qquad \frac{n}{3}<\log_4 2+\sqrt{2n}\log_4(2n),\qquad n<3\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{n}\log_4(2n)+\frac{3}{2}.$$

Поділимо ліву і праву частини останньої нерівності на $\sqrt{n}$:

$$\sqrt{n}<\sqrt{18}\cdot\log_4(2n)+\frac{3}{2\sqrt{n}}.$$

Для $n>9$ справедлива нерівність $\frac{3}{2\sqrt{n}}<\frac{1}{2}$. Тоді $\sqrt{n}<\sqrt{18}\cdot\log_4(2n)+\frac{1}{2}$,

$$\sqrt{n}-\sqrt{18}\cdot\log_4(2n)-\frac{1}{2}<0. \tag{2}$$

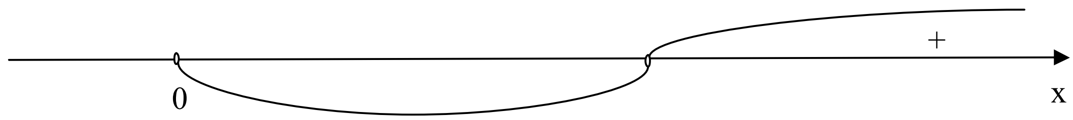
Розглянемо функцію $f(x)=\sqrt{x}-\sqrt{18}\log_4(2x)-\frac{1}{2}$ $(x>0)$.

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{2\sqrt{18}}{2x\ln 4}=\frac{\sqrt{x}\ln 4-2\sqrt{18}}{2x\ln 4},$$

$$\sqrt{x}\ln 4-2\sqrt{18}=0,\quad \sqrt{x}=\frac{2\sqrt{18}}{\ln 4},\quad x=\frac{72}{\ln^2 4}.$$

Поведінку знакозмінності $f'(x)$ зображено на рисунку.

$$\frac{72}{\ln^2 4}$$



Отже, починаючи з $x > \frac{72}{\ln^2 4} \approx 37,46$ функція $f(x)$ зростає. Підстановкою можна переконатися, що $f(457) > 0$ ($f(457) \approx 0,012$). Таким чином, для $n \ge 457$ нерівність (2), а, отже, і нерівність (1) не справджується, тобто для $n \ge 457$ теорема є правильною.

Прямою перевіркою за таблицею простих чисел можна впевнитись у справедливості теореми для $n < 457$.

Для закріплення поданого вище матеріалу можна розглянути такі приклади:

Приклад 1. Нехай P – множина простих чисел. Довести, що коли $p \in P$, то для будь-яких цілих чисел x, y значення виразу $\frac{(x+y)^p - x^p - y^p}{p}$ є цілим числом .

Розв'язання. $(x+y)^p - x^p - y^p = C_p^0 x^p + C_p^1 x^{p-1} y + C_p^2 x^{p-2} y^2 + \ldots + C_p^p y^p - x^p - y^p =$

$= C_p^1 x^{p-1} y + C_p^2 x^{p-2} y^2 + \ldots + C_p^{p-1} x y^{p-1} =$

$= \frac{p!}{(p-1)!} x^{p-1} y + \frac{p!}{2!(p-2)!} x^{p-2} y^2 + \ldots + \frac{p!}{(p-1)!} x y^{p-1} =$

$= p x^{p-1} y + \frac{p(p-1)}{2} x^{p-2} y^2 + \ldots + p x y^{p-1}$ – є цілим числом.

$C_p^k = \frac{p(p-1)(p-2)\cdot\ldots\cdot(p-k+1)}{k(k-1)(k-2)\cdot\ldots\cdot 1}$ є цілим числом, що ділиться на p, оскільки p – просте.

Отже, $(x+y)^p - x^p - y^p$ ділиться на p, а тому для будь-яких цілих чисел x, y значення виразу $\frac{(x+y)^p - x^p - y^p}{p}$ є цілим числом.

Приклад 2. Доведіть, що коли $n > 5$, то між числами n і $2n$ є не менше двох простих чисел.

Список використаної літератури

1. Вирт Н. Алгоритмы и структуры данных: Пер. с англ. – 2-е изд. испр. – СПБ: Невский диалект, 2001. – 352 с.
2. Уфнаровский В.А. Прогулка до теоремы Чебышева // Квант № 6. – 1992. – С.8-13.
3. Hoare C.A.R. The Monitor: A operating system structuring concept. Comm. ACM, 17, №10. – 1974. – С.549-557.