ПРО ПОВЕДІНКУ ФУНКЦІЇ В ОКОЛІ ТОЧКИ ЛОКАЛЬНОГО ЕКСТРЕМУМУ

Красницький С.М.,
доктор фіз.-мат. наук, професор,
Київський національний університет технологій та дизайну
Курченко О.О.,
доктор фіз.-мат. наук, доцент,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

У статті наведені результати про поведінку сум степеневих рядів в околах точок локального екстремуму та контрприклади, що спростовують інтуїтивні уявлення про поведінку достатньо гладких функцій в околах таких точок.

Статья содержит результаты о поведении сумм степенных рядов в окрестностях точек локального экстремума и контрпримеры, которые опровергают интуитивные представления о поведении достаточно гладких функций в окрестностях таких точек.

This article contains the results on the behavior of the power series sums in the local extreme point neighborhood and the counterexamples for the intuitive ideas on this behavior in the case of the sufficiently smooth functions.

Як поводить себе достатньо гладка функція в околі точки строгого локального екстремуму? Тут інтуїція інколи підказує, що в околі такої точки функція має вести себе як многочлен парного степеня, зокрема, бути локально опуклою. Виявляється, інтуїція насправді підводить, хоча подібні твердження можна знайти у вельми авторитетних видання ([1], глава 3, с.72). У цій статті ми наводимо результати про поведінку сум степеневих рядів в околі точки строгого локального екстремуму, а також контрприклади, що свідчать про хибність цих тверджень у класах гладких та навіть нескінченно диференційовних функцій в межах нормативного курсу математичного аналізу функцій однієї змінної. Порушені питання можуть бути використані для залучення студентів до науково-дослідної роботи в напрямку математичного аналізу вже на перших курсах математичних факультетів класичних та педагогічних університетів.

Нехай функція f є сумою збіжного на $\boldsymbol{R} = (-\infty, +\infty)$ степеневого ряду,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \; x \in \boldsymbol{R}. \tag{1}$$

Лема 1. Нехай функція f визначена рівністю (1) та існує збіжна послідовність (x_k), така, що $f(x_k) = 0.$ Тоді $f(x) = 0,$ $x \in \boldsymbol{R}.$

Доведення. Нехай $x_k \to x_0 \in \boldsymbol{R}$, $k \to \infty$. Покладемо в (1) $t = x - x_0$, $t_k = x_k - x_0$, $k \geq 1$. Тоді $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t + x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n =: g(t)$, $t \in \boldsymbol{R}$, де коефіцієнти b_n, $n \geq 0$ визначаються однозначно. Далі, у рівності $g(t_k) = 0$, $k \geq 1$ перейдемо до границі при $k \to \infty$ і отримаємо $b_0 = 0$. На другому кроці у рівності $\sum_{n=1}^{\infty} b_n t_k^{n-1} = 0$, $k \geq 1$ перейдемо до границі при $k \to \infty$ і отримаємо $b_1 = 0$ і т.д. Отже, $b_n = 0$, $n \geq 0$, тобто $f(x) = 0$, $x \in \boldsymbol{R}$. Лема доведена.

Зауваження 1. Твердження леми 1 є наслідком властивості єдиності аналітичних функцій ([2], §11.5). Але у цій статті ми не виходимо за межі математичного аналізу функції однієї змінної.

Теорема 1. Нехай функція (1) має збіжну послідовність точок (x_k) локального екстремуму. Тоді $f(x) = \text{const}$, $x \in \boldsymbol{R}$.

Доведення. Внаслідок необхідної умови локального екстремуму, $f'(x_k) = 0$, $k \geq 1$. Із леми 1 випливає, що $f'(x) = 0$, $x \in \boldsymbol{R}$, звідки слідує твердження теореми.

Наслідок 1. Нехай x_0 – точка локального екстремуму відмінної від сталої функції, що є сумою збіжного на $\boldsymbol{R}$ степеневого ряду. Тоді існує таке $\delta > 0$, що інтервал $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ містить рівно одну точку локального екстремуму.

Іншими словами, множина всіх точок локального екстремуму відмінної від сталої функції (1) складається із ізольованих точок.

Теорема 2. Нехай x_0 – точка строгого локального екстремуму функції (1), $m = \min\left\{n \in \boldsymbol{N} \mid f^{(n)}(x_0) \neq 0\right\}, \boldsymbol{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Тоді

$$f(x) - f(x_0) = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k, \; x \in \boldsymbol{R}. \tag{2}$$

При цьому функція (1) строго опукла в деякому околі точки x_0.

Доведення. Степеневий ряд є рядом Тейлора своєї суми. Тому $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$, $x \in \boldsymbol{R}$. Оскільки функція f має точку строгого локального екстремуму, то вона не є сталою на $\boldsymbol{R}$, а тому існує $n \in N : f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Натуральне число m визначено коректно: довільна непорожня підмножина натуральних чисел містить найменше число. При цьому число m парне. Це випливає із достатніх умов строго локального екстремуму ([3], с.158, теорема 3). Далі,

$$f(x)=\sum_{k=m}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k,\ x\in\boldsymbol{R},$$

$$f''(x)=\sum_{k=m}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}k(k-1)(x-x_0)^{k-2}=(x-x_0)^{m-2}\left(\frac{f^{(m)}(x_0)}{(m-2)!}+o(1)\right),\ x\to x_0.$$

Функція f строго опукла в деякому околі точки x_0. Дійсно, нехай $f^{(m)}(x_0)>0$. Тоді для деякого $\delta>0\ \forall t\in(x_0-\delta,\ x_0+\delta)\setminus\{x_0\}: f''(t)>0$, звідки випливає строга опуклість вниз функції f на інтервалі $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$. У випадку $f^{(m)}(x_0)<0$ функція f строго опукла вгору в деякому околі точки x_0.

У зв'язку із твердженнями теорем 1, 2 для сум степеневих рядів, наведемо кілька прикладів достатньо гладких функцій, для яких твердження цих теорем хибні. Таким чином, поведінка таких функцій в околі точок екстремуму не тільки не подібна до поведінки поліномів другого степеня, а й взагалі не подібна до поведінки будь-якого алгебраїчного полінома ненульового степеня. Відмітимо, що деякі близькі питання щодо локальної поведінки гладких функцій розглянуто у відомій книзі [4], розділ 3.

Приклад 1. Двічі неперервно диференційована відмінна від константи функція, що має збіжну послідовність точок локального екстремуму. Тобто ця функція має точку екстремуму, в будь-якому околі якої знайдеться нескінченна (зліченна) множина точок екстремумів цієї функції. Покладемо

$$f(x)=\begin{cases}x^6\left(1+\sin\dfrac{1}{x}\right), x\neq 0,\\ 0,\ x=0.\end{cases} \qquad (3)$$

Очевидно, мінімальне значення цієї функції дорівнює 0. Зокрема, воно досягається у точці 0. Крім того, будь-який окіл точки 0 містить безліч коренів рівняння $\sin\frac{1}{x}=-1$, в яких функція f також набуває значення нуль. Таким чином, точки $x_n=\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)^{-1}$, $n\in Z$ є точками строгого локального екстремуму функції f. При цьому точка нестрогого абсолютного мінімуму $x_0=0$ є границею послідовностей $(x_n),(x_{-n})$ точок строгого локального екстремуму функції. Переконаємося, що функція f двічі неперервно диференційовна на $\boldsymbol{R}$. Дійсно,

$$f'(x)=\begin{cases} 6x^5\left(1+\sin\frac{1}{x}\right)-x^4\cos\frac{1}{x}, \; x\neq 0, \\ 0, \; x=0. \end{cases}$$

Похідна при $x\neq 0$ знайдена за правилами диференціювання, а у точці $x=0$ – за означенням похідної. Так само знаходимо другу похідну функції f :

$$f''(x)=\begin{cases} 30x^4\left(1+\sin\frac{1}{x}\right)-10x^3\cos\frac{1}{x}-x^2\sin\frac{1}{x}, \; x\neq 0, \\ 0, \; x=0. \end{cases}$$

Неважко бачити, що друга похідна функції f неперервна на $\boldsymbol{R}$. Крім того, друга похідна функції f не зберігає знака ні ліворуч, ні праворуч точки нуль. Дійсно, для послідовностей $x_n=\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)^{-1}$, $y_n=\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)^{-1}$, $n\geq 1$ маємо $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f''(x_n)}{x_n^2}=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f''(y_n)}{y_n^2}=-1$.

Отже, функція f не є опуклою в жодному околі точки нуль.

Зауважимо, що похідна третього порядку функції (3) має розрив другого роду в нулі, а похідна четвертого порядку у нулі не існує.

Відсутність опуклості в околі точки локального екстремуму не обов'язково зумовлюється неізольованістю точки локального екстремуму, як свідчить наступний приклад.

Приклад 2. Двічі неперервно диференційовна функція, що має ізольовану точку строгого локального екстремуму і не є опуклою в жодному околі цієї точки.

Покладемо

$$f(x)=\begin{cases} x^4\left(1+24x^2\sin\frac{1}{x}\right), x\neq 0 \\ 0, \; x=0. \end{cases} \qquad (4)$$

Функція f має строгий локальний мінімум в точці $x_0 = 0$. Дійсно, для $\delta=\frac{1}{\sqrt{24}}$, для всіх $x\in(-\delta,\delta)\setminus\{0\}$ справджується нерівність $f(x)>f(0)=0$. Перша та друга похідні функції знаходяться так само, як у попередньому прикладі. Маємо:

$$f'(x)=\begin{cases} 4x^3+144x^5\sin\frac{1}{x}-24x^4\cos\frac{1}{x}, x\neq 0, \\ 0, \; x=0; \end{cases}.$$

$$f''(x)=\begin{cases} 12x^2+720x^4\sin\frac{1}{x}-240x^3\cos\frac{1}{x}-24x^2\sin\frac{1}{x}, x\neq 0, \\ 0, \; x=0. \end{cases}.$$

Помітимо, що $f'(x) = x^3\left(4 + o(1)\right)$, $x \to 0$. Звідси випливає, що ліворуч і праворуч точки нуль перша похідна функції f зберігає знак. Отже, у деякому околі точки нуль відсутні точки локального екстремуму функції f за винятком точки строгого локального мінімуму $x_0 = 0$. Таким чином, нуль – ізольована точка множини всіх точок локального екстремуму функції f.

Переконаємося тепер, що ліворуч і праворуч точки нуль має місце нескінченна кількість змін знаку другої похідної функції f. Це випливає із рівності

$$f''(x) = 12x^2\left(\left(1 - 2\sin\frac{1}{x}\right) + o(1)\right),\ x \to 0.$$

Дійсно, для достатньо великих значень $|n|$, $n \in Z$ друга похідна набуває від'ємних значень у точках $x_n = \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)^{-1}$ та додатних у точках $y_n = \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)^{-1}$. При цьому $x_n, y_n \to 0$ при $n \to \infty$. Таким чином, друга похідна функції f не зберігає знака праворуч і ліворуч нуля, звідки й випливає твердження про відсутність опуклості функції f в будь-якому околі точки строгого локального мінімуму цієї функції.

Зауважимо, що похідна третього порядку функції (4) має розрив другого роду в нулі, а похідна четвертого порядку у нулі не існує.

Приклад 3. Нескінченно диференційовна функція, що має ізольовану точку строгого локального екстремуму і не є опуклою в жодному околі цієї точки.

Покладемо

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)\left(1 + x^2\sin\dfrac{1}{x^3}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Функція f має строгий локальний мінімум в точці $x_0 = 0$. Дійсно, для всіх $x \in (-1,1)\setminus\{0\}$ справджується нерівність $f(x) > f(0) = 0$. Перша та друга похідні знаходяться так само, як у попередніх прикладах:

$$f'(x) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)\dfrac{1}{x^3}\left(2 + \left(2x^2 + 2x^4\right)\sin\dfrac{1}{x^3} - 3x\cos\dfrac{1}{x^3}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)\dfrac{1}{x^6}\left(4 - 6x^2 + \left(4x^2 + 2x^4 + 2x^6 - 9\right)\sin\dfrac{1}{x^3} - 12x\cos\dfrac{1}{x^3}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Зауважимо, що $\lim\limits_{x\to 0} f''(x) = 0 = f''(0)$. Праворуч і ліворуч точки нуль друга похідна функції (5) не зберігає знака. Дійсно, $f''(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cdot\frac{1}{x^6}\left(4 - 9\sin\frac{1}{x^3} + o(1)\right)$, $x \to 0$ і для достатньо великих значень $|n|$, $n \in Z$ друга похідна набуває від'ємних значень у точках $x_n = \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)^{-1/3}$ та додатних у точках $y_n = \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)^{-1/3}$. При цьому $x_n, y_n \to 0$ при $n \to \infty$. Таким чином, функція (5) не є опуклою в жодному околі точки нуль.

Для доведення нескінченної диференційовності на $\boldsymbol{R}$ функції (5) помітимо, що при $x \neq 0$

$$f^{(n)}(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(a_n\left(\frac{1}{x}\right) + b_n\left(\frac{1}{x}\right)\sin\frac{1}{x^3} + c_n\left(\frac{1}{x}\right)\cos\frac{1}{x^3}\right),\ n \geq 0,$$

де $a_n(\cdot), b_n(\cdot), c_n(\cdot)$ – многочлени. Тому $\lim\limits_{x\to 0} f^{(n)}(x) = 0$. Далі для $f^{(n)}$ при $n = 1, 2, ...$ послідовно застосовуємо наслідок теореми Лагранжа ([3], глава 4, п. 2, наслідок 4) і отримуємо $f^{(n)}(0) = 0$. Таким чином, функція (5) n раз неперервно диференційовна на $\boldsymbol{R}$ для довільного натурального n, тобто нескінченно диференційовна на $\boldsymbol{R}$.

Наведені у статті результати та контрприклади щодо поведінки функції у точці строгого локального екстремуму можуть бути використані у науково-дослідній роботі студентів молодших курсів, для підготовки курсових робіт, у спеціальних курсах для студентів-математиків педагогічних університетів.

Список використаної літератури

1. Мину М. Математическое программирование. — М.: Наука, 1990. — 486 с.
2. Давидов М.О. Курс математичного аналізу: Підручник: У 3 ч. Ч.3. Елементи теорії функцій і функціонального аналізу. – К.: Вища шк., 1992. – 359 с
3. Дороговцев А.Я. Математичний аналіз: Підручник: У двох частинах. Частина 1. – К.: Либідь, 1993. – 320 с.
4. Гелбаум Б., Олмстед Дж. Контрпримеры в анализе. М.: Мир, 1967. — 252 с.